

193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY

E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON

W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

44. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1939

QAI
M88
v. 44

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY

E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON

W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

44. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1939

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Baier, O., Ein Approximationsproblem	293
Baldus, R., Über nicht beweisbare und doch entbehrliche Axiome	321
Berichtigungen zu Band 42, S. 1—30 und S. 301—312, Band 44, S. 319—320	794
Brauer, A., Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist	212
Braun, H., Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen	387
Digel, E., Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differen- tialgleichungen erster Ordnung	445
Dinghas, A., Über eine Eigenschaft der Charakteristik von meromorphen Funktionen in einer Halbebene	354
Dinghas, A., Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungs- flächen	568
Dinghas, A., Eine Verallgemeinerung des Picard-Borelschen Satzes	573
Erdélyi, A., Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome	201
Feldheim, E., Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite par la méthode du développement des fonctions fondamentales	55
Golab, St., Über die Klassifikation der geometrischen Objekte	104
Graf, H. und Sauer, R., Fastrhombische Kurvennetze und Vierecksnetze	362
Hall, N. A., Binary Quadratic Discriminants with a Single Class of Forms in Each Genus	85
Heegner, K., Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. III.	555
Heinhold, J., Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes	659
Horn, J., Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehr- fachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung	481
Hua, L., On the representation of numbers as the sums of the powers of primes	335
Iyer, V. G., Determinative Sets of Points for Classes of Integral Functions	195
Kamke, E., Über die Existenz von Eigenwerten bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung	619
Kamke, E., Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbst- adjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung	635
Karamata, J., Über die <i>B</i> -Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande	156
Kienast, A., Über die asymptotische Darstellung der summatorischen Funktion von Dirichletreihen mit positiven Koeffizienten	115

	Seite
Knies, H., Lösung von Randwertproblemen bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vermittle der endlichen Fourier-Transformation . . .	266
Lonn, E. R., Über singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen . . .	507
Macintyre, A. J., On Bloch's theorem . . .	536
Mangler, W., Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich . . .	541
Marcinkiewicz, J., Sur une propriété de la loi de Gauss . . .	612
Mayr, K., Über die Lösung von Umkehrproblemen durch Differentialresolventen . . .	91
Meixner, J., Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome . . .	531
Ostmann, H.-H., Beweis eines Satzes von A. S. Besicovitch über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen . . .	319
Palamà, G., Sulla trasformazione di Laplace di alcune notevoli funzioni e su alcuni noti sviluppi in serie . . .	347
Petersson, H., Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. Teil V: Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren bei beliebigen Grenzkreisgruppen . . .	127
Pogorzelski, W., Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaréschen Randwertaufgabe . . .	427
Raff, H., Minimumsprobleme für Summen absoluter Beträge . . .	452
Rao, A. N., On a principle of duality in circle sphere and line geometries . . .	185
Ritzdorff, B., Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen mit halbfiniter Koeffizientenmatrix . . .	23
Sauer, R., und Graf, H., Fastrhombische Kurvennetze und Vierecknetze . . .	362
Schatz, H., Die Invarianten von Streifen auf Flächen in der Bewegungs-geometrie . . .	330
Schmidt, E., Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen . . .	689
Selberg, S., Zur Theorie der quadratfreien Zahlen . . .	306
Shastri, N. A., An infinite Integral involving Bessel functions, parabolic cylinder functions, and the confluent hypergeometric functions . . .	789
Siegel, C. L., Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. II. . .	398
Sprague, R., Bemerkungen über gewisse Zahlfolgen . . .	20
Strubecker, K., Studysches Übertragungsprinzip und Motorrechnung . . .	1
Thomas, H., Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen . . .	233
Weise, K. H., Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n . . .	161
Weiss, E. A., Oktaven, Engelscher Komplex, Trialitätsprinzip. Herrn A. Buhl zum 60. Geburtstag . . .	580

Studysches Übertragungsprinzip und Motorrechnung.

Von

Karl Strubecker, Wien.

Es ist bekanntlich möglich, Einzelkräfte, die in einem Massenpunkte angreifen, durch Vektoren eines Bündels zu repräsentieren und sie nach der Parallelogrammregel durch Vektoraddition zusammenzusetzen. In genau der gleichen Weise kann man auch beliebige *Kraftsysteme* des *Raumes*, nachdem man sie als *Motoren* im Sinne Studys¹⁾ gedeutet hat, unter Anwendung einer der fruchtbarsten Methoden der neueren Geometrie, des sogenannten *Studyschen Übertragungsprinzips*, als *Vektoren* eines gewissen, nämlich *dual-komplexen* Bündels auffassen und sie nach der Parallelogrammregel durch Vektoraddition zusammensetzen. *Die Statik des Raumes läßt sich so zurückführen auf die einfachere Statik im Bündel.* Ein gleiches gilt für die Kinematik.

Man gewinnt so auch die einfachste Basis, von der aus sich die von R. v. Mises²⁾ begründete sogenannte *Motorrechnung* in ihrem elementaren Teile in direktem Anschluß an die elementare Vektorrechnung gewinnen läßt. In der Tat *fällt die Motorrechnung mit der gewöhnlichen Vektorrechnung des genannten dualen Bündels zusammen.* Diese Tatsache ist es, die, wenn auch in formal anderer Darstellung, im wesentlichen den Untersuchungen in Studys „Geometrie der Dynamen“ zugrunde liegt. — Über ältere Arbeiten unterrichtet in vorzüglicher Weise der Enzyklopädieartikel von E. Cartan³⁾. In jüngerer Zeit haben M. Lagally⁴⁾ und insbesondere F. Löbell⁵⁾ in einer wertvollen Arbeit Beiträge zu unserem Thema geleistet.

¹⁾ E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903. Dieses Werk wird hier zitiert: „Study, G. d. D.“

²⁾ R. v. Mises, *Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik*, ZAMM. 4 (1924), S. 155—181, 193—213. Hier zitiert durch „Mises, M. R.“ Man vergleiche über die Anwendungen der Motorrechnung auf Mechanik auch den Bd. 5 des Handbuchs der Physik (1927), Kap. 6: C. B. Biezeno (*Geometrie der Kräfte und Massen*) und Kap. 8: M. Winkelmann, R. Grammel (*Kinetik der starren Körper*).

³⁾ E. Cartan, *Nombres complexes*, Edit. franc. de l'Encycl. d. sci. math. I 5, insbesondere S. 455—458.

⁴⁾ M. Lagally, *Vorlesungen über Vektorrechnung*, Leipzig 1928, S. 352—354.

⁵⁾ F. Löbell, *Aus der Differentialgeometrie der Schraubenscharen*, Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart, Berlin 1929, S. 210—226. Bei Lagally und ausführlicher bei Löbell wird konsequent mit dualen Vektoren operiert. Vgl. auch F. Löbell, *Gewindebüschel und ihre Invarianten*, Crelle Journ. f. r. u. a. Math. 164 (1931), S. 64—66.

In der vorliegenden Note wurde versucht, in möglichstem Anschlusse an die Studysche, auch von v. Mises verwendete geometrische Definition des Motors als geordnetes Geradenpaar eine *Begründung der Motorrechnung* darzulegen, die als *Hilfsmittel vorzüglich das Studysche Übertragungsprinzip benutzt*, das in Kürze (nach einer bekannten Methode von W. Blaschke) hergeleitet werden kann. Die Zuordnung der Motoren zu dualen Vektoren wird dabei eindeutig aus *drei Forderungen* bestimmt.

Die Studyschen Überlegungen zur Geometrie der Motoren sind von R. v. Mises wesentlich erweitert und durch Heranziehung der Vektorrechnung zu einer Motorrechnung ausgebaut worden, deren elementarer Teil sich, wie erwähnt, völlig mit der elementaren Vektorrechnung im dualen Bündel deckt. (Für die Motorrechnung zweiter und höherer Stufe gilt dies nicht mehr im gleichen Sinne). Dem Misesschen skalaren und motorischen Produkte zweier Motoren z. B. entspricht so im wesentlichen das innere und äußere Produkt ihrer dualen Vektoren. Das Studysche Übertragungsprinzip verbürgt bei solchem Aufbau sofort auch die Invarianz dieser Produktbildungen, die z. B. beim Misesschen Aufbau erst auf Grund von Vektoridentitäten bewiesen werden muß.

Da nichts besser als Beispiele die Fruchtbarkeit einer Übertragungsmethode veranschaulichen kann, habe ich gerne einige aus Darstellungen mit älteren Mitteln bekannte aber auch einige neue Anwendungen gegeben. Unter den letzten befinden sich eine neue Herleitung der mechanischen Deutung des motorischen Produkts eines Kraft- und eines Geschwindigkeitsmotors, sowie, als Verallgemeinerungen Misesscher Resultate, die allgemeinste Übertragung der aus der Statik der Ebene bekannten Culmannschen Geraden auf die Raumstatik und zwei neue Darstellungen der beiden Motorprodukte.

I. Der Begriff des Motors.

1. Unter einem *Motor* $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$ verstehen wir mit E. Study⁶⁾ die Figur zweier (nicht rechtwinkligen) Geraden A, B des Raumes, die als seine Anfangsgerade A und Endgerade B unterschieden sind. Ihr Gemeinlot C heißt die Achse des Motors. Bezeichnet $\varphi \left(\neq \frac{\pi}{2} \right)$ den Winkel, $\overline{\varphi}$ den Abstand von A und B , dann heißt

$\operatorname{tg} \varphi = \xi \dots, \text{„Öffnung“}, \quad \overline{\varphi} = \eta \dots, \text{„Länge“}$
des Motors.

Zwei Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ heißen *äquivalent* oder *gleich*, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$, wenn sie 1. dieselbe Achse C , 2. dieselbe Öffnung ξ , 3. dieselbe Länge η haben. Sie gehen dann durch Schraubung um ihre gemeinsame Achse C auseinander

⁶⁾ Study, G. d. D., § 7.

hervor. Jedes Lot A der Achse C kann als Anfangsgerade des Motors gewählt werden. Die Endgerade ist durch Öffnung und Länge eindeutig bestimmt.

Sonderfälle des Motors sind: a) Zwei schneidende Geraden A und B . Es ist $\xi = 0$. Der Motor heißt dann *Rotor*. b) Zwei parallele Geraden A und B . Es ist $\eta = 0$. Man spricht von einem *Translator*. Alle zu einem beliebigen Gemeinlot von A und B parallelen Geraden sind Achsen des Translators.

2. Unter der *Summe* zweier Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man nach Study ⁷⁾ jenen Motor $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, der wie folgt konstruiert wird: Es seien C_a und C_b die Achsen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und O ihr Gemeinlot (oder eines von unendlich vielen). Wir können es für jeden der Motoren als

Anfangsgerade wählen, so daß $\mathfrak{A} = \overrightarrow{OA}$, $\mathfrak{B} = \overrightarrow{OB}$ ist. Der *Summenmotor* $\mathfrak{C}$ soll wieder die Anfangsgerade O haben, seine Endgerade C ermitteln wir so: wir legen Normalebenen zu O (Fig. 1), suchen deren Schnittpunkte a, b mit O, A, B auf und vervollständigen die Seiten $[oa]$ und $[ob]$ laut Figur zu einem Parallelogramm. Man kann leicht zeigen ⁸⁾, daß die erhaltenen Ecken c sämtlich auf einer Geraden C , der Endgeraden des Summenmotors $\mathfrak{C}$, liegen.

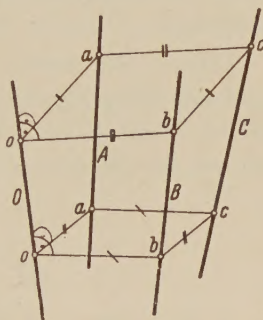


Fig. 1

Von Bedeutung ist der *Sonderfall*, wo die Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *koaxial* sind. Man findet den Satz: Die Summe zweier koaxialen Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist ein zu ihnen koaxialer Motor $\mathfrak{C}$, dessen Öffnung die Summe der Öffnungen und dessen Länge die Summe der Längen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind.

II. Die Bedeutung der Motoren für Statik und Kinematik.

3. Nach *Poinsot* läßt sich jedes räumliche *Kräfte*system eindeutig in *kanonischer Weise* zerlegen in eine Einzelkraft der Intensität ξ und ein Kräftepaar vom Moment η , dessen Ebene normal ist zur Wirkungslinie C der Kraft. Wir ordnen mit Study ⁹⁾ diesem Kräfte-system den *Motor* (*Kraftmotor*) zu, dessen Achse C , Öffnung ξ und Länge η ist. Diese Zuordnung ist im Sinne der für Motoren und Kraftsysteme geltenden Äquivalenzbegriffe eindeutig. Im besonderen wird einer *Einzelkraft* ein *Rotor*, einem *Kräftepaar* ein *Translator* zugewiesen.

⁷⁾ Study, G. d. D., § 7 spricht von „geometrischer Addition“, um die hier verwendete von anderen analogen Verknüpfungen zu unterscheiden.

⁸⁾ Der einfachste Beweis verwendet die Methoden der Darstellenden Geometrie. Man stelle die Konstruktion in zwei durch O gehenden normalen Rißebenen dar.

⁹⁾ Study, G. d. D., S. 116.

Zwei Kraftsysteme können dabei zusammengesetzt werden durch Addition der ihnen zugeordneten Motoren. Der Beweis dieses wichtigen Satzes wird sich später von selbst ergeben.

4. Jede Momentanbewegung (Elementarbewegung) des Raumes läßt sich auffassen als eine Schraubenbewegung um eine Achse C die sich zusammensetzt aus einer Rotation um C vom Winkelement $d\varphi = \xi dt$ und einer Translation parallel C vom Wegelement $d\bar{\varphi} = \eta dt$. Deuten wir hier dt als Zeitelement, so ist ξ die Winkelgeschwindigkeit einer Rotation um C , η die Geschwindigkeit einer Translation längs C . Der Elementarbewegung ist ein bestimmter Geschwindigkeitszustand (eine Geschwindigkeitsschraube) koordiniert.

Ordnen wir dieser Elementarbewegung oder dem Geschwindigkeitszustand den Motor¹⁰⁾ zu (Bewegungs-, Geschwindigkeitsmotor), dessen Achse C , Öffnung ξ und Länge η ist, dann gilt wieder, daß ihrer Zusammensetzung die Addition der zugehörigen Motoren entspricht.

III. Duale Zahlen und Vektoren.

5. Eine Gerade A denken wir uns mit einem Stabe der Länge Eins bedeckt und diesen in einem Cartesischen Rechtssystem festgelegt durch seinen Richtungsvektor α ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) im Verein mit seinem Momentvektor $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$) hinsichtlich des Koordinatenursprungs o . Es gilt

$$(1) \quad \alpha^2 = 1, \quad \alpha \bar{\alpha} = 0.$$

Wir verschmelzen diese Vektoren zu einer dual-komplexen Verbindung¹¹⁾

$$(2) \quad A = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha},$$

wobei ε der Rechenregel

$$(3) \quad \varepsilon^2 = 0$$

genügt, und erhalten einen dual-komplexen oder kurz dualen Vektor A . Seine Komponenten $\alpha_i + \varepsilon \bar{\alpha}_i$ sind dual-komplexe oder schlechthin duale Zahlen.

Jeder Geraden ist damit im wesentlichen eindeutig ein dualer Vektor zugeordnet. Wir denken uns diese Vektoren im Koordinatenursprung angeheftet und nennen ihren Inbegriff oder den ihrer Trägergeraden das „duale Bündel“.

¹⁰⁾ Study, G. d. D., S. 119.

¹¹⁾ Es ist bequem und unbedenklich, die Gerade und ihren dualen Vektor stets mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen.

6. Für duale Zahlen $z = x + \varepsilon y$ gelten bekanntlich im wesentlichen die gleichen Rechenregeln, wie für gewöhnliche komplexe Zahlen. So wird

$$(4) \quad (x + \varepsilon y) (x' + \varepsilon y') = xx' + \varepsilon (xy' + yx'),$$

$$(5) \quad \frac{x + \varepsilon y}{x' + \varepsilon y'} = \frac{x + \varepsilon y}{x' + \varepsilon y'} \cdot \frac{x' - \varepsilon y'}{x' - \varepsilon y'} = \frac{xx' + \varepsilon (xy' - x'y')}{x'^2}.$$

Für einen sinnvollen Quotienten muß $x' \neq 0$ sein: Durch rein duale Zahlen kann man nicht dividieren. Ähnlich aber, wie man durch Schöpfung der Zahl ∞ die Division komplexer Größen durch Null ermöglicht, gelingt es auch, durch Schaffung von einfach-unendlich vielen „unendlich großen“ dualen Zahlen die Division durch rein duale Größen ausführbar und legitim zu machen und den Bereich der dualen Zahlen den rationalen Operationen gegenüber abzuschließen¹²⁾.

7. Funktionen eines dualen Argumentes $z = x + \varepsilon y$ werden durch ihre Potenzreihenentwicklung definiert. Man hat¹³⁾

$$(6) \quad f(z) = f(x) + \varepsilon y f'(x).$$

Z. B. ist

$$(7) \quad \sqrt{x + \varepsilon b} = \sqrt{x} + \frac{\varepsilon b}{2\sqrt{x}}.$$

Ist $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ ein dualer Winkel, so wird

$$(8) \quad \cos \Phi = \cos (\varphi + \varepsilon \bar{\varphi}) = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi,$$

$$(9) \quad \sin \Phi = \sin (\varphi + \varepsilon \bar{\varphi}) = \sin \varphi + \varepsilon \bar{\varphi} \cos \varphi.$$

IV. Das Studysche Übertragungsprinzip¹⁴⁾.

8. Die Begriffe, Sätze und Rechenregeln der elementaren Vektorrechnung lassen sich ohne weiteres auf Vektoren mit dualen Komponenten übertragen. So hat man für das Längenquadrat des dualen Vektors A (2) zufolge (1)

$$(10) \quad A^2 = (a + \varepsilon \bar{a})^2 = a^2 + 2 \varepsilon a \bar{a} = 1.$$

Den Raumgeraden entsprechen im dualen Bündel Einheitsvektoren. Umgekehrt ist jeder Einheitsvektor des dualen Bündels Bild einer Raumgeraden.

9. Es sei B eine zweite Gerade,

$$(11) \quad B = b + \varepsilon \bar{b}$$

¹²⁾ Vgl. J. Grünwald, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie, Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), S. 81—136.

¹³⁾ Study, G. d. D., § 23.

¹⁴⁾ Wir folgen der einfachen Darstellung von W. Blaschke, Vorl. über Differentialgeometrie I, Berlin 1930, § 119, 120. Vgl. auch E. A. Weiss, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik, Leipzig-Berlin 1935.

der ihr zugeordnete duale Einheitsvektor. Das innere Produkt der beiden Vektoren A und B wird

$$(12) \quad A \cdot B = (a + \varepsilon \bar{a}) \cdot (b + \varepsilon \bar{b}) = ab + \varepsilon (a\bar{b} + \bar{a}b).$$

Bedeutet φ den Winkel, $\bar{\varphi}$ den Lotabstand der Geraden A und B , Φ den dualen Winkel der Vektoren A und B , dann ist

$$(13) \quad \cos \Phi = A \cdot B$$

und bei geeigneter Abmachung über die Orientierung der auf A und B gewählten Einheitsstäbe:

$$(14) \quad ab = \cos \varphi, \quad a\bar{b} + \bar{a}b = -\bar{\varphi} \sin \varphi.$$

Zufolge (8) ist also nach (12):

$$(15) \quad \Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}.$$

Der duale Winkel Φ der Bildvektoren zweier Raumgeraden setzt sich in dualer Weise aus dem Winkel φ und Abstand $\bar{\varphi}$ der Geraden zusammen.

Z. B. folgt aus $A \cdot B = 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{\varphi} = 0$. „Orthogonale Einheitsvektoren des dualen Bündels sind die Bilder von orthogonal-schneidenden Geraden im Raum und umgekehrt.“

Der auf zwei Einheitsvektoren A und B normale Einheitsvektor C ist danach das Bild des Gemeinlotes C der Raumgeraden A und B . Das Netz der normalen Transversalen von C hat als Bild die ∞^2 zum dualen Einheitsvektor C normalen dualen Einheitsvektoren. Diese gehören der zu C normalen Ebene des dualen Bündels an.

10. Da nach Formel (15) metrischen Invarianten des Raumes solche des dualen Bündels entsprechen, folgt, daß einer Bewegung des Raumes eine Bewegung im dualen Bündel entspricht und umgekehrt. Beispielsweise ist einer Drehung des Bündels um die duale Trägergerade des Einheitsvektors C als Achse durch einen dualen Winkel $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ im Raume zugeordnet eine Schraubung um die Bildgerade C des Vektors als Achse, die zusammengesetzt ist aus einer Drehung vom Winkel φ und einer Schiebung vom Betrage $\bar{\varphi}$.

Bei der Abbildung der Geraden des Raumes auf die Einheitsvektoren des dualen Bündels entsprechen den Bewegungen des Raumes jene im Bündel und umgekehrt. Die beiden Gruppen sind dabei isomorph aufeinander bezogen.

Dieses Ergebnis rührt von E. Study¹⁵⁾ her. Die dargelegte Abbildung heißt nach ihm *Study'sches Übertragungsprinzip*. Das Study'sche Übertragungsprinzip gestattet also, die Geometrie der Bewegungen des Raumes schon im begrifflich einfacheren Rahmen der Bewegungsgeometrie des (dualen)

¹⁵⁾ Study, G. d. D., § 23.

Bündels zu studieren. Gerade hierin liegt der tiefere Wert und die große Bedeutung dieses glänzenden Hilfsmittels der Geometrie.

11. Die Theorie der infinitesimalen Bewegungen des Raumes wird durch das Studysche Übertragungsprinzip zurückgeführt auf die Theorie der infinitesimalen Drehungen des dualen Bündels. Die Zusammensetzung der Elementarbewegungen des Raumes kommt damit hinaus auf die Zusammensetzung der Infinitesimaldrehungen des dualen Bündels, die (wie im reellen) nach der Parallelogrammregel (durch Vektoraddition) in bekannter Weise geleistet werden kann.

Die Analogie, welche zwischen Kinematik und Statik besteht, läßt vermuten, daß, wie eben die *Kinematik*, so auch die *Statik* des Raums sich mittels der Ideen des Studyschen Übertragungsprinzips wird zurückführen lassen auf die begrifflich wesentlich einfachere Statik des (dualen) Bündels. Dies ist in der Tat der Fall. *Man kann zeigen, daß jedem Kraftsystem im Raum ein bestimmter Vektor des dualen Bündels eindeutig umkehrbar so zugeordnet werden kann, daß die Zusammensetzung der Kraftsysteme durch gewöhnliche Addition ihrer dualen Vektoren geleistet werden kann.* Es hindert nichts, diese Vektoren als Repräsentanten von Einzelkräften des dualen Bündels zu deuten, so daß wirklich *die Raumstatik auf die Bündelstatik übertragen wird.*

V. Die Abbildung der Motoren auf duale Vektoren.

12. Um den formulierten Gedanken durchzuführen, repräsentieren wir jedes Kraftsystem, jede Elementarbewegung und jeden Geschwindigkeitszustand nach Abschnitt II durch einen Motor und zeigen sodann¹⁶⁾, daß man den Motoren $\mathfrak{M}$ des Raumes Vektoren $\mathfrak{M}$ des dualen Bündels zuordnen kann, welche umkehrbar-eindeutig durch folgende drei Forderungen bestimmt sind:

1. *soll die Zuordnung der Motoren zu dualen Vektoren kovariant gegen Bewegungen des Raumes und des dualen Bündels sein;*
2. *soll gleichen Motoren derselbe Vektor zugeordnet sein und umgekehrt;*
3. *soll der Addition der Motoren die Addition der dualen Vektoren entsprechen.*

Diesen drei Forderungen wird man auf folgende Art gerecht: Wir repräsentieren zuerst den Motor auf alle möglichen Arten nach Abschnitt I durch äquivalente Paare geordneter Geraden: $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$, welche die Motorachse C normal schneiden und gleichen Winkel φ und Abstand $\bar{\varphi}$ haben. Diese Paare bilden wir nach dem Studyschen Übertragungsprinzip ab und

¹⁶⁾ Es ist bequem und unbedenklich, den Motor im Raum und seinen dualen Bündelvektor mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen.

erhalten die gleichwinkeligen, geordneten Paare dualer Einheitsvektoren (A, B) , welche den dualen Einheitsvektor C , das Bild der Motorachse, normal schneiden und somit der Normalebene zu C angehören. Ihr dualer Winkel ist $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$.

Diesen ∞^2 äquivalenten Vektorpaaren lassen sich nun leicht duale Vektoren koordinieren, welche den Forderungen 1. und 2. genügen; nämlich alle zu ihnen normalen, d. h. den Einheitsvektor C überdeckenden Vektoren $\mathfrak{M}^*$, deren (duale) Längen λ nur von der Öffnung ξ und Länge η des Motors $\mathfrak{M}$ abhängen:

$$(16) \quad \lambda = \lambda(\xi, \eta).$$

Der duale Einheitsvektor C ist:

$$(17) \quad C = \frac{[A B]}{\sin \Phi}.$$

Sämtliche Vektoren

$$(18) \quad \mathfrak{M}^* = \frac{[A B]}{\sin \Phi} \cdot \lambda(\xi, \eta)$$

genügen also den Forderungen 1. und 2.

13. Die richtige Form $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}^*$ ergibt sich (natürlich bis auf einen unwesentlichen reell-konstanten Faktor) eindeutig aus der Forderung 3. *Zunächst hat λ notwendig die Form:*

$$(19) \quad \lambda = (a\xi + b\eta) + \varepsilon(a'\xi + b'\eta), \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wenn nämlich zwei Motoren *koaxial* sind, dann addieren sich nach Abschnitt I bei Summierung ihre Öffnungen ξ und Längen η . Im dualen Bündel entsprechen ihnen zwei Vektoren gleicher Richtung, und bei deren Addition summieren sich die dualen Längen λ . Somit ist in der Tat λ eine (bis auf einen skalaren Faktor bestimmte) lineare homogene duale Funktion von ξ und η . — Wäre die Determinante (19) verschwindend, also $\lambda = (a\xi + b\eta)(1 + \varepsilon c)$, dann hätten je ∞^1 koaxiale Motoren mit gleichen Werten von $(a\xi + b\eta)$ denselben dualen Bildvektor, entgegen der Forderung 2. —

Zur Entscheidung, welches die möglichen Werte der in (19) auftretenden Konstanten sind, greift man auf einige weitere einfache *Beispiele* zurück. Nimmt man z. B. zwei Motoren mit normal-schneidenden Achsen, für deren Öffnung und Länge beide Male $(a\xi + b\eta) = 0$ wird, so folgt, daß der Summenmotor die Öffnung und Länge Null hätte, also selbst verschwindet, was nicht möglich ist. Also muß b oder a verschwinden. Letzterer Fall kann leicht ausgeschlossen werden durch das Beispiel eines Rotors der Öffnung ξ , dessen Achse die x_3 -Achse in der Höhe h trifft und der zur x_1 -Achse parallel ist. Für alle Werte von h ergäbe sich nämlich, in Widerspruch zur Forderung 2.,

derselbe Vektor. Man hat also die Form: $\lambda = \xi + \varepsilon (a' \xi + b' \eta)$, und das Beispiel zweier Rotoren mit windschiefen Achsen zeigt¹⁷⁾, daß zur Erfüllung der Forderung 3. $a' = 0$, $b' = 1$ sein muß. Es ist also *notwendig*:

$$(20) \quad \lambda = \xi + \varepsilon \eta = \operatorname{tg} \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}.$$

14. Der dem Motor $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$ zugeordnete duale Vektor ist somit:

$$\mathfrak{M} = \frac{[AB]}{\sin \Phi} \cdot (\operatorname{tg} \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}),$$

oder wegen $\operatorname{tg} \varphi + \varepsilon \bar{\varphi} = \sin \Phi : \cos \varphi$ und $\cos \varphi = ab$:

$$(21) \quad \boxed{\mathfrak{M} = \frac{[AB]}{ab}}.$$

Trägt man für A und B die Bedeutungen (2) und (11) ein, so ist:

$$(22) \quad \boxed{\mathfrak{M} = \frac{[ab]}{ab} + \varepsilon \frac{[a\bar{b}] + [\bar{a}b]}{ab}}.$$

Führen wir noch die Vektoren M und $\bar{M}$ ein durch die Formeln:

$$(23) \quad \boxed{M = \frac{[ab]}{ab}}, \quad \boxed{\bar{M} = \frac{[a\bar{b}] + [\bar{a}b]}{ab}},$$

dann folgt schließlich:

$$(24) \quad \boxed{\mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}}.$$

Wenn also überhaupt eine Zuordnung der Motoren $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$ des Raumes zu dualen Vektoren $\mathfrak{M}$ existiert, die den aufgestellten drei Forderungen genügt, dann ist dies *notwendig* jene, welche durch eine der (äquivalenten) Formeln (21), (22), (24) beschrieben wird¹⁸⁾.

Die erhaltene Form des dualen Vektors M ist nun in der Tat auch *hinreichend* für die Erfüllung der dritten Forderung.

15. Es seien zum Beweis $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Motoren, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ihr Summenmotor. Da die getroffene Zuordnung zu dualen Vektoren sicher kovariant gegen Bewegungen ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das Gemeinlot O der Achsen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in die x_3 -Achse falle. Da weiter auch die Forderung 2. bereits erfüllt ist, können wir setzen:

$$\mathfrak{A} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathfrak{B} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathfrak{C} = \overrightarrow{OC}.$$

¹⁷⁾ Wir unterdrücken die sehr einfache Rechnung, da eine ähnliche allgemeine sogleich durchzuführen ist.

¹⁸⁾ Aus der Homogenität der Formel (21) erhellt, daß die Wahl der auf die Geraden A und B gelegten Stäbe als Einheitsstäbe bedeutungslos ist und in Zukunft, wenn nötig, fallengelassen werden kann. Die Formel (21) deckt sich im Wesen mit Formel (18) auf S. 167 bei Mises, M. R.

Mittels der Grundvektoren $\mathbf{e}_i$ des Koordinatenkreuzes drücken sich die den Geraden O, A, B, C zugehörigen dualen Vektoren so aus:

$$(25) \quad \begin{cases} O = o + \varepsilon \bar{o} = \mathbf{e}_3, \\ A = a + \varepsilon \bar{a} = \sum_1^3 (a_i + \varepsilon \bar{a}_i) \mathbf{e}_i, \\ B = b + \varepsilon \bar{b} = \sum_1^3 (b_i + \varepsilon \bar{b}_i) \mathbf{e}_i, \\ C = c + \varepsilon \bar{c} = \sum_1^3 (c_i + \varepsilon \bar{c}_i) \mathbf{e}_i. \end{cases}$$

Den Motoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind nach (21) zugeordnet die dualen Vektoren:

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{[O A]}{o a} = \frac{-a_2 \mathbf{e}_1 + a_1 \mathbf{e}_2}{a_3} + \varepsilon \frac{-\bar{a}_2 \mathbf{e}_1 + \bar{a}_1 \mathbf{e}_2}{a_3}, \\ \mathfrak{B} = \frac{[O B]}{o b} = \frac{-b_2 \mathbf{e}_1 + b_1 \mathbf{e}_2}{b_3} + \varepsilon \frac{-\bar{b}_2 \mathbf{e}_1 + \bar{b}_1 \mathbf{e}_2}{b_3}, \\ \mathfrak{C} = \frac{[O C]}{o c} = \frac{-c_2 \mathbf{e}_1 + c_1 \mathbf{e}_2}{c_3} + \varepsilon \frac{-\bar{c}_2 \mathbf{e}_1 + \bar{c}_1 \mathbf{e}_2}{c_3}. \end{cases}$$

Dabei ist zufolge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$:

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{c_1}{c_3} = \frac{a_1}{a_3} + \frac{b_1}{b_3}, & \frac{c_2}{c_3} = \frac{a_2}{a_3} + \frac{b_2}{b_3}; \\ \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_3} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_3} + \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_3}, & \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_3} = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_3} + \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_3}. \end{cases}$$

Berechnen wir nun andererseits den auf geometrisch-konstruktivem Wege (nach Abschnitt I) gewonnenen Summenmotor $\mathfrak{C}$ der Motoren $\mathfrak{A} = \vec{OA}$ und $\mathfrak{B} = \vec{OB}$, sowie den ihm nach (21) zuzuordnenden dualen Vektor $\mathfrak{C}'$! Wir legen also nach Konstruktionsvorschrift Ebenen normal zu O :

$$x_3 = \gamma.$$

Sie schneiden die Geraden O, A, B in Punkten

$$o = (0, 0, \gamma); \quad a = \left(\frac{-\bar{a}_2 + \gamma a_1}{a_3}, \frac{\bar{a}_1 + \gamma a_2}{a_3}, \gamma \right); \quad b = \left(\frac{-\bar{b}_2 + \gamma b_1}{b_3}, \frac{\bar{b}_1 + \gamma b_2}{b_3}, \gamma \right).$$

Aus ihnen folgt durch die Parallelogrammkonstruktion der Punkt c :

$$(28) \quad c = \left(\frac{-\bar{a}_2 + \gamma a_1}{a_3} + \frac{-\bar{b}_2 + \gamma b_1}{b_3}, \frac{\bar{a}_1 + \gamma a_2}{a_3} + \frac{\bar{b}_1 + \gamma b_2}{b_3}, \gamma \right).$$

Er durchläuft, wenn γ variiert, die Endgerade C des Summenmotors $\mathfrak{C} = \vec{OC}$, darstellbar durch den Richtungsvektor $c' (c'_1, c'_2, c'_3)$ und Momentvektor $\bar{c}' (\bar{c}'_1, \bar{c}'_2, \bar{c}'_3)$ eines ihrer Stäbe:

$$(29) \quad \begin{cases} c'_1 = \frac{a_1}{a_3} + \frac{b_1}{b_3}, & c'_2 = \frac{a_2}{a_3} + \frac{b_2}{b_3}, & c'_3 = 1; \\ \bar{c}'_1 = \frac{\bar{a}_1}{a_3} + \frac{\bar{b}_1}{b_3}, & \bar{c}'_2 = \frac{\bar{a}_2}{a_3} + \frac{\bar{b}_2}{b_3}, & \bar{c}'_3 = -c'_1 \bar{c}'_1 - c'_3 \bar{c}'_2. \end{cases}$$

Der nach (21) dem Summenmotor entsprechende duale Vektor ist:

$$\mathfrak{C}' = \frac{-c'_2 \mathbf{e}_1 + c'_1 \mathbf{e}_2}{c'_3} + \varepsilon \frac{-\bar{c}'_2 \mathbf{e}_1 + \bar{c}'_1 \mathbf{e}_2}{c'_3}.$$

Er stimmt, wie ein Vergleich der Formeln (27) und (29) lehrt, in der Tat mit dem durch Vektoraddition erhaltenen dualen Vektor $\mathfrak{C}$ überein.

16. Damit ist gezeigt; *Es ist auf eine und nur eine Art möglich, einem durch die Raumgeraden A und B bestimmten Motor $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$ einen Vektor des dualen Bündels so zuzuordnen, daß alle drei oben formulierten Forderungen erfüllt sind. Dieser duale Vektor $\mathfrak{M}$ hat die Darstellung (21) = (22) = (24).*

Ist umgekehrt ein dualer Vektor $\mathfrak{M}$ gegeben, dann ist der zugehörige Motor $\mathfrak{M}$ eindeutig festgelegt. Es liefert nämlich der den Vektor überdeckende duale Einheitsvektor als sein Studysches Bild die Achse C des Motors und die duale Länge $\lambda = \xi + \varepsilon \eta$ des Vektors gibt seine Öffnung ξ und Länge η an.

VI. Einige Anwendungen.

17. Nach Formel (7) hat der duale Vektor $\mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}$ die Länge

$$(30) \quad \lambda = \xi + \varepsilon \eta = \sqrt{\mathfrak{M}^2} = \sqrt{(M + \varepsilon \bar{M})^2} = \sqrt{M^2} + \varepsilon \frac{M \cdot \bar{M}}{\sqrt{M^2}}.$$

Man findet daraus für seinen Motor als Öffnung ξ und Länge η :

$$(31) \quad \xi = \sqrt{M^2}, \quad \eta = \frac{M \cdot \bar{M}}{\sqrt{M^2}}.$$

Die Größe

$$(32) \quad k_m = \frac{\eta}{\xi} = \frac{M \cdot \bar{M}}{M^2}$$

heißt „*Parameter*“ des Motors. — Die Bedingungen

$$(33) \quad M \cdot \bar{M} = 0, \quad M \neq 0$$

charakterisieren jene dualen Vektoren, denen *Rotoren* entsprechen. Ihre duale Länge ist rein skalar. Analog gehören zu rein dualen Vektoren *Translatoren*.

Denken wir uns den Scheitel des dualen Bündels in den Koordinatenursprung gelegt. Dann ist einer dort angreifenden *Einzelkraft* K der sie im üblichen Sinne repräsentierende (reelle) Vektor zugeordnet. Es ist:

$$(34) \quad \mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M} = K, \quad \text{d. h.} \quad M = K, \quad \bar{M} = 0.$$

Analog entspricht einem *Kräftepaar*, das in üblicher Weise zum Vektor $\bar{K}$ gehört, der duale Vektor

$$(35) \quad \mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M} = \varepsilon \bar{K}, \quad \text{d. h.} \quad M = 0, \quad \bar{M} = \bar{K}.$$

18. Es folgt daraus die *Bedeutung der Teilvektoren* M und $\bar{M}$ der dualen Darstellung $\mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}$ etwa eines Kraftmotors: Das ihm zugehörige Kraftsystem läßt sich nämlich zerlegen in eine im Ursprung angreifende Einzelkraft vom Vektor M und in ein Kräftepaar vom Momentvektor $\bar{M}$. In der Statik heißt M „*Resultantvektor*“ des Kraftsystems. Er ist unabhängig

von der besonderen Wahl des Ursprungs. $\bar{M}$ wird „*Momentvektor*“ genannt. Er hängt von der Wahl des Ursprungs ab. Wir wollen diese Art der Zerlegung des Kraftsystems als seine „*Ursprungsreduktion*“ bezeichnen.

19. Hier ergibt sich nun sehr leicht der (noch ausstehende) *Beweis des grundlegenden Satzes, daß die Zusammensetzung zweier Kraftsysteme äquivalent ist der Addition ihrer Motoren*. Diese letzte ist nämlich äquivalent der Addition der zugeordneten dualen Vektoren $\mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}$, welche durch Addition der Vektoren M und $\bar{M}$ geleistet werden kann. Ihr entspricht im Raum die Addition der Resultant- und Momentvektoren der Kräftesysteme, also in der Tat die Zusammensetzung der Systeme selbst.

20. Man kann einen *Motor* $\mathfrak{M}$ in *kanonischer Weise* in einen *koaxialen Rotor* $\mathfrak{R}_m$ und einen *Translator* $\mathfrak{T}_m$ zerlegen. Dies geschieht am einfachsten so: Zu proportionalen dualen Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\sigma \mathfrak{M}$ gehören koaxiale Motoren. Darunter kommt auch der Rotor $\mathfrak{R}_m$ vor. Da er mit $\mathfrak{M}$ die gleiche Öffnung hat, ist sogar

$$\mathfrak{R}_m = (1 + \varepsilon h) \mathfrak{M} = (1 + \varepsilon h) (M + \varepsilon \bar{M}) = M + \varepsilon (\bar{M} + hM).$$

Dies ist ein Rotor, wenn (vgl. (33)) $M \cdot (\bar{M} + hM) = 0$, d. h. $h = -\frac{M \cdot \bar{M}}{M^2}$ ist.

Somit ist die *kanonische Zerlegung des Motors* $\mathfrak{M}$:

$$(36) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{R}_m + \mathfrak{T}_m \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_m = M + \varepsilon \left(\bar{M} - \frac{M \cdot \bar{M}}{M^2} \cdot M \right), \\ \mathfrak{T}_m = \varepsilon \frac{M \cdot \bar{M}}{M^2} \cdot M. \end{cases}$$

Hier ist das *duale Längenquadrat* des Vektors $\mathfrak{R}_m$ rein skalar, gleich M^2 . Daher ist

$$(37) \quad C_m = \frac{\mathfrak{R}_m}{\sqrt{\mathfrak{R}_m^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2}} \left[M + \varepsilon \left(\bar{M} - \frac{M \cdot \bar{M}}{M^2} \cdot M \right) \right]$$

der *duale Einheitsvektor*, welcher, dem Studyschen Übertragungsprinzip zufolge, der *Achse* C_m des *Motors* $\mathfrak{M}$ (oder des koaxialen Rotors $\mathfrak{R}_m$) entspricht.

VII. Elementare Motorrechnung.

21. Die Teilvektoren

$$(38) \quad M = \frac{[a \ b]}{a \ b} = \sum_1^3 M_i e_i,$$

$$(39) \quad \bar{M} = \frac{[a \ \bar{b}] + [\bar{a} \ b]}{a \ b} = \sum_1^3 \bar{M}_i e_i$$

des dualen Bildvektors $\mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}$ liefern uns den genauen Anschluß an jene Begründung der sogenannten *Motorrechnung*, wie sie von R. v. Mises

gegeben und in der Mechanik angewandt wurde. Mit Rücksicht auf die mechanische Bedeutung, die den Vektoren M und $\bar{M}$ für einen Kraftmotor zukommt, bezeichnet man nach v. Mises den Vektor M als den „Resultantvektor“, $\bar{M}$ als den „Momentvektor“ des Motors $\mathfrak{M}$. Ist dieser durch die Geraden A und B gegeben, $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AB}$, so hat der Resultantvektor die Richtung der von A nach B durchlaufenen Motorachse C , während seine Länge die Motoröffnung ist. Fällt man aus dem Ursprung o auf die Geraden A und B Normalebenen und schneidet diese mit B und A in Punkten b und a , dann ist der Verbindungsvektor dieser Punkte

$$(40) \quad b = \frac{[a \bar{b}]}{a \bar{b}}, \quad a = \frac{[b \bar{a}]}{a \bar{b}}$$

gerade der Momentvektor $\bar{M}$. Dies ist die v. Misessche geometrische Definition des Momentvektors. Der Motor kann also nach Angabe des Ursprungs o durch seinen Resultant- und Momentvektor in umkehrbar-eindeutiger Weise festgelegt werden.

22. Die einzelnen Schritte der elementaren Motorrechnung (Motorrechnung 1. Stufe) lassen sich identifizieren mit den elementaren Prozessen der dualen Vektorrechnung.

Es seien die beiden Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ im dualen Bündel repräsentiert durch die Vektoren:

$$(41) \quad \mathfrak{M} = M + \varepsilon \bar{M}, \quad \mathfrak{N} = N + \varepsilon \bar{N}.$$

Mit letzteren ist invariant gegen Bündeldrehungen ihr inneres Produkt verbunden, nämlich die duale Zahl:

$$(42) \quad \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = (M + \varepsilon \bar{M}) \cdot (N + \varepsilon \bar{N}) = M \cdot N + \varepsilon (M \cdot \bar{N} + \bar{M} \cdot N),$$

die wir auch als das innere Produkt der beiden Motoren bezeichnen wollen.

Deren Skalarmeil:

$$(43) \quad \sigma = M \cdot N = \sum_1^3 M_i N_i,$$

und Dualteil:

$$(44) \quad \bar{\sigma} = M \cdot \bar{N} + \bar{M} \cdot N = \sum_1^3 (M_i \bar{N}_i + \bar{M}_i N_i)$$

sind (dies eben ist der Sinn des Studyschen Übertragungsprinzips, wie er in unserer Forderung 1. beschlossen ist) Bewegungsinvarianten auch der beiden Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$.

Hier ist (43) eine triviale elementare Invariante der beiden Motoren, nämlich das Skalarprodukt ihrer Resultantvektoren. Sie hat bisher in der Motorrechnung wohl deshalb keine Bedeutung erlangt, weil ihr mechanisch kein erheblicher Begriff entspricht, falls man den Motoren mechanische Bedeutungen unterlegt.

Die Invariante (44) dagegen wird in der Misesschen Motorrechnung als das *skalare Produkt* der beiden Motoren bezeichnet. *Bedeutet $\mathfrak{M}$ einen Kraft-, $\mathfrak{N}$ einen Bewegungsmotor, dann gibt das skalare Produkt die Arbeit des Kraftsystems bei der Infinitesimalbewegung an*¹⁹⁾.

23. Es seien k_m und k_n die aus Formel (32) berechneten Parameter der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Dann lauten nach (37) die den Motorachsen C_m und C_n zugeordneten dualen Einheitsvektoren:

$$(45) \quad C'_m = \frac{M + \varepsilon(\bar{M} - k_m M)}{\sqrt{M^2}}, \quad C_n = \frac{N + \varepsilon(\bar{N} - k_n N)}{\sqrt{N^2}}.$$

Ihr inneres Produkt gibt, wenn φ den Winkel, $\bar{\varphi}$ den Lotabstand der Motorachsen bezeichnet:

$$(46) \quad C_m \cdot C_n = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi = \frac{M \cdot N + \varepsilon [M \cdot \bar{N} + \bar{M} \cdot N - (k_m + k_n) M \cdot N]}{\sqrt{M^2} \sqrt{N^2}}.$$

Wegen $\cos \varphi = \frac{M \cdot N}{\sqrt{M^2} \sqrt{N^2}}$ folgt daraus:

$$(47) \quad k_{mn} = \frac{M \cdot \bar{N} + \bar{M} \cdot N}{\sqrt{M^2} \sqrt{N^2}} = (k_m + k_n) \cos \varphi - \bar{\varphi} \sin \varphi.$$

Wir nennen im Anschluß an die Terminologie der *Ballschen Schrauben-theorie*²⁰⁾ (die der Sache nach mit der hier entwickelten Theorie der Motoren zusammenfällt) diese Invariante k_{mn} den *virtuellen Koeffizienten* oder, mit Lord Kelvin, die *Konkurrenz* der beiden Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Verschwindet k_{mn} , so heißen die Motoren *korreziprok*. Dies tritt im allgemeinen dann ein, wenn die Motorachsen einander normal schneiden, im besonderen auch dann, wenn sie sich schneiden, parallel oder identisch sind, die Parameter aber gegengleich sind.

Es ist:

$$(48) \quad \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = \sqrt{M^2} \sqrt{N^2} (\cos \varphi + k_{mn}).$$

Daraus folgt: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Achsen der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (die nicht beide Translatoren seien) einander normal schneiden, ist, daß $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = 0$ wird.

24. Das *äußere Produkt* der dualen Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (41) ist ein mit ihnen invariant gegen Bündeldrehungen verknüpfter Vektor

$$(49) \quad [\mathfrak{M} \mathfrak{N}] = [(M + \varepsilon \bar{M})(N + \varepsilon \bar{N})] = [MN] + \varepsilon \{[M \bar{N}] + [\bar{M} N]\}.$$

¹⁹⁾ Vgl. z. B. Study, G. d. D., S. 194; H. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, S. 85.

²⁰⁾ Vgl. R. S. Ball, H. Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme, Berlin 1889, S. 60, 79ff. Diese Invariante zweier Motoren ist im Wesen F. Kleins simultane Invariante zweier linearer Komplexe, deren Verschwinden ihre involutorische Lage bedeutet.

Ihm entspricht daher, dem Sinne unserer Forderung 1. gemäß, im Raume ein *Motor* $[\mathfrak{M}\mathfrak{N}]$, der mit den Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ *invariant* gegen Raumbewegungen verbunden ist. Bei Mises wird er als das *motorische Produkt* der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Wir wollen einfach von ihrem *äußeren Produkt* sprechen.

Die Frage nach der *mechanischen Bedeutung* des äußeren Produktes zweier Motoren, etwa eines Geschwindigkeitsmotors $\mathfrak{M}$ und eines Kraftmotors $\mathfrak{N}$, kann mittels des Studyschen Übertragungsprinzips sehr einfach erledigt werden. Da dieses nämlich Statik und Kinematik des Raums auf jene des Bündels überträgt, genügt es, nachzusehen, was die Bedeutung des äußeren Produktes aus dem Vektor $\mathfrak{M}$ einer im Bündel wirkenden Drehungsgeschwindigkeit (vom Betrage ξ_m) und einer im Bündel wirkenden Einzelkraft vom Vektor $\mathfrak{N}$ (der Intensität ξ_n) ist. Man faßt zu dem Zwecke eine im Zeitelement dt erfolgende infinitesimale Drehung um $\mathfrak{M}$ vom Winkelement $d\varphi = \xi_m dt$ ins Auge. Der mit dem drehenden System starr verbundene Kraftvektor $\mathfrak{N}$ kommt dann nach der infinitesimalen Drehung in eine neue Lage $\mathfrak{N}'$ (Fig. 2) und hat sich für einen ruhenden Beobachter um das Kraftelement $\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}$ geändert, dessen Richtung normal ist zur Verbindungsebene der Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (so, daß $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}$ ein Rechtssystem bilden) und dessen Intensität $\xi_m \xi_n \sin \gamma dt$ ist, wenn γ den Winkel von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bedeutet. Diese Änderung kann durch den im Bündel wirkenden Kraftvektor $[\mathfrak{M}\mathfrak{N}] \cdot dt$ dargestellt werden. Für die Zeiteinheit folgt so für das Bündel: Dreht sich die Einzelkraft $\mathfrak{N}$ mit der durch den Vektor $\mathfrak{M}$ repräsentierten Winkelgeschwindigkeit, dann ist für einen ruhenden Beobachter ihre Änderung in der Zeiteinheit durch den Vektor $[\mathfrak{M}\mathfrak{N}]$ dargestellt. — Im Raume gilt daher vermöge des Studyschen Übertragungsprinzips:

Ist der Kraftmotor $\mathfrak{N}$ mit einem System starr verbunden, das sich mit dem Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{M}$ bewegt, dann ist für einen ruhenden Beobachter seine Änderung in der Zeiteinheit gegeben durch den Motor $[\mathfrak{M}\mathfrak{N}]$.

Ebenso kann man zeigen: *Ist $\mathfrak{N}$ der Geschwindigkeitsmotor eines bewegten starren Körpers, $\mathfrak{M}$ ein fester Motor, dann bedeutet $[\mathfrak{M}\mathfrak{N}]$ den scheinbaren Zuwachs, den der Motor $\mathfrak{M}$ in der Zeiteinheit erfährt, wenn er vom bewegten Körper aus betrachtet wird.* — Beide (äquivalente) Deutungen des äußeren Produktes rühren von R. v. Mises her. Der dargelegte einfache Beweis ist wohl neu.

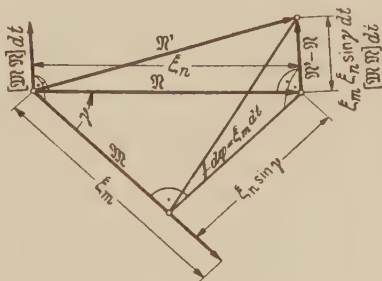


Fig. 2

25. Für das innere und äußere Produkt von Motoren gelten alle *Rechenregeln* der elementaren Vektorrechnung. Insbesondere ist:

$$(50)^{21)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] = \mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{C} \mathfrak{A}] = \mathfrak{C} \cdot [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = [\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}], \\ [\mathfrak{A} [\mathfrak{B} \mathfrak{C}]] = (\mathfrak{A} \mathfrak{C}) \mathfrak{B} - (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C}, \\ [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C} \mathfrak{D}] = (\mathfrak{A} \mathfrak{C}) (\mathfrak{B} \mathfrak{D}) - (\mathfrak{A} \mathfrak{D}) (\mathfrak{B} \mathfrak{C}), \\ [[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] [\mathfrak{C} \mathfrak{D}]] = \mathfrak{C} [\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{D}] - \mathfrak{D} [\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}]. \end{array} \right.$$

Die letzten beiden Formeln lauten nicht so in der Misesschen Motorrechnung²²⁾, was in der unterschiedlichen Definition des inneren und des skalaren Motorprodukts begründet ist.

26. Zur geometrischen Festlegung des äußeren Produkts zweier Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, die nicht beide Translatoren sind, bestimmen wir Achse, Öffnung und Länge des Produktmotors.

Die Achse des Produktmotors $[\mathfrak{M} \mathfrak{N}]$ ist *Gemeinlot der Achsen der Motoren* $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Der Beweis liegt analytisch in den Formeln $\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{M} \mathfrak{N}] = 0$, $\mathfrak{N} \cdot [\mathfrak{M} \mathfrak{N}] = 0$, begrifflich folgt er nach dem Studyschen Übertragungsprinzip aus der Tatsache, daß im dualen Bündel der auf $[\mathfrak{M} \mathfrak{N}]$ liegende Einheitsvektor *Gemeinlot der Einheitsvektoren auf* $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ist.

Die *Öffnung* ξ und *Länge* η des äußeren Produktmotors ergeben sich leicht als Real- und Dualteil der Länge seines dualen Vektors $[\mathfrak{M} \mathfrak{N}]$. Bedeutet $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ den dualen Winkel der Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (oder der sie überdeckenden dualen Einheitsvektoren C_m und C_n), d. h. ist φ der Winkel, $\bar{\varphi}$ der Lotabstand der Achsen C_m und C_n der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, dann wird, unter Beachtung von (9) und (30), die duale Länge von $[\mathfrak{M} \mathfrak{N}]$:

$$(51) \quad \begin{aligned} \xi + \varepsilon \eta &= \sqrt{[\mathfrak{M} \mathfrak{N}]^2} = \sqrt{\mathfrak{M}^2} \sqrt{\mathfrak{N}^2} \sin \Phi \\ &= \left(\sqrt{\mathfrak{M}^2} + \varepsilon \frac{\mathfrak{M} \cdot \bar{\mathfrak{M}}}{\sqrt{\mathfrak{M}^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{\mathfrak{N}^2} + \varepsilon \frac{\mathfrak{N} \cdot \bar{\mathfrak{N}}}{\sqrt{\mathfrak{N}^2}} \right) \cdot (\sin \varphi + \varepsilon \bar{\varphi} \cos \varphi) \\ &= \sqrt{\mathfrak{M}^2} \cdot \sqrt{\mathfrak{N}^2} \left[\sin \varphi + \varepsilon \left\{ \bar{\varphi} \cos \varphi + \sin \varphi \left(\frac{\mathfrak{M} \cdot \bar{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{M}^2} + \frac{\mathfrak{N} \cdot \bar{\mathfrak{N}}}{\mathfrak{N}^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Führt man nach Formel (32) die Parameter k_m und k_n der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ein, so erhält man nach Sonderung von Real- und Dualteil:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{\mathfrak{M}^2} \cdot \sqrt{\mathfrak{N}^2} \sin \varphi, \\ \eta = \sqrt{\mathfrak{M}^2} \cdot \sqrt{\mathfrak{N}^2} [\bar{\varphi} \cos \varphi + \sin \varphi (k_m + k_n)]. \end{array} \right.$$

²¹⁾ $[A B C]$ stellt eine *Invariante* der drei Motoren A, B, C dar. Sie zerfällt durch Sonderung von Real- und Dualteil in zwei elementare Invarianten, welche sich bereits bei Study, G. d. D., § 17, Formel (34), (35) und § 18, Formel (18), (19) finden. Die geometrische Deutung ihres Verschwindens findet sich im wesentlichen bei E. A. Weiss, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik, Leipzig-Berlin 1935, § 28. — Die Vektoridentität $[A [B C]] + [B [C A]] + [C [A B]] = 0$ liefert im Wesen den bekannten Satz von Petersen und Morley (vgl. E. A. Weiss, § 25, 27; Study, G. d. D., S. 107).

²²⁾ Mises, M. R., I/9.

Der *Parameter* k des Produktmotors ist daher:

$$(53) \quad k = \frac{\eta}{\xi} = \bar{\varphi} \cot \varphi + (k_m + k_n).$$

27. Wir leiten noch zwei Darstellungen der Motorprodukte, die Verallgemeinerungen v. Misesscher Resultate sind, her.

Wir bestimmen zunächst den Motor, der die Achsen C_m und C_n der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ als Anfangsgerade und Endgerade besitzt. Der ihm zugehörige duale Vektor ist nach Formel (21) und (37):

$$(54) \quad \frac{[C_m C_n]}{M N} = \frac{[M N]}{M N} + \varepsilon \frac{[M \bar{N}] + [\bar{M} N] - (k_m + k_n)[M N]}{M N}.$$

Wir bezeichnen den *Momentvektor* dieses „Achsenmotors“ von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ mit D :

$$(55) \quad D = \frac{[M \bar{N}] + [\bar{M} N] - (k_m + k_n)[M N]}{M N}.$$

Es ist:

$$(56) \quad [M \bar{N}] + [\bar{M} N] = (k_m + k_n)[M N] + D(M N),$$

und somit:

$$(57) \quad [\mathfrak{M} \mathfrak{N}] = [M N] + \varepsilon \{ (k_m + k_n)[M N] + D(M N) \}.$$

Ferner berechnet man unter Anwendung der Formel (32):

$$(58) \quad D[M N] = (k_m + k_n)(M N) - (M \bar{N} + \bar{M} N),$$

und daraus:

$$(59) \quad \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = (M N) + \varepsilon \{ (k_m + k_n)(M N) - D[M N] \}.$$

Die Formeln (57) und (59) sind die angekündigten neuen Darstellungen des äußeren und inneren Produkts der Motoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Legt man im besonderen den (in die Definition des Momentvektors D eingehenden) Bezugspunkt o auf das Gemeinlot O der beiden Motorachsen, dann wird aus dem Momentvektor D der Verbindungsvektor der Schnittpunkte von O mit den Motorachsen, und unsere Formeln gehen über in zwei speziellere, von Mises²³⁾ angegebene, invariante Darstellungen der beiden Motorprodukte.

Auf eine mit unseren Hilfsmitteln sehr einfach zu gestaltende Theorie der ein- und mehrdimensionalen Motorketten sei an dieser Stelle nur hingewiesen.

28. Ein wesentlicher Vorteil der hier gegebenen Begründung der Motorrechnung liegt darin, daß die *Bewegungsinvarianz* der erhaltenen Bildungen in Raume sofort auf Grund des Studyschen Übertragungsprinzips geschlossen

²³⁾ Mises, M. R., I/8.

lative Umformung wird z. B. durch das bekannte Mayor-Misessche Verfahren²⁴⁾ gegeben. Der allgemeine Begriff der korrelativen Kräfte-ttransformation findet sich bei R. Sauer²⁵⁾.

$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ ist dann ein Gleichgewichtssystem von Kräften eines Bündels. Die Gleichgewichtsbedingungen (60) definieren ein (nach beliebiger Wahl von S_1 konstruierbares) „Seilsystem“ $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n$. Es gilt, dual zu vorhin, der Satz: Die Verbindungsebenen $[\mathfrak{S}_i \mathfrak{S}'_i]$ entsprechender Wirkungslinien $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}'_i$ zweier Seilsysteme desselben Gleichgewichtssystems von Bündelkräften schneiden sich in einer Geraden g . Was man auch so aussprechen kann: „Die Gemeinlote $n_1, n_2, \dots, n_n$ entsprechender Wirkungslinienpaare $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}'_i$ zweier Seilsysteme desselben Gleichgewichtssystems von Bündelkräften schneiden eine Gerade g normal, d. h. besitzen selbst wieder ein Gemeinlot g .“

31. Dieser Satz gilt in jedem, also auch im dualen Bündel. Das Studysche Übertragungsprinzip überträgt ihn jetzt sofort auf den Raum.

Wir müssen dabei die folgenden Tatsachen beachten: 1. Ist der duale Vektor $\mathfrak{R}$ das Bild des Kraftmotors gleichen Namens, dann ist der ihn überdeckende duale Einheitsvektor das Studysche Bild der Achse des zugehörigen Kraftsystems. — 2. Normale duale Vektoren sind daher Bilder von Kraftsystemen mit normal-schneidenden Achsen.

Der Übertragung zufolge sei nun gegeben: Eine Gleichgewichtsfigur von räumlichen Kräftesystemen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$. Eine Figur von Kräftesystemen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n$ soll ferner eine „Seilfigur“ heißen, wenn die Gleichgewichtsbedingungen (60) bestehen. Sie ist nach willkürlicher Wahl von $\mathfrak{S}_1$ eindeutig festgelegt. Dann gilt für zwei solche Seilsysteme $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}'_i$ bzw. für die Hauptachsen h_i und h'_i der an ihnen beteiligten Kraftsysteme $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}'_i$ als Übertragung des vorhin für das Bündel formulierten Ergebnisses der Satz:

„Die Gemeinlote n_i der Hauptachsen h_i, h'_i entsprechender Paare $[\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}'_i]$ von Kraftsystemen zweier Seilfiguren $(\mathfrak{S}_i)$ und $(\mathfrak{S}'_i)$ einer Gleichgewichtsfigur räumlicher Kraftsysteme $\mathfrak{R}_i$ besitzen selbst wieder ein Gemeinlot g .“

Dies ist die angekündigte Verallgemeinerung des Culmannschen Satzes auf die Raumstatik. Das gefundene Gemeinlot g ist die auf den Raum übertragene Culmannsche Gerade. Der ursprüngliche Satz von Culmann ist als Sonderfall darin enthalten, desgleichen eine schwächere (nicht immer existente) von R. v. Mises gegebene Ausdehnung auf den Raum²⁶⁾.

²⁴⁾ R. v. Mises, Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 64 (1917), S. 209—232; E. Kruppa, Über die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme, ZAMM. 4 (1924), S. 146—155.

²⁵⁾ R. Sauer, Projektive Liniengeometrie, Berlin-Leipzig 1937, Nr. 19, 20.

²⁶⁾ Mises, M. R., I/6.

Bemerkungen über gewisse Zahlfolgen.

Von

R. Sprague in Berlin-Charlottenburg.

1. Es handelt sich hier um Folgen der Form $[n \cdot \xi]$, wobei $\xi > 1$ eine irrationale Zahl bedeutet, n die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen soll und mit $[x]$ die durch $g \leq x < g + 1$ bestimmte ganze Zahl g bezeichnet wird.

Die Untersuchung gilt der Frage, ob eine Folge $[n \cdot \alpha]$ nicht-triviale Teilfolgen $[n \cdot \beta]$ haben kann, d. h. solche, in denen β kein Vielfaches von α ist.

Die Antwort wird im Falle $\alpha > 2$ verneinend (Satz 1), im Falle $\alpha < 2$ bejahend lauten (Satz 2). Zum Beispiel erweist sich $[n \cdot (1 + \sqrt[3]{2})]$ als Teilfolge von $[n \cdot \sqrt[3]{2}]$; mit andern Worten: wenn zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ein Vielfaches von $1 + \sqrt[3]{2}$ liegt, so befindet sich dort auch ein Vielfaches von $\sqrt[3]{2}$.

Den Schluß bildet ein Satz, der mit der Annäherung irrationaler Zahlen durch rationale zusammenhängt.

2. Satz 1. Ist $\alpha \geq 2$ und $[n \cdot \beta]$ eine Teilfolge von $[n \cdot \alpha]$, so ist β ein Vielfaches von α .

Beweis. Aus

$$[\beta] = [m \cdot \alpha]$$

mit positivem ganzen m folgt gleichzeitig

$$2 \cdot [\beta] \leq 2 \cdot \beta < 2 \cdot [\beta] + 2$$

und

$$2 \cdot [\beta] \leq 2 \cdot m \cdot \alpha < 2 \cdot [\beta] + 2.$$

Dann ist auch

$$[2 \cdot \beta] = [2 \cdot m \cdot \alpha],$$

weil in jenen Grenzen, wegen $\alpha \geq 2$, nur ein Vielfaches von α liegen kann und andererseits doch

$$[2 \cdot \beta] = [x \cdot \alpha]$$

mit positivem ganzen x lösbar sein soll.

Wiederholte Anwendung dieser Schlußweise führt zu

$$[2^n \cdot \beta] = [2^n \cdot m \cdot \alpha], \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Daher ist

$$|\beta - m \cdot \alpha| < \frac{1}{2^n},$$

also

$$\beta = m \cdot \alpha.$$

3. Hilfssatz. Ist $\alpha > 1$ irrational, so besteht jede der Folgen $[n \cdot \alpha]$ und $\left[n \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ gerade aus denjenigen natürlichen Zahlen, die in der andern Folge fehlen

Beweis. Es sei k eine beliebige natürliche Zahl. Dann beträgt die Anzahl der Glieder in der Folge $[n \cdot \alpha]$, welche kleiner als k sind, $\left[k \cdot \frac{1}{\alpha}\right]$.

Da mit α auch $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ irrational und größer als 1 ist, gibt der entsprechende Ausdruck $\left[k \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$ die Anzahl der Glieder unterhalb k für die Folge $\left[n \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ an.

Bezeichnet man zur Abkürzung die Summe

$$\left[k \cdot \frac{1}{\alpha}\right] + \left[k \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$$

beider Anzahlen mit s_k , so gilt

$$k \cdot \frac{1}{\alpha} + k \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} - 2 < s_k < k \cdot \frac{1}{\alpha} + k \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha},$$

oder

$$k - 2 < s_k < k,$$

also

$$s_k = k - 1.$$

Weil $s_{k+1} - s_k = 1$ ist, kommt k , und darum jede natürliche Zahl, in einer und nur einer der Folgen $[n \cdot \alpha]$ und $\left[n \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ vor (und zwar genau einmal). Daraus folgt die Behauptung.

4. Aus dem Hilfssatz schließt man für irrationale Zahlen $\alpha > 1$, $\beta > 1$ unmittelbar:

Wenn $[n \cdot \beta]$ eine Teilfolge von $[n \cdot \alpha]$ ist, so stellt auch $\left[n \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ eine Teilfolge von $\left[n \cdot \frac{\beta}{\beta-1}\right]$ dar, und umgekehrt.

Nun bildet offensichtlich $\left[n \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}\right]$ dann eine Teilfolge von $\left[n \cdot \frac{\beta}{\beta-1}\right]$, wenn

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} = (l+1) \cdot \frac{\beta}{\beta-1}$$

ist und l eine natürliche Zahl bedeutet. Das ergibt

$$\beta = \frac{\alpha}{l+1-l\cdot\alpha}.$$

In diesem Falle ist also auch $[n \cdot \beta] = \left[n \cdot \frac{\alpha}{l+1-l\cdot\alpha} \right]$ eine Teilfolge von $[n \cdot \alpha]$, wofern noch die Voraussetzung $\beta > 1$ erfüllt wird (mit α ist auch β irrational).

Diese Bedingung erfordert

$$\alpha > l + 1 - l \cdot \alpha > 0,$$

d. h.

$$l < \frac{1}{\alpha - 1},$$

und, wegen $l \geq 1$,

$$\alpha < 2.$$

Hierdurch ist bewiesen:

Satz 2. Ist α irrational, $1 < \alpha < 2$ und $l < \frac{1}{\alpha - 1}$ eine natürliche Zahl, so bildet $\left[n \cdot \frac{\alpha}{l+1-l\cdot\alpha} \right]$ eine Teilfolge von $[n \cdot \alpha]$.

Im Falle $\alpha = \sqrt{2}$ wird $l \leq 2$. Mit $l = 1$ erhält man das Beispiel von 1.; für $l = 2$ erweist sich auch $[n \cdot (4 + 3 \cdot \sqrt{2})]$ als Teilfolge von $[n \cdot \sqrt{2}]$.

5. Eine naheliegende Verallgemeinerung des Hilfssatzes gewinnt man durch Multiplikation der dort auftretenden Zahlenfolgen $n \cdot \alpha$, $n \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}$, $n \cdot 1$ mit irgendeiner positiven Zahl γ . Entsprechend liegt dann

einerseits: zwischen zwei Vielfachen von $\alpha \cdot \gamma$ und $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\alpha - 1}$ stets ein Vielfaches von γ ,

andererseits: zwischen zwei Vielfachen von $\alpha \cdot \gamma$ und γ , deren Abstand kleiner ist als γ , niemals ein Vielfaches von $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\alpha - 1}$.

Beide Bemerkungen lassen sich, mit anderer Bezeichnung, zusammenfassen in dem folgenden

Satz 3. Ist $\frac{\alpha}{\beta}$ irrational und $\alpha > \beta > 0$, so liegt zwischen zwei beliebigen Vielfachen von α und β stets (mindestens) ein Vielfaches von $\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}$, dagegen zwischen zwei um weniger als β voneinander entfernten Vielfachen von α und β niemals ein Vielfaches von $\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha - \beta}$.

(Eingegangen am 30. November 1937.)

Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen mit halbfiniten Koeffizientenmatrix *).

Von

Bruno Ritzdorff in Bonn.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.	23
---------------------	----

Kapitel I.

Verallgemeinerung der Transformation von Lagrange.

A. Unter besonderen Voraussetzungen	27
B. Die vorbereitenden Transformationen	31
C. Der allgemeine Fall	34

Kapitel II. Der Reduktionssatz.

A. Erklärung der Begriffe	36
B. Ein besonders einfacher Fall des Reduktionssatzes	38
C. Beweis des Reduktionssatzes im allgemeinen Fall	39

Kapitel III.

Nachweis eines kanonischen Systems von Normalformen.

A. Hilfssätze für die weitere Reduktion	43
B. Bezeichnungen	44
C. Weitere Reduktion der Normalformen	45
D. Nachweis der Inkongruenz der restlichen Normalformen	49

Einleitung.

In der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen und in den neueren Fortsetzungen dieser Theorie, insbesondere durch J. v. Neumann, hat die Spektraltheorie im Vordergrund gestanden, also diejenige Theorie, die als Analogon des Hauptsachsentheorems der quadratischen Formen von n Veränderlichen anzusehen ist. Dagegen

*) Diese Arbeit ist von der Philosophischen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn als Dissertation (D. 5) angenommen worden.

hatte das innerhalb der Algebra von n Veränderlichen elementarere Trägheitsgesetz der quadratischen Formen zunächst kein Analogon für unendlichviele Veränderliche gefunden. Erst vor wenigen Jahren bemerkte A. Wintner¹⁾, daß man jede im Hilbertschen Sinne beschränkte reelle quadratische Form, die intakt²⁾ ist, durch eine reelle intakte Transformation der Veränderlichen

in eine Form $\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i^2$ überführen kann, wo die d_i nur die Werte $+1$, -1 oder 0 haben, und weiter, daß zwei solche Diagonalformen dann und nur dann ineinander transformierbar sind, wenn die Mengen der unter ihren Koeffizienten vorkommenden $+1$, -1 , 0 bei beiden je die gleiche Kardinalzahl haben. G. Köthe³⁾ hat dann entdeckt, daß jede, auch nicht-intakte, beschränkte reelle quadratische Form einer Form $\mathfrak{D}$ kongruent⁴⁾ ist, wobei es aber nicht mehr angängig ist, die Werte der d_i auf $+1$, -1 , 0 zu beschränken, und hat die einfachen Bedingungen angegeben, unter denen zwei Formen vom Typus $\mathfrak{D}$ kongruent sind. Auch seine Beweise beruhen wie die Wintnerschen auf der Spektraltheorie, wenn er auch aus dieser lediglich den Satz von F. Riesz benutzt, daß jede reelle quadratische Form die Differenz zweier definiten ist.

In der vorliegenden Arbeit, deren Entwurf entstanden war, bevor Köthes Resultate vorhanden waren, sollte das Trägheitsgesetz nicht im Hilbertschen Raum, sondern in anderen linearen Koordinatenräumen⁵⁾, die einfacher sind, studiert werden. Abgesehen von dem Interesse, das die hier zu erwartenden Resultate an sich bieten würden, war das fernere Ziel, von diesen Studien aus besser ausgerüstet an den Hilbertschen Raum herantreten zu können. Dieses Ziel ist nun nicht etwa durch Köthes überraschendes Resultat weggefallen. Denn gerade, weil dieses Resultat so einfach ist, läßt es den Wunsch offen, eine Herleitung ohne Benutzung der Spektraltheorie, mit elementaren Mitteln, zu finden, wie ja auch bei n Veränderlichen das Trägheitsgesetz ohne Benutzung des Hauptachsentheorems bewiesen wird. Indem nun in der Tat die vorliegende Arbeit mit *völlig elementaren* Mitteln das Trägheitsgesetz im

¹⁾ Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 254—263.

²⁾ Eine Matrix (Transformation) des Matrizenringes M heißt intakt, wenn sie in M eine eindeutige Reziproke besitzt.

³⁾ Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 137—152.

⁴⁾ Dies ist das kurze Wort von Frobenius [Journ. f. Math. **84** (1877), S. 22] für das Vorhandensein einer reellen intakten Transformation der einen quadratischen Form in die andere.

⁵⁾ Wegen der Theorie dieser Räume vgl. Köthe-Toeplitz, Journ. f. Math. **171** (1934), S. 193—226; die vorliegende Arbeit benutzt allerdings diese Theorie nicht, sondern stützt sich lediglich auf die vorausgehende Arbeit derselben beiden Autoren über halbfinite Matrizen, Journ. f. Math. **165** (1931), S. 116—127.

halbfiniten⁶⁾ Raum aufstellt und beweist, darf sie auch jetzt noch als methodische Vorbereitung auf jenes fernere Ziel betrachtet werden.

Bei der Übertragung der Theorie der quadratischen Formen vom Hilbertschen Raum auf andere lineare Koordinatenräume ergibt sich auf den ersten Blick eine Schwierigkeit, die darin begründet ist, daß bei keinem anderen unendlichen linearen Koordinatenraum außer dem Hilbertschen der zugehörige Matrizenring mit jeder Matrix $\mathfrak{P}$ stets auch die transponierte $\mathfrak{P}'$ enthält⁷⁾. Und deshalb ist es nicht ohne weiteres klar, wie in diesen Räumen die Definition der Kongruenz zweier Formen, die im Hilbertschen Raum $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ lautet und die der Symmetrie der Formen, die dort $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ lautet, zu fassen ist. Es gibt zwei Wege, um dieses Hindernis zu überwinden, von denen mir der eine von Herrn Köthe, der andere von Herrn Toeplitz gewiesen wurde; beide laufen letzten Endes auf dasselbe hinaus.

Bei dem einen Weg betrachtet man nicht *solche* quadratische Formen, deren Matrix dem zum Raum λ gehörigen Matrizenring angehört, sondern *solche*, deren Matrix einer linearen Transformation entspricht, die den Raum λ in den dualen Raum λ^* oder einen Teil davon überführt. (Nur beim Hilbertschen Raum, dem einzigen, der gleich seinem dualen ist, fällt beides zusammen.) Da die Gesamtheit dieser Matrizen mit $\mathfrak{A}$ stets auch $\mathfrak{A}'$ enthält, kann die Definition der Symmetrie $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ ohne weiteres übernommen werden. Die Definition der Kongruenz dagegen muß lauten: $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{P}$ den Raum λ und daher $\mathfrak{P}'$ den Raum λ^* intakt in sich überführt. Bedeutet z. B. λ den finiten Raum φ , so ist λ^* der Gesamttraum ω ; jede *beliebige* Matrix führt φ in ω über. Demgemäß werden in diesem Falle quadratische Formen betrachtet, deren Koeffizientenmatrix eine ganz *beliebige* symmetrische, reelle Matrix ist; zwei solche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen kongruent, wenn es eine *zeilenfinit* intakte Matrix $\mathfrak{P}$ gibt, so daß $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ wird. Bedeutet λ den Gesamttraum ω , so ist $\lambda^* = \varphi$, so daß hier Formen mit endlicher Koeffizientenmatrix behandelt werden; das Trägheitsgesetz für endliche Formen erscheint also hier als Spezialfall unseres Problems.

Der andere Weg faßt nur solche Räume $\mu = \lambda + \lambda^*$ ins Auge, die aus einem Raum λ und seinem dualen λ^* zusammengesetzt sind, d. h. die Stellen haben die Gestalt

$$\mathfrak{x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \mid x_1, x_2, \dots),$$

wo $(x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots)$ eine Stelle aus λ und $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ eine Stelle aus λ^*

⁶⁾ Der Begriff „halbfinit“, der im übernächsten Absatz dieser Einleitung genauer erklärt wird, wurde von Köthe u. Toeplitz in der in Fußnote ⁵⁾ genannten Arbeit, Journ. f. Math. 165, eingeführt.

⁷⁾ Dies folgt aus der genannten Arbeit Journ. f. Math. 171 (1934), S. 206 (§ 6, Satz 4) und S. 216 (§ 12, Satz 2).

ist. (Ein Beispiel dafür ist eben unser halbfiniter Raum $\varphi + \omega = \psi$, bei dem die $x_0, x_{-1}, \dots$ nur endlich viele Nichtnullen enthalten, während $x_1, x_2, \dots$ völlig beliebig sind.) Die zu einem solchen Raum $\lambda + \lambda^* = \mu$ gehörigen Matrizen haben die Gestalt

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1, -1} & a_{-1, 0} & a_{-1, 1} & a_{-1, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{0, -1} & a_{0, 0} & a_{0, 1} & a_{0, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{1, -1} & a_{1, 0} & a_{1, 1} & a_{1, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{2, -1} & a_{2, 0} & a_{2, 1} & a_{2, 2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix},$$

wo sich die einzelnen Bestandteile folgendermaßen beschreiben lassen: ${}^*\mathfrak{A}$ ist die Matrix einer Substitution, die λ in sich überführt, $\mathfrak{A}_*$ die einer solchen, die λ^* in sich überführt, ${}_*\mathfrak{A}$ die einer solchen, die λ in λ^* überführt, endlich $\mathfrak{A}^*$ die einer solchen, die λ^* in λ überführt. Um nun in diesen Räumen quadratische Formen einzuführen, bezeichne man mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ die Stelle $(\dots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0 | \tilde{x}_1, \dots)$, wo $\tilde{x}_i = x_{-i+1}$ ist, also

$$\tilde{\mathfrak{x}} = (\dots, x_2, x_1 | x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots);$$

dann existiert, da $\tilde{\mathfrak{x}}$ in $\mu^* = \lambda^* + \lambda$ liegt, $\tilde{\mathfrak{x}}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{A})\mathfrak{x} = \sum_{x, \lambda=-\infty}^{+\infty} a_{x, \lambda} \tilde{x}_x x_\lambda$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus μ . An Stelle der Symmetrie an der Hauptdiagonalen ist hier sinngemäß $a_{x, \lambda} = a_{-\lambda+1, -x+1}$ zu fordern, d. h. Symmetrie an der Nebendiagonalen. Tut man das, so wird die so entstandene Form durch jede intakte lineare Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{P}\eta$, die μ in sich überführt, in eine Form $\eta(\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\eta = \tilde{\eta}\mathfrak{B}\eta$ der gleichen Art übergeführt³⁾. Während also bei dem ersten Weg die Symmetrie in der herkömmlichen Weise bestehen bleibt, haben wir hier die veränderte Symmetrieforderung; dagegen gehörten bei der Kongruenzdefinition des ersten Weges in $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ die Matrizen $\mathfrak{P}', \mathfrak{A}, \mathfrak{P}$ alle verschiedenen Matrixsystemen an, wogegen beim zweiten Wege in $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ die Matrizen $\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \mathfrak{P}$ wie beim Hilbertschen Raum alle dem nämlichen Ring angehören.

In Wahrheit ist es gleichbedeutend, ob man den ersten Weg für λ und λ^* getrennt durchführt, woraus dann leicht die Theorie für $\lambda + \lambda^*$ im Sinne des zweiten Weges abzuleiten ist, oder ob man für $\lambda + \lambda^*$ den zweiten Weg durchführt und daraus für λ, λ^* einzeln die Theorie im Sinne des ersten Weges folgert.

Indem die vorliegende Untersuchung sich in dem halbfiniten Raume $\varphi + \varphi^* = \varphi + \omega = \psi$ bewegt, hält sie sich der Form nach an den zweiten Weg. Hier, im Raum ψ , liegt die volle Auflösungstheorie der linearen

³⁾ $\tilde{\mathfrak{P}}$ entsteht aus $\mathfrak{P}$ durch Spiegelung an der Nebendiagonalen.

Gleichungssysteme vor ⁹⁾, und auf diese gestützt ist es möglich, das Trägheitsgesetz völlig zu bewältigen. Das Ergebnis ist folgendes: Jede bezüglich der Nebendiagonalen symmetrische, reelle, halbfiniten Matrix ist kongruent zu einer vom Typus

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{N}}_* & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{N}_* \end{pmatrix},$$

wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente nur die Werte $+1$, -1 , 0 haben, wo $\mathfrak{N}_*$ eine Einsermatrix ist, d. h. eine Matrix, die in jeder Reihe höchstens eine $+1$ enthält, sonst nur Nullen und wo $\tilde{\mathfrak{N}}_*$ aus $\mathfrak{N}_*$ durch Spiegelung an der Nebendiagonalen der Gesamtmatrix hervorgeht (Kap. II). Mit einem großen deutschen $\mathfrak{D}$ soll dabei hier wie auch im folgenden eine Nullmatrix bezeichnet werden, d. h. eine solche, deren Elemente alle Null sind. Diese Normalform wird in Kap. III noch weiter reduziert auf einen von acht Typen (vgl. S. 46–48), und dann wird gezeigt, daß keine zwei Matrizen aus diesen acht Typen kongruent sind. Dieser letztere Nachweis hat am meisten neue Gedankengänge erfordert. Das vorbereitende Kap. I beruht auf einem bekannten Hilfssatz von Frobenius¹⁰⁾, den auf *unendliche* symmetrische Matrizen zu übertragen ebenfalls eine gewisse Schwierigkeit dargestellt hat.

Kapitel I.

Verallgemeinerung der Transformation von Lagrange.

A. Unter besonderen Voraussetzungen.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende

Satz 1 ¹¹⁾: *Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche symmetrische Matrix*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

und gibt es in der Folge ihrer Abschnittsdeterminanten $A_1, A_2, \dots$, wo

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

⁹⁾ Siehe die in Fußnote ⁵⁾ erwähnte Arbeit, Journ. f. Math. 165.

¹⁰⁾ Journ. f. Math. 114 (1895), S. 193.

¹¹⁾ Zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen sei an dieser Stelle die Festsetzung getroffen, daß alle in dieser Arbeit vorkommenden Größen reell sein sollen.

ist, eine unendliche Teilfolge von nicht verschwindenden Determinanten, so gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{B}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{B}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{U} \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$$

wird, wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$, ($i = 1, 2, \dots$) ist¹²⁾.

Zum Beweis werde ich zeigen, daß es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{U}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{U}^{-1}$ und eine solche Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ der oben beschriebenen Art gibt, so daß

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{D} \mathfrak{U} = \mathfrak{A}$$

wird. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}$, so ergibt sich daraus die Behauptung.

I. Es sei nun gemäß der Voraussetzung

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \dots$$

($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$) eine unendliche Folge von Abschnittsdeterminanten, die alle von Null verschieden sind. Dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{U}_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,\alpha_i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,\alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_i,1} & a_{\alpha_i,2} & . & a_{\alpha_i,\alpha_i} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_{\alpha_i, \alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{\alpha_i-1+1, \alpha_i-1+1} & a_{\alpha_i-1+1, \alpha_i-1+2} & . & a_{\alpha_i-1+1, \alpha_i} \\ a_{\alpha_i-1+2, \alpha_i-1+1} & a_{\alpha_i-1+2, \alpha_i-1+2} & . & a_{\alpha_i-1+2, \alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_i, \alpha_i-1+1} & a_{\alpha_i, \alpha_i-1+2} & . & a_{\alpha_i, \alpha_i} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_{\alpha_{i-1}, \alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{1, \alpha_{i-1}+1} & a_{1, \alpha_{i-1}+2} & . & a_{1, \alpha_i} \\ a_{2, \alpha_{i-1}+1} & a_{2, \alpha_{i-1}+2} & . & a_{2, \alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}+1} & a_{\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}+2} & . & a_{\alpha_{i-1}, \alpha_i} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend bezeichnen wir auch die Teile von anderen Matrizen.

¹²⁾ Die Multiplikation $\mathfrak{B}' \mathfrak{U} \mathfrak{B}$ ist ausführbar und assoziativ, da alle auftretenden Summen nur endlich viele Glieder haben; denn „spaltenfinit“ heißt, daß in jeder Spalte nur endlich viele Nichtnullen vorkommen.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen gehe ich nun dazu über, gegebenenfalls die vorkommenden Matrizen aus ihren Teilen aufzubauen. In diesem Sinne werde ich z. B. schreiben:

$$(1) \quad \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

oder auch

$$(2) \quad \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_i} & \mathfrak{U}_{\alpha_i, \alpha_i+1} & * \\ \mathfrak{U}'_{\alpha_i, \alpha_i+1} & \mathfrak{U}_{\alpha_i+1, \alpha_i+1} & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

wobei hier wie im folgenden Sterne immer solche Elemente oder Matrizen ersetzen sollen, auf die es im jeweiligen Zusammenhang nicht ankommt und an deren Vorhandensein nur erinnert werden soll.

Das Ausmultiplizieren von Matrizen, die alle nach dem gleichen Schema, entweder wie in (1) oder wie in (2) untergeteilt sind, kann nun auch in der Weise vollzogen werden, daß man die Teilmatrizen selbst als Elemente der Matrix auffaßt, und nun nach der gewöhnlichen Regel diese Matrizen von Matrizen ausmultipliziert, wobei aber streng auf die Reihenfolge der Faktoren der inneren Produkte zu achten ist. Dann ist das Resultat, wenn man von der Einteilung jetzt wieder absieht, das gleiche wie bei der gewohnten Multiplikation, wie man leicht verifiziert.

II. Der eigentliche Beweis beginnt nun damit, daß eine intakte Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_1}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ mit $d_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha_1$) so bestimmt werden, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}'_{\alpha_1} & \mathfrak{D} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_1} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_1} \mathfrak{D}_{\alpha_1} \mathfrak{U}_{\alpha_1} = \mathfrak{U}_{\alpha_1}$$

wird. Nach dem Reduktionssatz für endliche Matrizen gibt es aber eine solche Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_1}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ mit $d_i = \pm 1$ oder 0 ($i = 1, 2, \dots, \alpha_1$), die diese Gleichung erfüllen. Da nun $\mathfrak{U}_{\alpha_1}$ intakt ist, so können auch auf der linken Seite der Gleichung nur intakte Matrizen stehen, so daß insbesondere kein $d_i = 0$ sein kann. Es ist also $d_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha_1$).

Ich nehme nun an, daß schon eine intakte Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_n}$ mit $d_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha_n$) gefunden seien, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}'_{\alpha_n} & \mathfrak{D} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_n} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Dann kann man eine reguläre Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}}$, eine Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}}$

und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1}$ mit $d_i = \pm 1$ ($i = \alpha_n + 1, \alpha_n + \dots, \alpha_{n+1}$) so bestimmen, daß für die Matrizen

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_n} & \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & * \end{pmatrix}$$

gilt:

$$(3) \quad \mathfrak{U}' \mathfrak{D} \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1} & * \\ \mathfrak{U}'_{\alpha_n, \alpha_n+1} & \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Denn dazu ist notwendig und hinreichend, daß folgende beiden Gleichungen gelten:

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n} \mathfrak{D}_{\alpha_n} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1} = \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1},$$

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n, \alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1} + \mathfrak{U}'_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} = \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1}.$$

Da aber angenommen wurde, daß $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ und $\mathfrak{D}_{\alpha_n}$ regulär sind, so kann man einfach setzen:

$$\mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1} = \mathfrak{D}_{\alpha_n}^{-1} (\mathfrak{U}'_{\alpha_n})^{-1} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1}.$$

Nun wird die Matrix

$$\mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} - \mathfrak{U}'_{\alpha_n, \alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1}$$

ins Auge gefaßt. Diese ist offenbar symmetrisch. Nach dem Reduktionsatz für endliche Matrizen gibt es also eine reguläre Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1}$, so daß

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} = \mathfrak{U}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1} - \mathfrak{U}'_{\alpha_n, \alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_n+1}$$

wird, wo $\mathfrak{D}_{\alpha_n+1, \alpha_n+1}$ eine Diagonalmatrix ist mit $d_i = \pm 1$ oder 0 ($i = \alpha_n + 1, \dots, \alpha_{n+1}$). Da jetzt $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{D}$ die Beziehung (3) erfüllen, gilt die Gleichung

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n+1} \mathfrak{D}_{\alpha_n+1} \mathfrak{U}_{\alpha_n+1} = \mathfrak{U}_{\alpha_n+1},$$

wie man sieht, wenn man sinngemäß in vier Teile unterteilt und den linken oberen Teil betrachtet. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung nach Voraussetzung eine intakte Matrix steht, so können auch links nur intakte Matrizen stehen; also ist $\mathfrak{U}_{\alpha_n+1}$ intakt und insbesondere ist $d_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, \alpha_{n+1}$).

Damit ist erschöpfend dargetan, wie eine Matrix $\mathfrak{U}$, die die Beziehung $\mathfrak{U}' \mathfrak{D} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ erfüllt, rekursiv bestimmt werden kann. Wesentlich ist bei dieser Rekursion, daß die ersten α_n Spalten von $\mathfrak{U}$ so bestimmt werden, daß sie außer in dem Teil $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ nur Nullen enthalten (wodurch sich auch die Spalten-

finiheit ergibt) und daß alle Abschnittsdeterminanten U_{α_n} von Null verschieden werden. Denn nun können wir die Existenz einer eindeutigen spaltenfiniten, linksseitigen Reziproken $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{U}$ nachweisen.

III. Für das Bestehen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{R} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix}$$

ist notwendig und hinreichend:

$$\mathfrak{X}_{\alpha_1} = U_{\alpha_1}^{-1}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{D}.$$

Angenommen, es sei nun $\mathfrak{X}_{\alpha_n}$ in eindeutiger Weise schon so bestimmt, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{D} & * \end{pmatrix}$$

und es sei gezeigt, daß notwendig unter $\mathfrak{X}_{\alpha_n}$ eine Nullmatrix stehen muß.

Für das Bestehen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_n} & \mathfrak{X}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{X}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{R} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\alpha_n} & U_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{D} & U_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{D} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & * \end{pmatrix}$$

ist dann notwendig und hinreichend:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} &= -\mathfrak{X}_{\alpha_n} U_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} U_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}}^{-1}, \\ \mathfrak{X}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} &= U_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}}^{-1}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß eine Matrix $\mathfrak{X}$, die die Gleichung $\mathfrak{X} \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ erfüllt, rekursiv bestimmt werden kann, ferner, daß sie überhaupt nur in einer Weise bestimmt werden kann, also eindeutig ist, und daß sie ganz von selbst spaltenfinit wird. Hat aber eine Matrix $\mathfrak{U}$ in einem Ring (hier der Ring der spaltenfiniten Matrizen) eine eindeutige linksseitige Reziproke, so ist diese ihre eindeutige Inverse, so daß insbesondere auch $\mathfrak{U} \mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ gilt. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

B. Die vorbereitenden Transformationen.

Um eine unendliche symmetrische Matrix, über die keinerlei Voraussetzungen gemacht sind, durch eine Transformation mit spaltenfiniten Matrix auf eine Diagonalmatrix zu reduzieren, werden zwei vorbereitende Transformationen benötigt, deren Existenz in den Sätzen 2 und 3 gezeigt werden soll.

Satz 2: $\mathfrak{U}$ sei eine unendliche symmetrische Matrix. Dann gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{R}$ mit spaltenfiniten Inversen $\mathfrak{R}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{R}' \mathfrak{U} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$$

wird, wo $\mathfrak{B}$ nach Wegstreichung aller darin vorhandenen Nullreihen in eine symmetrische Matrix $\mathfrak{B}_1$ übergeht, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Dependenz bestehen.

Beweis. Die Matrix $\mathfrak{R}$ läßt sich wie folgt bestimmen: Die erste Spalte sei die Stelle e_1 ; die x -te Spalte sei die Stelle e_x , wenn die x -te Spalte f_x von $\mathfrak{A}$ keine lineare Kombination der vorangehenden Spalten von $\mathfrak{A}$ ist¹³⁾. Ist aber

$$f_x = r_{1x} f_1 + r_{2x} f_2 + \dots + r_{x-1,x} f_{x-1},$$

so sei die x -te Spalte von $\mathfrak{R}$ die Stelle

$$(-r_{1x}, -r_{2x}, \dots, -r_{x-1,x}, 1, 0, 0, \dots).$$

Die Existenz von $\mathfrak{R}^{-1}$ wird dann durch die gleiche Schlußweise wie in Abschnitt A. geliefert; denn hier sind offenbar alle Abschnittsdeterminanten von Null verschieden. Bildet man $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, so bleiben die erste und diejenigen Spalten von $\mathfrak{A}$, die nicht eine lineare Kombination der vorangehenden waren, unverändert, während die übrigen durch 0, d. i. die Stelle $(0, 0, 0, \dots)$, ersetzt werden. $\mathfrak{R}'\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ entsteht dann aus $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ durch Nullsetzen aller derjenigen Zeilen, die in $\mathfrak{A}$ lineare Kombinationen der vorangehenden waren. Streicht man nun die Nullreihen, so hat die übrigbleibende Matrix $\mathfrak{B}_1$ die Eigenschaft, daß keine linearen Dependenz zwischen ihren Spalten (Zeilen) bestehen. Denn sind $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ die Indizes der Spalten von $\mathfrak{A}$, die nicht eine lineare Kombination der vorangehenden waren, und würde eine lineare Dependenz zwischen endlich vielen Spalten von $\mathfrak{B}_1$ bestehen, so würde eine Gleichung

$$c_{\gamma_1} f'_{\gamma_1} + c_{\gamma_2} f'_{\gamma_2} + \dots + c_{\gamma_n} f'_{\gamma_n} = 0$$

mit $c_{\gamma_n} = -1$ gelten, wo f'_{γ_i} diejenige Stelle ist, die aus f_{γ_i} entsteht, wenn man darin die Koordinaten mit den Indizes, die von $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ verschieden sind, durch Null ersetzt. Dann wäre aber auch

$$c_{\gamma_1} f_{\gamma_1} + c_{\gamma_2} f_{\gamma_2} + \dots + c_{\gamma_n} f_{\gamma_n} = 0,$$

denn die dazu noch fehlenden Relationen wären wegen der Abhängigkeit der ausgefallenen Zeilen von den vorangehenden von selbst mit erfüllt, wie man, mit der ersten Koordinate beginnend, leicht überlegt. Es wäre dann schließlich

$$f_{\gamma_n} = c_{\gamma_1} f_{\gamma_1} + c_{\gamma_2} f_{\gamma_2} + \dots + c_{\gamma_{n-1}} f_{\gamma_{n-1}}$$

entgegen der Annahme, daß f_{γ_n} nicht eine lineare Kombination der vorangehenden sein sollte. Damit ist Satz 2 bewiesen.

¹³⁾ e_i bedeutet diejenige Stelle, deren i -te Koordinate gleich $+1$ ist, während alle übrigen Koordinaten gleich Null sind.

Satz 3: Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche symmetrische Matrix, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Abhängigkeiten bestehen, so gibt es eine Permutationsmatrix $\mathfrak{P}$, so daß

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$$

wird, wo in $\mathfrak{B}$ nie zwei aufeinanderfolgende Abschnittsdeterminanten verschwinden. Dabei ist $\mathfrak{B}$ spaltenfinit und hat eine spaltenfinite Inverse $\mathfrak{B}^{-1}$.

Dem Beweise werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Darin wird mit $B_{\alpha, \beta}^{(p)}$ folgende Unterdeterminante von $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

$$B_{\alpha, \beta}^{(p)} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,\beta} \\ a_{\alpha,1} & a_{\alpha,2} & \dots & a_{\alpha,p} & a_{\alpha,\beta} \end{vmatrix}.$$

Dann heißt der

Hilfssatz 1: Ist in der unendlichen Matrix $\mathfrak{A}$ die p -te Abschnittsdeterminante A_p von Null verschieden, während alle Determinanten $B_{p+1, \varrho}^{(p)}$ ($\varrho = p+1, p+2, \dots$) verschwinden, so sind die $p+1$ ersten Zeilen von $\mathfrak{A}$ linear abhängig.

Beweis. Wegen $B_{p+1, p+1}^{(p)} = 0$ gibt es $p+1$ Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_{p+1}$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$(1) \quad c_1 a_{1\lambda} + c_2 a_{2\lambda} + \dots + c_{p+1} a_{p+1, \lambda} = 0 \\ (\lambda = 1, 2, \dots, p+1).$$

Jetzt sei ϱ ein fester Index $> p+1$. Wegen $A_p \neq 0$ sind die Spalten von A_p linear unabhängig, also auch die ersten p Spalten von $B_{p+1, \varrho}^{(p)}$. Da aber außerdem $B_{p+1, \varrho}^{(p)} = 0$ ist, so gibt es p Zahlen $k_1, k_2, \dots, k_p$, so daß

$$k_1 a_{x1} + k_2 a_{x2} + \dots + k_p a_{xp} = a_{x\varrho} \\ (x = 1, 2, \dots, p+1).$$

Also wird

$$\sum_{x=1}^{p+1} c_x a_{x\varrho} = \sum_{x=1}^{p+1} c_x \sum_{\lambda=1}^p k_\lambda a_{x\lambda} = \sum_{\lambda=1}^p k_\lambda \sum_{x=1}^{p+1} c_x a_{x\lambda} = 0,$$

denn nach (1) ist $\sum_{x=1}^{p+1} c_x a_{x\lambda} = 0$ ($\lambda = 1, 2, \dots, p$). Also gilt (1) für jedes λ , d. h. die ersten $p+1$ Zeilen sind linear abhängig, w. z. b. w.

Hilfssatz 2: Ist in einer unendlichen symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ die p -te Abschnittsdeterminante A_p von Null verschieden, verschwinden dagegen A_{p+1} sowie alle Determinanten $B_{\varrho, \varrho}^{(p+1)}$ ($\varrho = p+2, p+3, \dots$), so verschwinden auch alle Determinanten $B_{p+1, \varrho}^{(p)}$ ($\varrho = p+1, p+2, \dots$).

Beweis¹⁴⁾. Wendet man den Determinantensatz von Sylvester auf $B_{\varrho, \varrho}^{(p+1)}$ ($\varrho = p+2, p+3, \dots$) an, so folgt

$$B_{p+1, p+1}^{(p)} B_{\varrho, \varrho}^{(p)} - B_{\varrho, p+1}^{(p)} B_{p+1, \varrho}^{(p)} = A_p B_{\varrho, \varrho}^{(p+1)} = 0.$$

Da nun $B_{p+1, p+1}^{(p)} = A_{p+1} = 0$ und wegen der Symmetrie $B_{\varrho, p+1}^{(p)} = B_{p+1, \varrho}^{(p)}$ ist, so folgt $B_{p+1, \varrho}^{(p)} = 0$ ($\varrho = p+2, p+3, \dots$), w. z. b. w.

Ist also $A_p \neq 0$, $A_{p+1} = 0$ und würden alle $B_{\varrho, \varrho}^{(p+1)}$ ($\varrho = p+2, p+3, \dots$) verschwinden, so wären nach Hilfssatz 2 alle $B_{p+1, \varrho}^{(p)} = 0$ ($\varrho = p+1, p+2, \dots$), so daß nach Hilfssatz 1 die ersten $p+1$ Zeilen linear abhängig wären. Soll dies nicht sein, so muß also ein $B_{\varrho, \varrho}^{(p+1)} \neq 0$ sein. Setzt man also die ϱ -te Zeile (Spalte) an die Stelle der $(p+2)$ -ten und rückt die dazwischenliegenden um eins nach unten (rechts), so wird durch diese einfache Vertauschung die $(p+2)$ -te Abschnittsdeterminante von Null verschieden, während alle vorhergehenden Abschnittsdeterminanten ihre Werte beibehalten.

Beweis von Satz 3. Ist $a_{11} \neq 0$, so bleibt die erste Zeile (Spalte) unberührt. Ist $a_{11} = 0$, so ist von den Unterdeterminanten $a_{11}a_{\alpha\alpha} - a_{1\alpha}^2 = -a_{1\alpha}^2$ sicher eine von Null verschieden, da sonst entgegen der Voraussetzung die erste Zeile aus lauter Nullen bestände. Setzt man also die α -te Zeile (Spalte) an die Stelle der zweiten, so wird die zweite Abschnittsdeterminante von Null verschieden. Dieses Verfahren kann nach dem oben Gesagten in infinitum fortgesetzt werden; es hat die Eigenschaft, daß die $(n-1)$ -te Zeile (Spalte) mindestens unter den $2n$ ersten Zeilen (Spalten) der permutierten Matrix ihren Platz erhält, womit die Umkehrbarkeit der Permutation gesichert ist. Einer solchen Permutation entspricht nun eine Matrix $\mathfrak{P}$, welche in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine $+1$, sonst lauter Nullen hat, und zwar in der Weise, daß $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ diejenige Matrix wird, welche durch gleichzeitige Anwendung dieser Permutation auf Zeilen und Spalten aus $\mathfrak{A}$ hervorgeht. $\mathfrak{P}$ ist dabei ganz von selbst spaltenfinit und hat die Inverse $\mathfrak{P}'$, welche ebenfalls spaltenfinit ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

C. Der allgemeine Fall.

Satz 4: Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche symmetrische Matrix, so gibt es eine spaltenfinit Matrix $\mathfrak{S}$ mit spaltenfiniten Inversen $\mathfrak{S}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}$$

¹⁴⁾ Vgl. die in Fußnote ¹⁰⁾ erwähnte Arbeit, S. 189.

wird, wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ oder 0 ($i = 1, 2, \dots$) ist.

Beweis. Nach Satz 2 gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{K}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{K}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{K}' \mathfrak{U} \mathfrak{K} = \mathfrak{B}$$

wird, wo $\mathfrak{B}$ nach Wegstreichung aller Nullreihen in eine symmetrische Matrix $\mathfrak{B}_1$ übergeht, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Abhängigkeiten bestehen. $\mathfrak{B}_1$ erfüllt also die Voraussetzung von Satz 3; also gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{P}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{B}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{C}_1$$

wird, wo bei $\mathfrak{C}_1$ in der Folge der Abschnittsdeterminanten nie zwei aufeinanderfolgende verschwinden. $\mathfrak{C}_1$ erfüllt also die Voraussetzung von Satz 1; daher gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{U}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{U}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{C}_1 \mathfrak{U} = \mathfrak{D}_1$$

wird, wo $\mathfrak{D}_1$ eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots$) ist. Setzt man also $\mathfrak{P} \mathfrak{U} = \mathfrak{Q}_1$, so ist

$$\mathfrak{Q}_1' \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}_1,$$

wobei $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1^{-1} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{P}^{-1}$ spaltenfinit sind auf Grund der Ringeigenschaft der spaltenfiniten Matrizen. Nun werde $\mathfrak{B}_1$ durch Einfügen von Nullreihen zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}_1$ entsprechend zu einer Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ ergänzt, während $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1^{-1}$ in der gleichen Weise zu $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{K}$ ergänzt werden, nur mit dem Unterschied, daß in den einzufügenden Reihen auf der Diagonalen $+1$ statt Null gesetzt wird. Dann wird offenbar $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}^{-1}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ spaltenfinit und es gilt

$$\mathfrak{Q}' \mathfrak{B} \mathfrak{Q} = \mathfrak{D},$$

wo

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ oder 0 ($i = 1, 2, \dots$). Setzt man nun noch $\Re \Omega = \mathfrak{S}$, so folgt unter abermaliger Benutzung der Ringeigenschaft der spaltenfiniten Matrizen die Behauptung.

Kapitel II.

Der Reduktionssatz.

A. Erklärung der Begriffe.

Die halbfiniten Matrizen¹⁵⁾, welche im folgenden der Gegenstand der Untersuchung sein sollen, haben die Gestalt

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1, -1} & a_{-1, 0} & a_{-1, 1} & a_{-1, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{0, -1} & a_{0, 0} & a_{0, 1} & a_{0, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{1, -1} & a_{1, 0} & a_{1, 1} & a_{1, 2} & \cdot \\ \cdot & a_{2, -1} & a_{2, 0} & a_{2, 1} & a_{2, 2} & \cdot \end{array} \right) = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix},$$

wo ${}^*\mathfrak{A}$ spaltenfinit, $\mathfrak{A}_*$ zeilenfinit, ${}_*\mathfrak{A}$ beliebig und $\mathfrak{A}^*$ endlich ist. Die Gesamtheit der halbfiniten Matrizen hat die Ringeigenschaft und die Multiplikation zweier halbfiniten Matrizen kann wie bei den untergeteilten Matrizen in Kapitel I durch Ausmultiplizieren der zweireihigen Matrizen von Matrizen geschehen:

$$\begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}^* \\ {}_*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} {}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^* {}_*\mathfrak{B} & {}^*\mathfrak{A} \mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}_* \\ {}_*\mathfrak{A} {}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_* {}_*\mathfrak{B} & {}_*\mathfrak{A} \mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}_* \mathfrak{B}_* \end{pmatrix}.$$

Entsteht die Matrix $\mathfrak{B}$ aus der halbfiniten Matrix $\mathfrak{A}$ durch Spiegelung derselben an der von rechts oben nach links unten verlaufenden Nebendiagonalen, so wird

$$\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{a}_{\alpha\beta})$$

gesetzt; $\tilde{\mathfrak{A}}$ wird ebenfalls halbfinit, da die Bedingung der Halbfinalität ihrem Charakter nach symmetrisch zur Nebendiagonalen ist. $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ hängen durch die Formeln

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{-\beta+1, -\alpha+1} \quad (\alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

¹⁵⁾ Vgl. Fußnote 6).

zusammen. Durch dieselben Formeln wird offenbar auch der Matrix $*\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}^*$, $*\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_*$) eine Matrix $*\tilde{\mathfrak{A}}$ ($\tilde{\mathfrak{A}}^*$, $*\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_*$) zugeordnet, wodurch folgende Schreibweise ermöglicht wird:

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_* & \mathfrak{A}^* \\ * \mathfrak{A} & * \tilde{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Formeln verifiziert man leicht die Relationen

$$(\tilde{\tilde{\mathfrak{A}}}) = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \tilde{\mathfrak{A}}, \quad (\tilde{\mathfrak{A}}^{-1}) = (\mathfrak{A})^{-1}.$$

Desgleichen für gesternte Matrizen.

Definition. Die Matrix $\mathfrak{A}$ heißt nebensymmetrisch, wenn $\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$ ist. Ebenso heißt $\mathfrak{A}^*$ ($*\mathfrak{A}$) nebensymmetrisch, wenn $\mathfrak{A}^* = \tilde{\mathfrak{A}}^*$ ($*\mathfrak{A} = * \tilde{\mathfrak{A}}$) ist.

Für die Nebensymmetrie von $\mathfrak{A}$ ist offenbar notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{A}^*$ und $*\mathfrak{A}$ nebensymmetrisch sind, und daß $*\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_*$ ist.

Ist $\mathfrak{A}$ eine nebensymmetrische halbfiniten Matrix und bildet man mit einer halbfiniten Matrix $\mathfrak{B}$ das Produkt $\mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, so ist auch $\mathfrak{B}$ nebensymmetrisch, denn

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \tilde{\mathfrak{A}} \tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}.$$

Definition. Zwei nebensymmetrische halbfiniten Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen kongruent, wenn es eine halbfiniten Matrix $\mathfrak{P}$ mit halbfiniten Inversen $\mathfrak{P}^{-1}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{P} \mathfrak{A} \mathfrak{P} = \mathfrak{B}$$

ist.

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation und bewirkt somit unter den nebensymmetrischen halbfiniten Matrizen eine Klasseneinteilung. Das Ziel des folgenden ist nun, ein vollständiges Repräsentantensystem dieser Klassen anzugeben, d. h. ein solches System nebensymmetrischer Matrizen, welches aus jeder Klasse eine und nur eine Matrix enthält. Dieses Ziel wird in zwei Schritten erreicht: Erstens (Kapitel II, C) wird gezeigt, daß sich in jeder Klasse solche Matrizen befinden, die wir Normalformen nennen (Reduktionssatz):

Definition. Die nebensymmetrische halbfiniten Matrix

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} * \mathfrak{N} & \mathfrak{N}^* \\ * \mathfrak{N} & \mathfrak{N}_* \end{pmatrix}$$

heißt Normalform, wenn

1. $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{O}$,
2. $\mathfrak{N}_*$ eine Einsermatrix ist, d. h. eine solche, die in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens eine +1 enthält, sonst lauter Nullen, und die nach Wegstreichung aller in ihr vorkommenden Nullreihen in eine Diagonalmatrix übergeht ($*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_*$ ist dann ebenfalls eine Einsermatrix),

3. ${}^*\mathfrak{N}$ eine Diagonalmatrix

$${}^*\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ist mit $d_i = \pm 1$ oder 0 und wenn

4. in jeder Zeile und in jeder Spalte der Gesamtmatrix $\mathfrak{N}$ höchstens ein von Null verschiedenes Element steht.

Zweitens (Kapitel III) wird dann aus diesen Normalformen ein vollständiges Repräsentantensystem ausgewählt. Ein solches Repräsentantensystem aus Normalformen wird dann ein kanonisches System von Normalformen genannt.

B. Ein besonders einfacher Fall des Reduktionssatzes.

Das Ergebnis von Satz 4, Kapitel I kann nun in neuer Schreibweise so ausgesprochen werden: Zu jeder nebensymmetrischen Matrix ${}^*\mathfrak{A}$ gibt es eine spaltenfinite Matrix ${}^*\mathfrak{P}$ mit spaltenfiniter Inversen ${}^*\mathfrak{P}^{-1}$, so daß

$${}^*\tilde{\mathfrak{P}} {}^*\mathfrak{A} {}^*\mathfrak{P} = {}^*\mathfrak{D}$$

wird, wo ${}^*\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix

$${}^*\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ oder 0 ($i = 1, 2, \dots$) ist. Daraus folgt unmittelbar für halbfinite Matrizen der

Satz 5. *Ist*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

eine nebensymmetrische Matrix, so gibt es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{P}^{-1}$, so daß

$$\tilde{\mathfrak{P}} \mathfrak{A} \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\mathfrak{D} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

wird, wo ${}^*\mathfrak{D}$ die obige Bedeutung hat.

Beweis. Wählt man ${}^*\mathfrak{P}$ im Sinne der obigen Bemerkung und setzt

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\mathfrak{P}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P}^{-1} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{E} \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^{-1}$ sind beide halbfinit und es gilt:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\mathfrak{P} {}^*\mathfrak{A} {}^*\mathfrak{P} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\mathfrak{D} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \quad \text{w. z. b. w.}$$

C. Beweis des Reduktionssatzes im allgemeinen Fall.

Der Beweis ist in vier Schritte gegliedert, von denen die ersten drei als Hilfssätze vorweggenommen werden.

Hilfssatz 1: Ist $\mathfrak{A}$ eine halbfiniten Matrix, so gibt es eine halbfiniten Matrix $\mathfrak{Z}_p$ mit halbfiniten Inversen $\mathfrak{Z}_p^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{Z}_p \mathfrak{A} \mathfrak{Z}_p = \mathfrak{A}_1$$

aus $\mathfrak{A}$ dadurch entsteht, daß alle Elemente um p Stellen nach links und nach unten gerückt werden. Da nun $\mathfrak{A}^*$ endlich ist, so wird bei hinreichend großem p $\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{D}$.

Beweis. Setzt man

$$\mathfrak{Z}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{Z}_p = \mathfrak{Z}_1^p$, so wird $\mathfrak{Z}_1^{-1} = \mathfrak{Z}_1'$, $\mathfrak{Z}_p^{-1} = \mathfrak{Z}_p'$ und $\mathfrak{Z}_p = \mathfrak{Z}_p$; $\mathfrak{Z}_p$ und $\mathfrak{Z}_p^{-1}$ sind für jedes p halbfinit und es gilt

$$\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{A} \mathfrak{Z}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1,0} & a_{-1,1} & | & a_{-1,2} & \cdot \\ \cdot & a_{0,0} & a_{0,1} & | & a_{0,2} & \cdot \\ \cdot & a_{1,0} & a_{1,1} & | & a_{1,2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

so daß $\mathfrak{Z}_p$ das Gewünschte leistet.

Hilfssatz 2. Ist $\mathfrak{A}_1$ eine halbfiniten Nebensymmetrische Matrix mit $\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{D}$, so gibt es eine halbfiniten Matrix $\mathfrak{P}_1$ mit halbfiniten Inversen $\mathfrak{P}_1^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A}_2$$

wird, wo $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{D}$ und ${}^*\mathfrak{A}_2$ eine Einsermatrix ist; $\mathfrak{A}_{2*} = {}^*\mathfrak{A}_2$ ist dann ebenfalls eine Einsermatrix.

Beweis. Nach der Äquivalenztheorie für zeilenfinite Matrizen¹⁶⁾ gibt es zwei zeilenfinite Matrizen ${}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1$ und $\mathfrak{P}_{1*}$ mit zeilenfiniten Inversen ${}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1^{-1}$ und $\mathfrak{P}_{1*}^{-1}$, so daß ${}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*}$ eine Einsermatrix wird. Setzt man

$$\mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} {}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1 & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{P}_{1*} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\mathfrak{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} {}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1^{-1} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{P}_{1*}^{-1} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\tilde{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{P}}_{1*} {}^*\mathfrak{A}_1 {}^*\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{O} \\ {}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1 {}^*\mathfrak{A}_1 {}^*\mathfrak{P}_1 & {}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{O} \\ {}^*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix},$$

d. h. es wird $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{A}_{2*} = {}^*\tilde{\mathfrak{P}}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*}$ wird eine Einsermatrix, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. Ist $\mathfrak{A}_2 = (a_{\alpha\beta}^{(2)})$ eine nebensymmetrische Matrix, bei der $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{A}_{2*}$ eine Einsermatrix ist, so gibt es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{P}_2$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{P}_2^{-1}$, so daß

$$\tilde{\mathfrak{P}}_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{A}_3 = (a_{\alpha\beta}^{(3)})$$

aus $\mathfrak{A}_2$ in der Weise hervorgeht, daß die Elemente aller derjenigen Zeilen von ${}^*\mathfrak{A}_2$, in denen rechts in $\mathfrak{A}_{2*}$ eine $+1$ steht, und die Elemente aller derjenigen Spalten von ${}^*\mathfrak{A}_2$, in denen oben in ${}^*\mathfrak{A}_2$ eine $+1$ steht, durch Nullen ersetzt werden.

Beweis. Die Indizes derjenigen Elemente von ${}^*\mathfrak{A}_2$, welche gleich $+1$ sind, seien nach wachsenden Beträgen geordnet,

$$\kappa_1, \lambda_1; \quad \kappa_2, \lambda_2; \quad \kappa_3, \lambda_3; \quad \dots;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sei die Komplementärmenge zur Menge $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots$, die dieselbe zur Menge $0, -1, -2, \dots$ ergänzt; im selben Sinne sei $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ die Komplementärmenge zur Menge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Dann sei ${}^*\mathfrak{M}$ folgende Matrix:

In den Zeilen mit den Indizes $-\alpha_i + 1$ sei für alle λ

$$m_{-\alpha_i+1, \lambda} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

In den Zeilen mit den Indizes $-\kappa_i + 1$ sei

1. wenn es sich um eine Spalte λ_k handelt:

$$m_{-\kappa_i+1, \lambda_k} = -\frac{a_{-\lambda_i+1, \lambda_k}^{(2)}}{2},$$

2. wenn es sich um eine Spalte β_k handelt:

$$m_{-\kappa_i+1, \beta_k} = -a_{-\lambda_i+1, \beta_k}^{(2)}.$$

¹⁶⁾ O. Toeplitz, Pal. Rend. 28 (1909), S. 88—96.

Nun wird gesetzt

$$\mathfrak{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{O} \\ {}^*\mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{O} \\ -{}^*\mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

und es wird

$$\mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{O} \\ {}^*\tilde{\mathfrak{M}} {}^*\mathfrak{A}_2 + {}^*\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{2*} {}^*\mathfrak{M} & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_3.$$

Nun wird die κ -te Zeile von ${}^*\mathfrak{A}_3$ ins Auge gefaßt.

1. Sei $\kappa = -\lambda_i + 1$. Dann enthält $\mathfrak{A}_{2*}$ in der κ -ten Zeile eine $+1$ in der $(-\kappa_i + 1)$ -ten Spalte, sonst lauter Nullen. Die κ -te Zeile von $\mathfrak{A}_{2*} {}^*\mathfrak{M}$ ist also die $(-\kappa_i + 1)$ -te Zeile von ${}^*\mathfrak{M}$.

- a) ${}^*\tilde{\mathfrak{M}}$ hat in der κ -ten Zeile die λ_i -te Spalte von ${}^*\mathfrak{M}$; ist also $\lambda = \lambda_k$, so hat ${}^*\tilde{\mathfrak{M}} {}^*\mathfrak{A}_2$ in der κ -ten Zeile und der λ -ten Spalte das Element $m_{-\kappa_k + 1, \lambda_i}$, da dieses beim Ausmultiplizieren auf die $+1$ in ${}^*\mathfrak{A}_2$ trifft, die an der Stelle κ_k, λ_k steht. Also wird in diesem Falle

$$\begin{aligned} a_{\kappa \lambda}^{(3)} &= m_{-\kappa_k + 1, \lambda_i} + a_{-\lambda_i + 1, \lambda_k}^{(2)} + m_{-\kappa_i + 1, \lambda_k} \\ &= -\frac{a_{-\lambda_i + 1, \lambda_k}^{(2)}}{2} + a_{-\lambda_i + 1, \lambda_k}^{(2)} - \frac{a_{-\lambda_i + 1, \lambda_k}^{(2)}}{2} = 0. \end{aligned}$$

- b) Ist $\lambda = \beta_k$, so trifft die κ -te Zeile von ${}^*\tilde{\mathfrak{M}}$ auf eine Nullspalte und es wird einfach

$$\begin{aligned} a_{\kappa \lambda}^{(3)} &= a_{-\lambda_i + 1, \beta_k}^{(2)} + m_{-\kappa_i + 1, \beta_k} \\ &= a_{-\lambda_i + 1, \beta_k}^{(2)} - a_{-\lambda_i + 1, \beta_k}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

2. Sei $\kappa = -\beta_k + 1$. Dann ist die κ -te Zeile von $\mathfrak{A}_{2*}$ eine Nullzeile, also auch die von $\mathfrak{A}_{2*} {}^*\mathfrak{M}$.

- a) Ist $\lambda = \lambda_i$, so wird also

$$\begin{aligned} a_{\kappa \lambda}^{(3)} &= m_{-\kappa_i + 1, \beta_k} + a_{-\beta_k + 1, \lambda_i}^{(2)} \\ &= -a_{-\lambda_i + 1, \beta_k}^{(2)} + a_{-\lambda_i + 1, \beta_k}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

- b) Ist $\lambda = \beta_k$, so trifft die κ -te Zeile von ${}^*\tilde{\mathfrak{M}}$ auf eine Nullspalte, so daß gilt:

$$a_{\kappa \lambda}^{(3)} = a_{\kappa \lambda}^{(2)}.$$

Außer in dem letzten Falle werden also alle Elemente von ${}^*\mathfrak{A}_3$ gleich Null, wie behauptet wurde.

Satz 6 (Reduktionssatz). *Jede nebensymmetrische halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$ ist zu einer Normalform $\mathfrak{N}$ kongruent.*

Beweis. Nach den Hilfssätzen 1 bis 3 können nacheinander drei halbfinite Matrizen $\mathfrak{I}_p$, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit halbfinalen Inversen $\mathfrak{I}_p^{-1}$, $\mathfrak{P}_1^{-1}$ und $\mathfrak{P}_2^{-1}$ bestimmt werden, so daß, wenn man $\mathfrak{I}_p \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \Omega$ setzt,

$$\tilde{\Omega} \mathfrak{A} \Omega = \mathfrak{A}_3$$

wird, wo $\mathfrak{A}_3$ die in Hilfssatz 3 behaupteten Eigenschaften hat. Ω wird wegen der Ringeigenschaft der halbfinalen Matrizen auch halbfinal und hat eine halbfinite Inverse. Mit ${}^*\mathfrak{K}$ wird nun derjenige (nebensymmetrische) Teil von ${}^*\mathfrak{A}_3$ bezeichnet, dessen Elemente möglicherweise noch von Null verschieden sein können (d. h. die Zeilen mit den Indizes $-\beta_i + 1$, die Spalten mit den Indizes β_k). Dann gibt es nach Satz 5 eine halbfinite Matrix $\mathfrak{S}$ mit halbfinaler Inversen $\mathfrak{S}^{-1}$, so daß für

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\mathfrak{K} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\tilde{\mathfrak{S}} \mathfrak{K} \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ {}^*\bar{\mathfrak{D}} & \mathfrak{D} \end{pmatrix},$$

wo

$${}^*\bar{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & d_1 \\ \cdot & \cdot & \bar{d}_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist mit $\bar{d}_i = \pm 1$ oder 0 ($i = 1, 2, \dots$). Wird nun $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{A}_3$ ergänzt durch Einfügen der dazu nötigen Reihen und wird gleichzeitig $\mathfrak{S}$ dadurch zu $\mathfrak{I}$ ergänzt, daß in eben diesen Reihen die Hauptdiagonale mit $+1$ besetzt wird, sonst lauter Nullen, so wird auch $\mathfrak{I}$ halbfinal und hat eine halbfinite Inverse $\mathfrak{I}^{-1}$ (die in der gleichen Weise aus $\mathfrak{S}^{-1}$ hervorgeht wie $\mathfrak{I}$ aus $\mathfrak{S}$) und es wird

$$\tilde{\mathfrak{I}} \mathfrak{A}_3 \mathfrak{I} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{D} \\ {}^*\bar{\mathfrak{D}} & \mathfrak{A}_{3*} \end{pmatrix},$$

wo sich ${}^*\bar{\mathfrak{D}}$ von ${}^*\mathfrak{D}$ höchstens durch symmetrisch eingefügte Nullreihen unterscheidet. Setzt man noch $\Omega \mathfrak{I} = \mathfrak{P}$, so folgt unmittelbar die Behauptung: $\mathfrak{P}$ wird wegen der Ringeigenschaft der halbfinalen Matrizen auch halbfinal und hat eine halbfinite Inverse und es gilt

$$\tilde{\mathfrak{P}} \mathfrak{A} \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{D} \\ {}^*\bar{\mathfrak{D}} & \mathfrak{A}_{3*} \end{pmatrix}$$

w. z. b. w.

Kapitel III.

Nachweis eines kanonischen Systems von Normalformen.

A. Hilfssätze für die weitere Reduktion.

Die Aufstellung eines kanonischen Systems von Normalformen vollzieht sich jetzt in der Weise, daß die Normalformen durch kongruente Transformationen so weit vereinfacht werden, daß für je zwei verschiedene dieser vereinfachten Normalformen die Inkongruenz nachgewiesen werden kann.

Hilfssatz 1. *Wendet man auf die Spalten einer halbfiniten nebensymmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ eine umkehrbare Permutation an, und gleichzeitig auf die Zeilen die homologe Permutation, d. i. diejenige Permutation, die der ersten mit Rücksicht auf die Erhaltung der Nebensymmetrie analog ist, so geht die Matrix $\mathfrak{A}$ stets in eine zu ihr kongruente nebensymmetrische halbfiniten Matrix über, außer in den Fällen, wo die erstgenannte Permutation eine unendliche Folge von Spalten, deren Indizes gegen $+\infty$ streben, mit einer solchen vertauscht, deren Indizes gegen $-\infty$ streben, oder umgekehrt.*

Beweis. Es sei $\varphi(m)$ eine Funktion von m , die die Gesamtheit der ganzen Zahlen umkehrbar eindeutig auf sich abbildet und $\mathfrak{P} = (p_{x\lambda})$ die Einsermatrix mit den Elementen $p_{x\lambda} = e_{x, \varphi(\lambda)}$, $e_{x, \varphi} = \begin{cases} 1 \text{ für } x = \varphi \\ 0 \text{ für } x \neq \varphi \end{cases}$. Bildet man dann für eine halbfiniten Matrix $\mathfrak{A}$ das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, so entsteht dies bekanntlich aus $\mathfrak{A}$, indem an die Stelle der λ -ten Spalte die $\varphi(\lambda)$ -te gesetzt wird. Ebenso entsteht $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{A}$, indem an die Stelle der x -ten Zeile die $[-\varphi(-x+1)+1]$ -te Zeile gesetzt wird. $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ entsteht also durch homologe Permutation von Zeilen und Spalten.

Damit nun sowohl $\mathfrak{P} = (e_{x, \varphi(\lambda)})$ als auch $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}' = (e_{\varphi(x), \lambda})$ halbfinit werden, ist notwendig und hinreichend, daß, wenn λ die Folge $1, 2, 3, \dots$ durchläuft, $\varphi(\lambda)$ schließlich nur positive Werte annimmt, und wenn λ die Folge $0, -1, -2, \dots$ durchläuft, $\varphi(\lambda)$ schließlich nur negative Werte annimmt.

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{N}$ eine Normalform und kommen auf der Nebendiagonalen von ${}^*\mathfrak{N}$ zwei Elemente vor, von denen eines $+1$, das andere -1 ist, so kann man $\mathfrak{N}$ in eine zu ihr kongruente Normalform $\mathfrak{N}_1$ überführen, wo ${}^*\mathfrak{N}_1$ eine $+1$ und eine -1 weniger hat als ${}^*\mathfrak{N}$, dafür aber $\mathfrak{N}_{1*}$ und ${}^*\mathfrak{N}_1$ je eine $+1$ mehr haben als $\mathfrak{N}_*$ bzw. ${}^*\mathfrak{N}$.*

Beweis. Es seien

$$n_{\alpha, -\alpha+1} = +1, \quad n_{\beta, -\beta+1} = -1$$

die in der Voraussetzung genannten Elemente von $\ast \mathfrak{N}$. Sodann sei die Matrix $\mathfrak{P}$ folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} p_{\varrho\varrho} &= +1 \text{ für jedes } \varrho \neq -\alpha + 1, \\ p_{-\alpha+1, -\alpha+1} &= +\frac{1}{2}, \\ p_{-\alpha+1, -\beta+1} &= +1, \\ p_{-\beta+1, -\alpha+1} &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

sonst lauter Nullen. Sie ist halbfinit und hat die halbfinit Inverse $\mathfrak{Q}$, welche so bestimmt ist:

$$\begin{aligned} q_{\varrho\varrho} &= +1 \text{ für jedes } \varrho \neq -\beta + 1, \\ q_{-\beta+1, -\beta+1} &= +\frac{1}{2}, \\ q_{-\alpha+1, -\beta+1} &= -1, \\ q_{-\beta+1, -\alpha+1} &= +\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

sonst lauter Nullen. Dann entsteht $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{N}$ dadurch, daß $n_{\alpha, -\alpha+1}$ und $n_{\beta, -\beta+1}$ durch Null ersetzt werden, während $n_{\alpha, -\beta+1}$ und $n_{\beta, -\alpha+1}$ durch $+1$ ersetzt werden, aber sonst alles ungeändert bleibt. Diese Matrix kann aber unter Anwendung von Hilfssatz 1 durch eine Permutation in eine zu ihr kongruente Normalform $\mathfrak{N}_1$ übergeführt werden, die die behauptete Eigenschaft besitzt; also ist auch $\mathfrak{N}$ selbst zu dieser Normalform $\mathfrak{N}_1$ kongruent, w. z. b. w.

Zusatz. Dieser Schritt kann endlich oft vollzogen werden, d. h. der Hilfssatz gilt nicht nur für ein Paar $+1, -1$, sondern für endlich viele solcher Paare. Die Operation kann ferner wegen der Existenz der halbfiniten Inversen der transformierenden Matrizen auch in umgekehrter Richtung vollzogen werden.

B. Bezeichnungen.

Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir nun noch einige Bezeichnungen ein. Es sei

$$\ast \mathfrak{D}_{\{p, m, n\}} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, deren Elemente $d_1, d_2, \dots$ nur die Werte $+1, -1, 0$ haben; und zwar sollen p der Elemente den Wert $+1$, m den Wert -1 und n den Wert 0 haben (mindestens eine der drei Zahlen p, m, n muß also

den Wert ∞ haben). Die Reihenfolge, in der die $+1, -1, 0$ in $*\mathcal{D}_{\{p, m, n\}}$ geordnet sein sollen, ergibt sich aus der nachfolgenden Übersicht:

Wert von $\{p, m, n\}$	Folge $d_1, d_2, d_3, \dots$
$\{\infty, \infty, \infty\}$	$0, +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, \dots$
$\{p, \infty, \infty\}$	$+1, +1, \dots, +1, 0, -1, 0, -1, \dots$
$\{\infty, m, \infty\}$	$-1, -1, \dots, -1, 0, +1, 0, +1, \dots$
$\{\infty, \infty, 0\}$	$+1, -1, +1, -1, \dots$
$\{p, m, \infty\}$	$+1, +1, \dots, +1, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, 0, \dots$
$\{p, \infty, 0\}$	$+1, +1, \dots, +1, -1, -1, -1, \dots$
$\{\infty, m, 0\}$	$-1, -1, \dots, -1, +1, +1, +1, \dots$

In dieser Tabelle bedeuten p und m stets endliche Werte (einschließlich 0). Es sind dabei von den kombinatorisch möglichen Fällen nur diejenigen aufgeführt, die nachher wirklich gebraucht werden.

Es sei ferner $\mathfrak{E}_{*\{x_i, \lambda_i\}}$ diejenige Einsermatrix, bei der die Elemente, deren Indizes (x, λ) der gegebenen Folge (x_i, λ_i) ($i = 1, 2, \dots$) angehören, gleich $+1$ sind, während alle übrigen Elemente gleich Null sind. Insbesondere bedeutet also $\mathfrak{E}_{*\{i, i\}}$ die Einheitsmatrix, während z. B.

$$\mathfrak{E}_{*\{2i-1, n+i\}} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^m & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ist, usw.

C. Weitere Reduktion der Normalformen.

Wir gehen jetzt von einer beliebigen gegebenen Normalform $\mathfrak{N}$ aus und reduzieren diese weiter. Dabei unterscheiden wir zwei Hauptfälle:

A. $*\mathfrak{N}$ enthält nur endlich viele $+1$.

B. $*\mathfrak{N}$ enthält unendlich viele $+1$.

Im Falle A. ist nach Hilfssatz 2, Zusatz, die betrachtete Normalform kongruent zu einer Normalform der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ * \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}.$$

Es sind jetzt vier Unterfälle möglich:

- I. $*\mathcal{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und unendlich viele -1 .
- II. $*\mathcal{D}$ enthält endlich viele $+1$ und unendlich viele -1 .
- III. $*\mathcal{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und endlich viele -1 .
- IV. $*\mathcal{D}$ enthält endlich viele $+1$ und endlich viele -1 .

In den drei Unterfällen I. bis III. unterscheiden wir, ob auf der Nebendiagonalen von $*\mathcal{D}$ unendlich viele Nullen (Ia, IIa, IIIa) oder nur endlich viele (Ib, IIb, IIIb) vorkommen. Im letzteren Falle kann durch Permutation (Hilfssatz 1) eine kongruente Normalform erreicht werden, bei der auf der Nebendiagonalen von $*\mathcal{D}$ gar keine Nullen mehr vorkommen. Weiter kann durch Permutation die Reihenfolge der Elemente auf der Nebendiagonalen von $*\mathcal{D}$ abgeändert werden. Hiernach ist es klar, daß im Falle A. jede Normalform zu einer der folgenden Normalformen kongruent ist:

I.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, 0\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

II.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{p, \infty, \infty\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{p, \infty, 0\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

$$p = 0, 1, 2, \dots \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

III.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{\infty, m, \infty\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{\infty, m, 0\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

IV.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D} & \\ * \mathcal{D}_{\{p, m, \infty\}} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

$$p, m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Gruppen II., III. und IV. enthalten also je unendlich viele Normalformen.

Im Falle B. hat die Normalform $\mathfrak{N}$ das Aussehen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_* & \mathcal{D} \\ * \mathcal{D} & \mathfrak{E}_* \end{pmatrix},$$

wo die Einsermatrix $\mathfrak{E}_*$ unendlich viele $+1$ enthält und daher $*\mathcal{D}$ unendlich

viele Nullen auf der Nebendiagonalen haben muß. Genau wie im Falle A. unterscheiden wir jetzt die vier Unterfälle:

V. $\star \mathcal{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und unendlich viele -1 .

VI. $\star \mathcal{D}$ enthält endlich viele $+1$ und unendlich viele -1 .

VII. $\star \mathcal{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und endlich viele -1 .

VIII. $\star \mathcal{D}$ enthält endlich viele $+1$ und endlich viele -1 .

Je nach dem Vorkommen von Nullspalten in $\mathfrak{N}$ zerfällt jeder der Unterfälle V. bis VIII. selbst in vier Unterfälle:

Setzen wir

$$\mathfrak{N}_l = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\star} \\ \star \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N}_r = \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \mathfrak{E}_{\star} \end{pmatrix},$$

so sind diese Fälle:

a) $\mathfrak{N}_l$ enthält endlich viele Nullspalten,

$\mathfrak{N}_r$ enthält endlich viele Nullspalten.

b) $\mathfrak{N}_l$ enthält endlich viele Nullspalten,

$\mathfrak{N}_r$ enthält unendlich viele Nullspalten.

c) $\mathfrak{N}_l$ enthält unendlich viele Nullspalten,

$\mathfrak{N}_r$ enthält endlich viele Nullspalten.

d) $\mathfrak{N}_l$ enthält unendlich viele Nullspalten,

$\mathfrak{N}_r$ enthält unendlich viele Nullspalten.

Dieser Unterteilung entsprechend sind im Falle V. die Normalformen nach Hilfssatz 1 zu einer der folgenden Normalformen kongruent:

V.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\star\{2i-1, n+i\}} & \mathcal{D} \\ \star \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\star\{2i-1, n+i\}} \end{pmatrix},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\star\{2i-1, 2i-1\}} & \mathcal{D} \\ \star \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\star\{2i-1, 2i-1\}} \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\star\{4i-3, i\}} & \mathcal{D} \\ \star \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\star\{4i-3, i\}} \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\star\{4i-3, 2i-1\}} & \mathcal{D} \\ \star \mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\star\{4i-3, 2i-1\}} \end{pmatrix}.$$

Um dies etwa im Falle Vb) näher auszuführen: Zunächst können alle Nullspalten in den rechten Teil permutiert werden. Sodann kann durch eine homologe Permutation, die nur die Spalten des linken Teiles betrifft, die

richtige Ordnung in $*\mathcal{D}$ hergestellt werden; danach kann durch eine weitere homologe Permutation, die nur die Spalten des rechten Teiles betrifft, die endgültige Gestalt erreicht werden.

Im Falle VI. können wir durch Anwendung von Hilfssatz 2, Zusatz, eine Normalform erreichen, bei der $+1$ in $*\mathcal{D}$ überhaupt nicht mehr vorkommt, im Falle VII. eine solche, bei der -1 in $*\mathcal{D}$ nicht mehr vorkommt, und im Falle VIII. entweder (VIII. α) eine solche, bei der in $*\mathcal{D}$ keine -1 , aber mindestens eine $+1$ vorkommt, oder (VIII. β) eine solche, bei der in $*\mathcal{D}$ keine $+1$, aber mindestens eine -1 vorkommt, oder schließlich (VIII. γ) eine solche, bei der $*\mathcal{D}$ die Nullmatrix ist. In den Fällen VI. bis VIII. sind daher die Normalformen nach Hilfssatz 1 zu einer der folgenden Normalformen kongruent:

VI. (wie V., nur $*\mathcal{D}_{\{0, \infty, \infty\}}$ statt $*\mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}}$).

VII. (wie V., nur $*\mathcal{D}_{\{\infty, 0, \infty\}}$ statt $*\mathcal{D}_{\{\infty, \infty, \infty\}}$).

VIII. α .

$$a) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{*\{p+i, n+i\}} & \mathcal{D} \\ *\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}} & \mathcal{E}_{*\{p+i, n+i\}} \end{pmatrix},$$

$$p = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{*\{p+i, 2i-1\}} & \mathcal{D} \\ *\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}} & \mathcal{E}_{*\{p+i, 2i-1\}} \end{pmatrix},$$

$$p = 1, 2, \dots$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{*\{p+2i-1, i\}} & \mathcal{D} \\ *\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}} & \mathcal{E}_{*\{p+2i-1, i\}} \end{pmatrix},$$

$$p = 1, 2, \dots$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{*\{p+2i-1, 2i-1\}} & \mathcal{D} \\ *\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}} & \mathcal{E}_{*\{p+2i-1, 2i-1\}} \end{pmatrix}.$$

$$p = 1, 2, \dots$$

VIII. β . (wie VIII. α ., nur $*\mathcal{D}_{\{0, m, \infty\}}$ ($m = 1, 2, \dots$), statt $*\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}}$).

VIII. γ . (wie VIII. α ., nur $*\mathcal{D}_{\{0, 0, \infty\}}$ statt $*\mathcal{D}_{\{p, 0, \infty\}}$).

Durch das Vorangehende ist jetzt bewiesen:

Satz 7: Jede Normalform $\mathcal{N}$ ist zu einer der unter I. bis VIII. aufgeführten Normalformen kongruent.

D. Nachweis der Inkongruenz der restlichen Normalformen.

Es bleibt nun noch folgendes zu zeigen:

Satz 8: *Die unter I. bis VIII. aufgeführten Normalformen sind paarweise zueinander inkongruent.*

Die Sätze 7 und 8 zusammen besagen dann, daß die unter I. bis VIII. aufgeführten Normalformen ein kanonisches System bilden.

Der Beweis von Satz 8 wird in fünf Teile gegliedert. Im ersten dieser Teile wird eine Invariante aufgezeigt, die für die Substitutionen mit halbfiniten Koeffizientenmatrix typisch ist. Im zweiten und dritten Teil werden dagegen Invarianten nachgewiesen, die schon im endlichen Fall ein Analogon haben, nämlich der Rang, der Positivrang und der Negativrang. Im vierten und fünften Teil schließlich werden die Begriffe Positivrang und Negativrang in gewisser Weise verschärft, wie dies schon im zweiten Teil mit dem Analogon des Ranges geschehen ist; diese Verschärfungen beruhen letzten Endes auf der typischen Invariante aus dem ersten Teil des Beweises.

1. Die Gesamtheit aller linksfiniten Stellen, d. h. aller Stellen $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 | x_1, x_2, \dots)$, die nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten mit negativem Index haben, bildet den halbfiniten Raum ψ . Der Ring der halbfiniten Matrizen gehört zu diesem Raum in dem Sinne, daß eine lineare Substitution mit halbfiniten Koeffizientenmatrix auf jede Stelle aus ψ anwendbar ist und sie wieder in eine Stelle von ψ überführt. Insbesondere führt sie jede *gleichmäßig linksfinit* Menge von Stellen aus ψ wieder in eine solche über, wobei „gleichmäßig linksfinit“ heißen soll, daß für den kleinsten Index der von Null verschiedenen Koordinaten jeder Stelle der Menge eine untere Grenze existiert. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus den charakteristischen Eigenschaften einer halbfiniten Matrix.

Als Anwendung davon ergibt sich sofort die Inkongruenz der Normalformen aus I. bis IV. einerseits zu denen aus V. bis VIII. andererseits. Denn eine Normalform $\mathfrak{N}_1$ der ersten Art führt jede Menge von Stellen aus ψ in eine gleichmäßig linksfinit Menge über, während jede Normalform $\mathfrak{N}_2$ der zweiten Art eine passend ausgewählte Teilfolge $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots$ in eine nicht gleichmäßig linksfinit Folge überführt. Wäre also $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent, $\mathfrak{P}\mathfrak{N}_1\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_2$, so würde die Anwendung von $\mathfrak{N}_2$ auf diese Folge eine nicht gleichmäßig linksfinit Folge ergeben, dagegen die Anwendung von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}$ eine gleichmäßig linksfinit Menge, was einen Widerspruch bedeutet.

2. Betrachtet man das Gleichungssystem $\mathfrak{A}x = 0$, wo $\mathfrak{A}$ halbfinit ist und als Lösungen nur Stellen aus ψ zugelassen werden, so ist die Gesamtheit der Lösungen ein Teilraum von ψ . Einer zu $\mathfrak{A}$ kongruenten Matrix $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ entspricht eine Lösungsgesamtheit, welche dieselbe *Dimension* hat wie die

von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$, d. h. die Kardinalzahl der linear unabhängigen Lösungen ist die gleiche. Wenn $\mathfrak{A}$ eine Normalform ist, stimmt aber diese Kardinalzahl offenbar mit der Kardinalzahl der Menge der Nullspalten überein, womit die letztere als invariant dargetan ist. Die Lösungsgesamtheit von $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = 0$ kann aus der von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ durch Anwendung der Substitution $\mathfrak{P}^{-1}$ erhalten werden, so daß auf Grund von 1. entweder beide Lösungsgesamtheiten gleichmäßig linksfinit oder beide nicht gleichmäßig linksfinit sein müssen. Ferner kann durch die Substitution $\mathfrak{P}^{-1}$ aus einer gleichmäßig linksfiniten Menge von Stellen von unendlicher Dimension keine gleichmäßig rechtsfinite Menge erhalten werden, denn diese würde auch gleichmäßig linksfinit sein und wäre daher von endlicher Dimension, was einen Widerspruch bedeutet.

Durch diese Tatsachen ist die Inkongruenz aller derjenigen Normalformen erkenntlich, die bei der Aufstellung des Repräsentantensystems nur mit Rücksicht auf die Verteilung der Nullreihen unterschieden wurden¹⁷⁾:

3. Wir betrachten die quadratische Form

$$F_{\mathfrak{A}} = \sum_{\alpha, \lambda}^{+\infty} a_{\alpha \lambda} x_{-\alpha+1} x_{\lambda}$$

mit der nebensymmetrischen halbfiniten Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$; sie hat für jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus ψ einen wohlbestimmten Wert, denn die obige Summe hat für solche $\mathfrak{x}$ nur endlich viele Summanden. Wendet man auf $F_{\mathfrak{A}}$ die Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{P}\eta$ an, wo $\mathfrak{P}$ halbfinit ist und eine halbfinite Inverse hat, so geht $F_{\mathfrak{A}}$ in $F_{\mathfrak{B}}$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ über. Ist nun $\mathfrak{x}$ Positivstelle von $F_{\mathfrak{A}}$, d. h. ist $F_{\mathfrak{A}}$ an der Stelle $\mathfrak{x}$ aus ψ positiv, so ist $\eta = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{x}$ Positivstelle von $F_{\mathfrak{B}}$. Ist also π ein Teilraum von ψ , der mit Ausnahme der im folgenden stets auszuschließenden Stelle $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$ nur aus Positivstellen von $F_{\mathfrak{A}}$ besteht, so ist $\pi' = \mathfrak{P}^{-1}(\pi)$ ein solcher von derselben Dimension, der aus lauter Positivstellen von $F_{\mathfrak{B}}$ besteht. Der Positivrang, d. h. die maximale Dimension aller Teilräume von ψ , die aus lauter Positivstellen einer Form bestehen, ist daher eine Invariante. Ebenso ist der entsprechend erklärte Negativrang eine Invariante. Mit Hilfe dieser Tatsachen ist die paarweise Inkongruenz aller Normalformen aus 1. bis IV., soweit sie nicht schon bewiesen ist, unmittelbar einzusehen, denn bei diesen Normalformen ist der Positivrang einfach gleich der Kardinalzahl der vorkommenden $+1$ und der Negativrang gleich derjenigen der -1 .

Damit ist der Beweis von Satz 8 schon insofern geliefert, daß nur noch die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus V. bis VIII. zu beweisen ist, soweit sie nicht schon durch die Verteilung der Nullreihen verursacht wird.

¹⁷⁾ Vgl. die in Fußnote 5) erwähnte Abhandlung, Journ. f. Math. 165, wo diese Schlüsse schon vorkommen.

Zur Erledigung dieser restlichen Fragen sind die zwei folgenden Beweismethoden nötig, welche ich zwecks übersichtlicher Darstellung an Spezialfällen demonstrieren werde; es ist dann nachträglich leicht zu übersehen, daß sie auch auf alle anderen einschlägigen Fälle anwendbar sind.

4. Es werden folgende beiden Normalformen betrachtet:

$$\mathfrak{N}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\{2i-1, i\}} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D}_{\{x, 0, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\{2i-1, i\}} \end{pmatrix} \quad [\text{aus VII.}]$$

$$\mathfrak{N}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{E}}_{\{2i-1, i\}} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D}_{\{0, \infty, \infty\}} & \mathfrak{E}_{\{2i-1, i\}} \end{pmatrix} \quad [\text{aus VI.}]$$

und die ihnen entsprechenden quadratischen Formen:

$$F_1 = x_{-1}^2 + x_{-3}^2 + x_{-5}^2 + \cdots \\ + 2x_0x_1 + 2x_{-2}x_2 + 2x_{-4}x_3 + \cdots$$

$$F_2 = -x_{-1}^2 - x_{-3}^2 - x_{-5}^2 - \cdots \\ + 2x_0x_1 + 2x_{-2}x_2 + 2x_{-4}x_3 + \cdots$$

Zu jeder Positivstelle $\mathfrak{x}$ von F_2 gibt es dann eine Negativstelle $\mathfrak{x}'$ von F_2 , so daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ eine Nullstelle von F_2 von der Kürze Null ist, d. h. bei der alle Koordinaten, deren Indizes kleiner als Null sind verschwinden. Denn ist $\mathfrak{x} = (\dots, x_{-1}, x_0 | x_1, \dots)$ eine Positivstelle von F_2 , so ist $\mathfrak{x}' = (\dots, -x_{-2}, -x_{-1}, -x_0 | x_1, \dots)$ eine Negativstelle von F_2 , so daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ die behauptete Eigenschaft hat.

Wäre nun $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent, so würde aus dem obigen folgen, daß es zu jeder Positivstelle von F_1 eine Negativstelle von F_1 gibt, so daß die Summe dieser beiden eine Nullstelle von F_1 ist, deren Kürze über einer festen Grenze liegt. Denn die Stellen von der Kürze Null bilden eine gleichmäßig linksfiniten Menge, welche durch die halbfiniten Substitution wieder in eine solche übergeht.

Diese Aussage über F_1 führt aber zu einem Widerspruch. Denn ist ϱ ein ungerader negativer Index, derart daß die Kürze von e_ϱ unter die vorgenannte Grenze fällt, so gibt es zu e_ϱ , welches selbst Positivstelle von F_1 ist, keine solche Negativstelle von F_1 . Denn diese müßte gleich $-e_\varrho + \mathfrak{x}''$ sein, wo $\mathfrak{x}''$ eine Nullstelle ist, deren Kürze über der Grenze liegt. Dann ist $-e_\varrho + \mathfrak{x}''$ aber eine Positivstelle, was einen Widerspruch bedeutet.

Mit dieser Methode kann die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus V. bis VII. restlos erledigt werden, ebenso die Inkongruenz dieser zu den Normalformen aus VIII. Denn je nachdem, ob eine Form F mit unendlich vielen positiven Quadraten (VII.) oder eine solche mit unendlich vielen negativen Quadraten (VI.) vorliegt, läßt sich die invariante Aussage machen: Zu jeder Negativstelle (Positivstelle) $\mathfrak{x}$ von F gibt es eine Positivstelle (Negativ-

stelle) x' von F derart, daß $x + x'$ eine Nullstelle von F ist, deren Kürze unter einer von x unabhängigen Grenze liegt. Damit kann die Inkongruenz der Formen aus VI. bis VII. untereinander und zu denen aus V. nach dem obigen Vorbild bewiesen werden. Die Formen aus VIII. haben sogar die schärfere invariante Eigenschaft: Es gibt sowohl zu jeder Positivstelle x eine $[\leq 0]$ -Stelle x' als auch zu jeder Negativstelle x eine $[\geq 0]$ -Stelle x' derart, daß $x + x'$ eine $[\geq 0]$ -Stelle bzw. $[\leq 0]$ -Stelle ist, deren Kürze unter einer von x unabhängigen Grenze liegt. Hieraus ergibt sich die Inkongruenz der Formen aus VIII. zu denen aus V. bis VII.

Um nun schließlich zu zeigen, daß auch die Formen aus VIII. paarweise inkongruent sind, wird jetzt die zweite Beweismethode entwickelt.

5. Es werden folgende beiden Normalformen betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_* \{ \alpha + i, i \} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} \{ \alpha, 0, \infty \} & \mathfrak{E}_* \{ \alpha + i, i \} \end{pmatrix} & [\text{aus VIII. } \alpha] \\ \mathfrak{N}_2 &= \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_* \{ \beta + i, i \} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} \{ 0, \beta, \infty \} & \mathfrak{E}_* \{ \beta + i, i \} \end{pmatrix} & [\text{aus VIII. } \beta] \\ & (\alpha, \beta \text{ zwei feste natürliche Zahlen}) \end{aligned}$$

mit den ihnen entsprechenden quadratischen Formen:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_0^2 + x_{-1}^2 + \dots + x_{-\alpha+1}^2 \\ &\quad + 2x_{-\alpha}x_1 + 2x_{-\alpha-1}x_2 + 2x_{-\alpha-2}x_3 + \dots, \\ F_2 &= -x_0^2 - x_{-1}^2 - \dots - x_{-\beta+1}^2 \\ &\quad + 2x_{-\beta}x_1 + 2x_{-\beta-1}x_2 + 2x_{-\beta-2}x_3 + \dots. \end{aligned}$$

Es wird nun angenommen, daß $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent ist, also $\mathfrak{P} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{N}_2$, wo $\mathfrak{P}$ halbfinis ist und eine halbfinite Inverse hat. Diese Annahme führt dann dadurch auf einen Widerspruch, daß man den Positiv- und den Negativrang jetzt in bezug auf Teilräume von ψ betrachtet.

Unter $\varepsilon(\alpha_x, \alpha_{x+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots)$ soll dabei der Raum derjenigen linksfiniten Stellen verstanden werden, deren Koordinaten mit den Indizes $\alpha_x, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots$ ganz beliebige reelle Werte haben, während alle übrigen Koordinaten Null sind; dies ist also ein besonders einfacher gleichmäßig linksfiniter Teilraum von ψ . Wendet man auf $\varepsilon(-\beta+1, -\beta+2, \dots, -1, 0, 1, \dots)$ die Transformation $\mathfrak{P}$ an, so erhält man wieder einen Raum gleichmäßig linksfiniter Stellen. Daher gibt es einen Raum $\varepsilon(\delta, \delta+1, \dots, -1, 0, 1, \dots)$, welcher sowohl diesen Raum als auch den Raum $\varepsilon(-\alpha+1, -\alpha+2, \dots, -1, 0, 1, \dots)$ enthält. Er soll ϱ_1 heißen, während der Raum $\mathfrak{P}^{-1}(\varrho_1)$ mit ϱ_2 bezeichnet wird; der letztere enthält dann sicher den Raum $\varepsilon(-\beta+1, -\beta+2, \dots, -1, 0, 1, \dots)$.

Unter dem Positivrang von $\mathfrak{N}_1$ in bezug auf ϱ_1 versteht man nun die maximale Dimension aller Teilräume von ϱ_1 , welche aus lauter Positivstellen von F_1 bestehen. Wegen $\varrho_2 = \mathfrak{P}^{-1}(\varrho_1)$ ist dieser gleich dem Positivrang von $\mathfrak{N}_2$ in bezug auf ϱ_2 . Über den Negativrang läßt sich Entsprechendes sagen; also ist die Differenz zwischen Positivrang und Negativrang von $\mathfrak{N}_1$, beide in bezug auf ϱ_1 , die gleiche wie die entsprechende Differenz für $\mathfrak{N}_2$ in bezug auf ϱ_2 .

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß diese Differenz für $\mathfrak{N}_1$ in bezug auf ϱ_1 gleich α ist. Dazu wird der Raum aller endlichen linearen Kombinationen der Stellen

$$e_0, e_{-1}, \dots, e_{-\alpha+1}, e_{-\alpha} + e_1, e_{-\alpha-1} + e_2, \dots, e_j + e_{-\delta-\alpha+1}$$

betrachtet. Dieser ist ein $(-\delta + 1)$ -dimensionaler Teilraum von ϱ_1 , welcher aus lauter Positivstellen von F_1 besteht. Der Raum aller endlichen linearen Kombinationen der Stellen

$$e_{-\alpha} - e_1, e_{-\alpha-1} - e_2, \dots, e_j - e_{-\delta-\alpha+1}$$

ist ein $(-\delta - \alpha + 1)$ -dimensionaler Teilraum von ϱ_1 , welcher aus lauter Negativstellen von F_1 besteht. Fügt man zu diesen beiden Räumen noch den Raum $\varepsilon(-\delta - \alpha + 2, -\delta - \alpha + 3, \dots)$ hinzu, so ist offenbar jede Stelle x aus ϱ_1 als Summe je einer Stelle aus diesen drei Räumen darstellbar:

$$x = p + m + n.$$

Würde nun ein Raum aus lauter Positivstellen von F_1 mit größerer Dimension als $-\delta + 1$ in ϱ_1 enthalten sein, so würde er $-\delta + 2$ linear unabhängige Positivstellen

$$x^{(i)} = p^{(i)} + m^{(i)} + n^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, -\delta + 2)$$

von F_1 enthalten. $-\delta + 2$ Stellen $p^{(i)}$ sind aber linear abhängig; also gäbe es eine endliche, nicht identisch verschwindende lineare Kombination der $x^{(i)}$, welche nur noch die $m^{(i)}$ und die $n^{(i)}$ enthielte und damit keine Positivstelle wäre, im Widerspruch zu der obigen Annahme. Das bedeutet aber, daß der Positivrang von F_1 in bezug auf ϱ_1 genau gleich $-\delta + 1$ ist. Entsprechend zeigt man, daß der Negativrang von F_1 in bezug auf ϱ_1 genau gleich $-\delta - \alpha + 1$ ist, so daß die Differenz wirklich gleich α ist. Sie müßte also für F_2 in bezug auf ϱ_2 auch gleich α sein. Daß dies nicht der Fall und somit ein Widerspruch entsteht, soll jetzt gezeigt werden.

Zunächst ist klar, daß der Positiv- und der Negativrang von F_2 in bezug auf ϱ_2 ebenfalls endlich sind; denn ϱ_2 ist in einem Raum $\varepsilon(\gamma, \gamma + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots)$ enthalten und in bezug auf diesen sind die Ränge, wie aus dem Obigen hervorgeht, endlich; beim Übergang zu einem Teilraum werden sie aber höchstens kleiner. Nun wird ein Teilraum π von ϱ_2 betrachtet, der aus lauter Positivstellen besteht und dessen Dimension p gleich dem Positiv-

rang von F_2 in bezug auf ϱ_2 ist. Die Gesamtheit derjenigen Stellen, die aus denen von π hervorgehen, indem man darin die Vorzeichen der Koordinaten mit den Indizes 1, 2, 3, . . . umkehrt, ist dann ebenfalls ein Teilraum von ϱ_2 , weil (wie oben gesagt) alle Stellen aus $\varepsilon(-\beta + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots)$, also um so mehr die aus $\varepsilon(1, 2, \dots)$ zu ϱ_2 gehören. Dieser Teilraum ν' hat die Dimension p und besteht aus lauter Negativstellen von F_2 . Er enthält keine Stelle des Raumes $\varepsilon(-\beta + 1, -\beta + 2, \dots, -1, 0)$. Denn sonst würde π auch eine Stelle dieses Raumes enthalten haben; das geht aber nicht, da die Stellen aus ν' keine Positivstellen sind. Bildet man also den Raum ν aller derjenigen Stellen, welche als Summe einer Stelle aus ν' und einer Stelle aus $\varepsilon(-\beta + 1, \dots, -1, 0)$ darstellbar sind, so wird dessen Dimension gleich $p + \beta$ und er besteht aus lauter Negativstellen von F_2 , wie ein Blick auf das Bildungsgesetz der Stellen aus ν' lehrt. Daher ist der Negativrang von F_2 in bezug auf ϱ_2 größer oder gleich $p + \beta$, d. h. die gesuchte Differenz ist kleiner oder gleich $-\beta$. Auf keinen Fall kann sie also gleich α sein.

Für die Anwendung dieser Methode auf die übrigen einschlägigen Fälle beachte man, daß z. B. bei zwei Normalformen aus VIII. α diejenige mit der kleineren Anzahl von $+1$ in $*\mathfrak{N}$ im Beweis an die Stelle von $\mathfrak{N}_1$ zu setzen ist.

Damit ist nun auch die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus VIII. in jedem Falle gezeigt, womit der Beweis von Satz 8 abgeschlossen ist.

(Eingegangen am 3. August 1937.)

Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite par la méthode du développement des fonctions fondamentales¹⁾.

Par

Ervin Feldheim à Budapest.

Introduction.

Nous avons donné, dans un mémoire précédent²⁾, des développements pour les fonctions fondamentales de l'interpolation, qui nous ont permis de traiter différents problèmes, parmi lesquels celui de la forte convergence en moyenne des polynômes d'interpolation de Lagrange. Toutes ces recherches se rapportaient aux points fondamentaux de Tchebychef (de première espèce), c'est-à-dire aux n zéros du polynôme $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$.

Nous nous proposons d'exposer dans le présent mémoire des recherches analogues pour les points fondamentaux de Tchebychef de *seconde espèce*, qui sont les zéros du polynôme

$$(1) \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \text{avec } x = \cos\theta.$$

Ce système de points³⁾, que nous appellerons *système U*, est donné explicitement sous la forme:

$$(2) \quad x_i = \cos \frac{\pi i}{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

L'étude de ce système de points présente un certain intérêt, parce que fournit un cas des polynômes de Jacobi très facilement maniable à cause de sa forme analytique simple, où les règles de convergence relatives à diverses

¹⁾ Les principaux résultats établis dans le présent travail ont été énoncés dans une Note publiée dans les Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de l'URSS., t. 14. (1937), p. 327—331. Ils ont en outre fait l'objet d'une communication à la Société Math. de France, le 25 novembre 1936, et d'une conférence au Collège de France, le 8 janvier 1937.

²⁾ E. Feldheim, Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, et sur la forte convergence en moyenne des polynômes d'interpolation de Lagrange dans le cas des abscisses de Tchebychef, le Bulletin de la Société Math. de France. t. 65 (1937), p. 1—40 ou deux Notes des C. R. de l'acad. des SC. de Paris, t. 203 (1936), p. 650—652, 913—915.

³⁾ Ces points ont une représentation géométrique très simple: Divisons le cercle unité en $2(n+1)$ arcs égaux, par des points de division $C_0, C_1, \dots, C_n$, sur le demi-cercle, en partant du point C_0 du demi-axe positif Ox . Abaissons des perpendiculaires $C_\nu D_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) des points C_ν sur l'axe Ox . On aura $x_\nu = \overline{OD}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

questions d'interpolation ne sont plus valables, et où la convergence ne se produit effectivement pas, comme nous allons le montrer.

On connaît les travaux importants de M. Fejér⁴⁾, où il établit des théorèmes généraux pour le cas du polynôme de Jacobi correspondant aux paramètres

$$-1 \leq \alpha < 0, \quad -1 \leq \beta < 0.$$

Le polynôme $U_n(x)$ étant le polynôme de Jacobi (ou le polynôme ultrasphérique) de paramètres $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, ne rentre pas dans cette classe, et tous les problèmes doivent être étudiés complètement pour ce système particulier de points fondamentaux.

On remarque immédiatement que les points du système U ne sont pas *normalement* distribués, comme ceux de la classe des polynômes de Jacobi ci-dessus mentionnée. Il faut entendre sous cette dénomination que les *points conjugués* des points fondamentaux (c'est-à-dire les zéros X_k de la fonction fondamentale de première espèce $h_k(x)$ de l'interpolation d'Hermite) ne sont pas situés tous à l'extérieur de l'intervalle $(-1, +1)$. Il en résulte que les avantages qu'on peut tirer de cette propriété dans les cas où elle est vérifiée, pour bien de questions de convergence, ne se présenteront pas dans le cas du système U , qui forme l'objet du présent travail.

Nous diviserons notre travail en deux parties. Dans la première, après une indication rapide des définitions et notations, nous donnerons les développements des fonctions fondamentales des formules d'interpolation de Lagrange et d'Hermite en séries de polynômes $U_r(x)$, nous établirons des relations particulières, et quelques applications immédiates de ces formules.

C'est dans la deuxième partie que nous passerons à l'étude des diverses questions de convergence, et nous verrons que, contrairement aux points fondamentaux de Tchebychef de première espèce, pour lesquels nous avons trouvé⁵⁾ le résultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} dx = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

si $f(x)$ est une fonction continue, pour le système U cette propriété ne sera pas vérifiée, c'est-à-dire qu'on peut trouver une fonction continue $g(x)$ telle que, sur les points fondamentaux du système U , on ait

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(g) - g(x)]^{2r} dx = +\infty \quad (r = 1, 2, \dots).$$

⁴⁾ L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die zugehörige konjugierten Punkte, Math. Annalen 106 (1932), p. 1-55.

⁵⁾ l. c., sous ²⁾.

Pour ce qui est de l'interpolation d'Hermite, la question de la convergence des polynômes d'interpolation d'une fonction continue est entièrement résolue dans un mémoire de M. G. Szegö ⁶⁾, pour le cas général des polynômes de Jacobi. Nous traiterons, à l'aide des résultats de la première partie, la question de la convergence de quadrature par les polynômes d'interpolation d'Hermite.

Partie I.

§ 1.

Définitions.

La formule d'interpolation de Lagrange définit le polynôme $L_n(x)$ de degré au plus égal à $n - 1$ qui prend, en n points d'abscisses différentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, appelés *les points fondamentaux* de l'interpolation, les valeurs prescrites $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$(3) \quad L_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k l_k(x)$$

où la fonction fondamentale $l_k(x)$ est donnée par

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$\omega_n(x) = C \prod_{k=1}^n (x - x_k) \quad (C = \text{constante différente de } 0).$$

Si les valeurs y_k sont les valeurs que prend une fonction donnée $f(x)$ aux points fondamentaux, on a l'habitude d'écrire $L_n(f)$ au lieu de $L_n(x)$, pour mettre en évidence que la formule de Lagrange donne un polynôme d'approximation pour la fonction $f(x)$.

Si l'on veut déterminer le polynôme $X_n(x)$ de degré $2n - 1$ qui prend aux points donnés $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n$, et dont la dérivée est égale, en ces mêmes points, à $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$, on aura la formule d'interpolation d'Hermite:

$$(4) \quad X_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^n y'_k h_k(x).$$

Les fonctions fondamentales de première et de seconde espèce $h_k(x)$ et $h_k(x)$ sont données respectivement par

$$(5) \quad h_k(x) = v_k(x) l_k^2(x) = \left[1 - \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k) \right] l_k^2(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

⁶⁾ G. Szegö, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, Math. Zeitschr. 35 (1932), p. 579–602.

et

$$(6) \quad h_k(x) = (x - x_k) l_k^3(x) = \frac{1}{x - x_k} \left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)} \right]^2; \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

la fonction linéaire

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

s'appelle „le facteur linéaire caractéristique“.

On peut encore écrire la formule (4) sous la forme suivante:

$$X_n(x) = H_n(x) + \mathcal{H}_n(x)$$

avec

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k h_k(x), \quad \mathcal{H}_n(x) = \sum_{k=1}^n y'_k h_k(x).$$

$H_n(x)$ représente le polynôme de degré $2n - 1$ qui est égal, aux n abscisses d'interpolation, à $y_1, y_2, \dots, y_n$ respectivement, tandis que sa dérivée s'annule en ces mêmes points. Ce polynôme est appelé *polynôme en escalier* (la courbe $y = H_n(x)$ étant la *parabole en escalier*). De même, $\mathcal{H}_n(x)$ est le polynôme de degré $2n - 1$ qui admet n zéros aux points d'abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$, et dont la dérivée est égale en ces points à $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$. $\mathcal{H}_n(x)$ est le *polynôme d'onde* (la courbe $y = \mathcal{H}_n(x)$ étant appelée la *parabole d'onde*).

Appliquons maintenant les formules précédentes au cas particulier du système U . Alors

$$\omega_n(x) = U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = 2^n \prod_{k=1}^n \left(\cos\theta - \cos\frac{k\pi}{n+1} \right), \text{ avec } \cos\theta = x,$$

et ainsi

$$(7) \quad l_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{1 - x_k^2}{n+1} \frac{U_n(x)}{x - x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Mentionnons ici que la fonction fondamentale $l_k(x)$ admet le développement suivant ⁷⁾

$$(8) \quad l_k(x) = \frac{2(1 - x_k^2)}{n+1} \sum_{r=0}^{n-1} U_r(x_k) U_r(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Ensuite,

$$v_k(x) = \frac{1 - 3xx_k + 2x_k^2}{1 - x_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

⁷⁾ L. Fejér, Mechanische Quadraturen, etc., Math. Zeitschr. 37 (1933), p. 287—309. On peut d'ailleurs déduire ce développement de la formule générale (27) de notre travail cité sous ²⁾.

Le facteur $v_k(x)$ n'est positif, comme nous le voyons que pour $|x| < \frac{2\sqrt{2}}{3}$, et ceci prouve le fait, déjà annoncé dans l'Introduction que, pour le système U , il y a des points conjugués dans l'intervalle $(-1, +1)$. On peut montrer d'une façon analogue au cas de l'interpolation équidistante de Newton ⁸⁾, que ces points conjugués remplissent les deux intervalles $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1)$ et $(-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$ d'une manière partout dense.

§ 2.

Développements des fonctions fondamentales en séries de polynomes $U_r(x)$.

Les polynomes orthogonaux $U_r(x)$ ne possédant pas, pour le produit de deux polynomes d'indices différents, une relation de récurrence aussi simple que les polynomes $T_r(x) = \cos r\theta$ (avec $x = \cos \theta$), il serait assez compliqué de partir de la formule (8) pour arriver au développement du produit $l_i(x)l_k(x)$, dont nous aurons besoin dans nos calculs. Nous commencerons pour cette raison par le développement direct des fonctions fondamentales de l'interpolation d'Hermite, et nous en déduirons, par des relations appropriées, les autres développements nécessaires.

1° *Développement de $h_k(x)$.* Posons

$$(9) \quad h_k(x) = \sum_{r=1}^{2n} a_r^{(k)} U_{r-1}(x)$$

et cherchons les coefficients $a_r^{(k)}$. Écrivons (9) sous la forme

$$(10) \quad h_k(x) \sin \theta = \sum_{r=1}^{n+1} a_r^{(k)} \sin r\theta + \sum_{r=2}^n a_{2n+2-r}^{(k)} \sin (2n+2-r)\theta$$

Posons, dans cette formule, $\theta = \theta_i$, multiplions les deux membres par $\sin \theta_i$, et faisons la somme des deux membres par rapport à i , de 1 à n . En tenant compte de ce que

$$h_k(x_i) = 0, \text{ pour } i \neq k, \text{ et } h_k(x_k) = 1,$$

et des relations facilement vérifiables

$$\sum_{i=1}^n \sin r\theta_i \sin s\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{pour } r \neq s \\ \frac{n+1}{2}, & \text{pour } r = s, \end{cases}$$

il vient

$$(11) \quad a_r^{(k)} - a_{2n+2-r}^{(k)} = \frac{2}{n+1} \sin \theta_k \sin r\theta_k, \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

en convenant que

$$a_{2n+1}^{(k)} = 0.$$

⁸⁾ l. c., sous ⁴⁾, p. 54. La démonstration de cette proposition a été développée par M. P. Turán.

On voit alors immédiatement que

$$a_1^{(k)} = \frac{2}{n+1} \sin^2 \theta_k$$

On peut encore obtenir une autre relation entre les coefficients $a_r^{(k)}$, en tenant compte, par exemple, de ce que

$$h'_k(x_i) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous indiquerons seulement la marche à suivre. Substituons dans (10) le coefficient $a_{2n+2-r}^{(k)}$ par son expression tirée de (11), faisons $\theta = \theta_i$, et multiplions les deux membres par $2 \sin \theta_i$, par exemple. En groupant les termes de même argument, on aura la relation

$$\begin{aligned} h_k(x_i) \sin 2 \theta_i &= a_1^{(k)} \sin 2 \theta_i + 2(n+1) \sum_{r=3}^{n+1} a_{r-1}^{(k)} \sin r \theta_i \\ &\quad - 2(n+1) \sum_{r=1}^{n-1} a_{r+1}^{(k)} \sin r \theta_i + (n+1) a_{n+1}^{(k)} [\sin(n+2) \theta_i - \sin n \theta_i] \\ &\quad - \frac{2 \sin \theta_k}{n+1} \sum_{r=3}^{n+1} (2n+3-r) \sin(r-1) \theta_k \sin r \theta_i \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta_k}{n+1} \sum_{r=1}^{n-1} (2n+1-r) \sin(r+1) \theta_k \sin r \theta_i. \end{aligned}$$

On en déduit, par la même méthode que nous avons employée pour obtenir la première relation, que

$$(12) \quad a_{r+1}^{(k)} - a_{r-1}^{(k)} = \frac{2(2n+2-r)}{(n+1)^2} \sin^2 \theta_k \cos r \theta_k - \frac{2}{(n+1)^2} \sin 2 \theta_k \sin r \theta_k, \\ (r = 2, 3, \dots, n).$$

Les deux relations (11) et (12) permettent alors de trouver l'expression générale des coefficients $a_r^{(k)}$:

$$a_r^{(k)} = \frac{2n+1-r}{(n+1)^2} \sin \theta_k \sin r \theta_k - \frac{1}{(n+1)^2} [\cos(2-\alpha) \theta_k - \cos(r-1) \theta_k],$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}.$$

Le développement de la fonction fondamentale de première espèce $h_k(x)$ est donc le suivant:

$$(13) \quad h_k(x) = \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{2n-1} (2n-r) U_r(x_k) U_r(x) \\ - \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{2n-1} [\cos(1+\alpha) \theta_k - \cos r \theta_k] U_r(x),$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}.$$

Dans le cas des abscisses de Tchebychef de première espèce nous avons remarqué que les fonctions fondamentales $h_k(x)$ ont une propriété intéressante: elles se présentent comme la moyenne arithmétique des sommes partielles d'une série trigonométrique ⁹⁾. Pour le système U , comme nous le voyons, $h_k(x)$ est la différence de deux sommes, dont la première correspond (elle lui est proportionnelle) à cette moyenne arithmétique dont nous venons de parler.

Considérons, en effet, la série infinie

$$S = \frac{2 \sin^2 \theta_k}{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} U_r(x_k) U_r(x),$$

et soit

$$s_n(x_k) = \frac{2 \sin^2 \theta_k}{n+1} \sum_{r=0}^n U_r(x_k) U_r(x)$$

la somme partielle d'ordre n de cette série. (Remarquons que, d'après (8), on a $l_k^{(n)}(\cos \theta) = s_{n-1}(x_k)$). La formule (13) montre alors que

$$h_k(x) = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{2n-1}}{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{2n-1} [\cos(1+\alpha)\theta_k - \cos r\theta_k] U_r(x),$$

où

$$\alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}.$$

2° Développement de $h_k(x)$. Écrivons le polynome $h_k(x)$, de degré $2n-1$, sous la forme suivante:

$$(14) \quad h_k(x) = \sum_{r=1}^{2n-1} b_r^{(k)} U_r(x).$$

Ce développement n'a pas de terme absolu car, comme nous le savons, l'intégrale de $h_k(x)$, prise avec le poids correspondant, est nulle:

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0,$$

pour le système U de points fondamentaux.

Les relations (6) et (7) montrent que

$$h_k(x) = \frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} \frac{U_n^2(x)}{x - x_k}$$

⁹⁾ Voir notre mémoire cité sous ²⁾, formule (83), § 8.

donc, d'après (14),

$$\frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} U_n^2(x) = \sum_{r=1}^{2n-1} b_r^{(k)} (x - x_k) U_r(x),$$

qui, tenant compte de la relation

$$(15) \quad 2x U_r(x) = U_{r+1}(x) + U_{r-1}(x)$$

devient

$$\sum_{r=0}^{2n} \left[\frac{b_{r+1}^{(k)} + b_{r-1}^{(k)}}{2} - x_k b_r^{(k)} \right] U_r(x) = \frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} U_n^2(x),$$

avec la convention que

$$b_{-1}^{(k)} = b_0^{(k)} = b_{2n}^{(k)} = b_{2n+1}^{(k)} = 0.$$

La méthode de Fourier donne alors

$$\frac{b_{r+1}^{(k)} + b_{r-1}^{(k)}}{2} - \cos \theta_k \cdot b_r^{(k)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} \int_{-1}^{+1} U_n^2(x) U_r(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} U_n^2(x) U_r(x) \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^\pi \frac{\sin^2(n+1)\theta \sin(r+1)\theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta} d\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{\sin[2(n+1) + (r+1)]\theta}{\sin \theta} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{\sin[2(n+1) - (r+1)]\theta}{\sin \theta} d\theta, \end{aligned}$$

et l'on sait que

$$\int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \pi, & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1} U_n^2(x) U_r(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } r \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc la relation de récurrence

$$(16) \quad b_{r+1}^{(k)} + b_{r-1}^{(k)} - 2 \cos \theta_k \cdot b_r^{(k)} = \begin{cases} \frac{2 \sin^4 \theta_k}{(n+1)^2}, & \text{pour } r \text{ pair,} \\ 0, & \text{pour } r \text{ impair.} \end{cases}$$

Ces formules ressemblent beaucoup à la relation de récurrence (15) relative aux polynômes $U_r(x)$, ce qui nous donne l'idée de chercher le coefficient $b_r^{(k)}$ sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes $U_r(x)$ au point $x = x_k$. Un calcul simple d'identification donne qu'on a effectivement

$$b_{2s-1}^{(k)} = \frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{p=0}^{s-1} U_{2p}(x_k),$$

$$(s = 1, 2, \dots, n).$$

$$b_{2s}^{(k)} = \frac{\sin^4 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{p=0}^{s-1} U_{2p+1}(x_k),$$

On peut effectuer les sommations, et l'on trouve que

$$(17) \quad \begin{cases} b_{2s-1}^{(k)} = \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} [1 - \cos 2s \theta_k], \\ b_{2s}^{(k)} = \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} [\cos \theta_k - \cos (2s+1) \theta_k], \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Écrivons enfin le développement des fonctions fondamentales $h_k(x)$:

$$(18) \quad h_k(x) = \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{2n-1} [\cos r \theta_k - \cos (r+1) \theta_k] U_r(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}.$$

3° *Une identité générale.* Le développement du produit $l_i(x) l_k(x)$ se déduira immédiatement de la formule (18), à l'aide d'une identité que nous établirons dans la suite. La fonction $l_i(x) l_k(x)$ (pour $i \neq k$) est un polynôme de degré $2n-2$, qui s'annule aux n abscisses d'interpolation $x_1, x_2, \dots, x_n$, et dont la dérivée s'annule également en ces points, sauf en x_i et x_k , où elle est égale respectivement à $l'_i(x_i)$ et $l'_i(x_k)$. Si nous appliquons à ce polynôme la formule d'interpolation d'Hermite (4), nous aurons l'identité

$$(19) \quad l_i(x) l_k(x) = l'_k(x_i) h_i(x) + l'_i(x_k) h_k(x) \quad (i \neq k).$$

Remarquons que cette relation est valable pour tout système de points fondamentaux d'interpolation.

4° *Développement du produit $l_i(x) l_k(x)$.* Nous voyons que, pour obtenir ce développement, nous n'avons qu'à substituer dans (19) les valeurs de $l'_k(x_i)$ et $l'_i(x_k)$, de même que le développement (18).

Pour les points fondamentaux du système U , on a

$$(20) \quad \begin{cases} l'_k(x_i) = (-1)^{i+k} \frac{1}{\cos \theta_i - \cos \theta_k} \frac{\sin^2 \theta_k}{\sin^2 \theta_i}, \\ l'_i(x_k) = -(-1)^{i+k} \frac{1}{\cos \theta_i - \cos \theta_k} \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_k}, \end{cases}$$

donc

$$l_i(x) l_k(x) = \frac{(-1)^{i+k}}{\sin^2 \theta_i \sin^2 \theta_k (\cos \theta_i - \cos \theta_k)} \sum_{r=1}^{2n-1} [\sin^4 \theta_k b_r^{(i)} - \sin^4 \theta_i b_r^{(k)}] U_r(x),$$

et finalement,

$$(21) \quad l_i(x) l_k(x) = \frac{(-1)^{i+k}}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{2n-1} c_r^{(i,k)} U_r(x) \quad (i \neq k)$$

avec

$$(22) \quad c_r^{(i,k)} = \frac{\sin^2 \theta_k [\cos \alpha \theta_i - \cos(r+1) \theta_i] - \sin^2 \theta_i [\cos \alpha \theta_k - \cos(r+1) \theta_k]}{\cos \theta_i - \cos \theta_k} \quad (i \neq k)$$

et

$$\alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}$$

5° Développement de $l_k^2(x)$. Il résulte de (5) et (6) que l'on a toujours

$$l_k^2(x) = h_k(x) + \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} h_k(x),$$

ce qui prend, dans notre cas, la forme

$$(23) \quad l_k^2(x) = h_k(x) + \frac{3 \cos \theta_k}{\sin^2 \theta_k} h_k(x).$$

Cette identité nous servira beaucoup dans la suite. Le développement de $l_k^2(x)$ se déduit donc de ceux des fonctions fondamentales de l'interpolation d'Hermite, donnés par (13) et (18):

$$\begin{aligned} l^2(x) &= \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{2n-1} (2n-r) U_r(x_k) U_r(x) \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^{2n-1} [\cos(1+\alpha) \theta_k - \cos r \theta_k] U_r(x) \\ &\quad + \frac{3 \cos \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{2n-1} [\cos \alpha \theta_k - \cos(r+1) \theta_k] U_r(x), \text{ où } \alpha = \frac{1 + (-1)^r}{2}. \end{aligned}$$

Nous ne ferons d'ailleurs pas usage de ce développement, parce que les évaluations nécessaires se déduisent de (23) d'une façon plus rapide et plus simple.

§ 3.

Applications des développements précédents.

1° On connaît les relations

$$\sum_{k=1}^n l_k(x) = 1,$$

et

$$(24) \quad \sum_{k=1}^n h_k(x) = 1,$$

valables pour toute valeur de x , et pour tout système de points fondamentaux. Ces identités peuvent être très facilement vérifiées à l'aide de nos formules (8) et (13). Pour ce qui est de la somme des fonctions fondamentales de seconde espèce $h_k(x)$ de l'interpolation d'Hermite, il n'existe pas une telle formule générale. Nous calculerons cette somme, pour le système U , en nous servant du développement (18).

Écrivons cette formule en y séparant les termes d'indices pairs et impairs:

$$h_k(x) = \frac{\sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \left\{ \sum_{r=1}^n (1 - \cos 2r\theta_k) U_{2r-1}(x) + \sum_{n=1}^{n-1} [\cos \theta_k - \cos(2r+1)\theta_k] U_{2r}(x) \right\}.$$

D'autre part,

$$\sin^2 \theta_k = \frac{1 - \cos 2\theta_k}{2},$$

et

$$(25) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n \cos(2s-1)\theta_k = 0, \\ \sum_{k=1}^n \cos 2s\theta_k = -1, \quad \text{pour } 0 < s \leq n. \end{cases}$$

de sorte que, après quelques calculs, nous aurons

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = \frac{1}{4(n+1)} \{U_1(x) + U_{2n-1}(x) + 2 \sum_{r=1}^n U_{2r-1}(x)\}.$$

Or,

$$\sum_{r=1}^n U_{2r-1}(x) = \sum_{r=1}^n \frac{\sin 2r\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = U_n(x) U_{n-1}(x),$$

et

$$U_1(x) + U_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2\theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin(n+1)\theta \cos(n-1)\theta}{\sin \theta} = 2 U_n(x) T_{n-1}(x),$$

où l'on a posé, d'après la notation habituelle,

$$\cos(n-1)\theta = T_{n-1}(x), \quad \text{avec } x = \cos \theta.$$

On aura donc finalement¹⁰⁾

$$(26) \quad \sum_{k=1}^n h_k(x) = \frac{U_n(x) [U_{n-1}(x) + T_{n-1}(x)]}{2(n+1)}.$$

¹⁰⁾ Il est d'ailleurs assez simple de vérifier cette relation par un calcul direct. On a, d'après (6),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h_k(x) &= \frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-x_k^2)^2}{x-x_k} \\ &= \frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \left[(1-x^2)^2 \frac{1}{x-x_k} + 2(1-x^2)(x+x_k) + (x+x_k)^2(x-x_k) \right]. \end{aligned}$$

Nous avons déjà rappelé que

$$(27) \quad \int_{-1}^{+1} h_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et ainsi évidemment

$$\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} h_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0.$$

La formule (26) montre que l'on a aussi

$$\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

2° La somme des carrés des fonctions fondamentales

$$\sum_{k=1}^n l_k^2(x) = l_1^2(x) + l_2^2(x) + \dots + l_n^2(x),$$

de l'interpolation de Lagrange joue un rôle important dans beaucoup de questions de convergence. Nos résultats précédents permettent de l'évaluer, dans le cas du système U d'une façon très simple.

Mais,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} = \frac{U'_n(x)}{U_n(x)}, \quad \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^3 = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{n-1}{2},$$

donc

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = \frac{U_n^2(x)}{n+1} \left[(1-x^2)^2 \frac{U'_n(x)}{U_n(x)} + nx(1-x^2) + \frac{n+1}{2}x \right].$$

L'équation différentielle, et les relations de récurrence connues des polynômes $U_n(x)$ permettent d'écrire, après quelques transformations, que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h_k(x) &= \frac{1}{2(n+1)} [2x(1-x^2) U_n^2(x) - (1-x^2) 2 U_n(x) T_{n+1}(x) + x U_n^2(x)] \\ &= \frac{1}{2(n+1)} [2(1-x^2) U_n(x) U_{n-1}(x) + x U_n^2(x)] \\ &= \frac{U_n(x)}{2(n+1)} [2(1-x^2) U_{n-1}(x) + x U_n(x)] = \frac{U_n(x)}{2(n+1)} [U_{n-1} + T_{n-1}] \end{aligned}$$

ce qui est identique à (26)

On aurait pu exprimer cette somme uniquement par des polynômes $U_n(x)$:

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = \frac{U_n(x) [3 U_{n-1}(x) - U_{n-3}(x)]}{4(n+1)}.$$

En partant de la relation (23), et en nous rappelant l'identité (24), nous aurons

$$\sum_{k=1}^n l_k^3(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{3 \cos \theta_k}{\sin^3 \theta_k} h_k(x).$$

Alors, si on y remplace $h_k(x)$ par son développement (18), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n l_k^3(x) = 1 + \frac{3}{2(n+1)^2} & \left\{ \sum_{r=1}^n U_{2r-1}(x) \sum_{k=1}^n 2 \cos \theta_k (1 - \cos 2r\theta_k) \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^{n-1} U_{2r}(x) \sum_{k=1}^n 2 \cos \theta_k [\cos \theta_k - \cos (2r+1)\theta_k] \right\} \end{aligned}$$

et il résulte des formules (25) que

$$(28) \quad \sum_{k=1}^n l_k^3(x) = 1 + \frac{3}{2(n+1)} \sum_{r=1}^{n-1} U_{2r}(x) = 1 + \frac{3}{2(n+1)} [U_{n-1}^3(x) - 1].$$

On voit que cette somme n'est pas bornée dans tout l'intervalle $(-1, +1)$. En effet, pour $x = \pm 1$,

$$U_{n-1}^3(\pm 1) = n^2,$$

et ainsi

$$(29) \quad \sum_{k=1}^n l_k^3(\pm 1) = 1 + \frac{3(n-1)}{2} = \frac{3n-1}{2},$$

c'est-à-dire augmente indéfiniment avec n .

Mais si l'on considère un intervalle intérieur $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, on aura certainement

$$U_{n-1}^3(x) \leq \frac{1}{2\varepsilon}$$

(ε étant une constante positive fixe, indépendante de n , aussi petite qu'on le veut); alors, d'après (28),

$$\sum_{k=1}^n l_k^3(x) \leq 1 + \frac{3}{2(n+1)} \left[\frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right] = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [l_1^3(x) + l_2^3(x) + \dots + l_n^3(x)] = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x = -1 \\ 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ +\infty, & \text{si } x = +1. \end{cases}$$

On peut encore déduire de (28) une autre relation, dont nous aurons besoin plus tard.

Etant donné que

$$U_{n-1}^2(x) - 1 = \sum_{r=1}^{n-1} U_{2r}(x),$$

on aura

$$\int_{-1}^{+1} [U_{n-1}^2(x) - 1] dx = \sum_{r=1}^{n-1} \int_{-1}^{+1} U_{2r}(x) dx = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{2}{2r+1},$$

de sorte que

$$(30) \quad \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} l_k^2(x) dx = 2 + \frac{3}{n+1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r+1}$$

On sait que $\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r+1} = O(\log n)$, et il en résulte que le second membre de (30) reste borné pour $n \rightarrow \infty$.

3° Nous avons trouvé¹¹⁾, dans le cas des abscisses de Tchebycheff de première espèce ($x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \dots, n$), appelé système T , les relations intéressantes:

$$(31) \quad \int_0^\pi l_i^3(\theta) l_k^3(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2n^3} [l_i'^3(\theta_i) + l_i'^3(\theta_k)] \quad (i \neq k)$$

et

$$(32) \quad \int_0^\pi l_i^3(\theta) l_p(\theta) l_q(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2n^3} l_p'(\theta_i) l_q'(\theta_i) \quad (i \neq p \neq q)$$

(où les dérivations se rapportent à θ).

Ces formules résultaient du calcul direct des intégrales figurant aux premiers membres, et de la comparaison du résultat avec les valeurs des seconds membres. Or, l'identité générale (19) permet de retrouver très facilement ces formules, et l'on ne fera usage dans la démonstration que de deux résultats antérieurs, d'ailleurs facilement vérifiables.

En effet, élevons au carré les deux membres de (19):

$$l_i^2(x) l_k^2(x) = l_i'^2(x_i) h_i^2(x) + 2 l_i'(x_i) l_i'(x_k) h_i(x) h_k(x) + l_i'^2(x_k) h_k^2(x),$$

d'où, en tenant compte de l'orthogonalité des fonctions fondamentales $h_k(x)$ du système T (relation (88) du travail cité), ainsi que de la formule (93):

$$\int_{-1}^{+1} h_k^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3} (1-x_k^2),$$

¹¹⁾ Voir notre mémoire cité sous ²⁾.

on aura

$$\int_{-1}^{+1} l_i^2(x) l_k^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3} [(1-x_i^2) l_k'^2(x_i) + (1-x_k^2) l_i'^2(x_k)]. \quad (i \neq k).$$

Si l'on y fait $x = \cos \theta$, on retrouve la relation (31).

Ecrivons de même l'identité (19) pour deux couples d'indices (i, p) et (i, q) où $i \neq p \neq q$, et faisons leur produit :

$$l_i^2(x) l_p(x) l_q(x) = l_p'(x_i) l_q'(x_i) h_i^2(x) + l_i'(x_p) l_q'(x_i) h_i(x) h_p(x) \\ + l_i'(x_q) l_p'(x_i) h_i(x) h_q(x) + l_i'(x_p) l_i'(x_q) h_p(x) h_q(x).$$

En appliquant les mêmes formules que tout à l'heure, il vient

$$\int_{-1}^{+1} l_i^2(x) l_p(x) l_q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3} (1-x_i^2) l_p'(x_i) l_q'(x_i) \quad (i \neq q \neq p),$$

et en y faisant encore $x = \cos \theta$, on aura la formule (32).

Partie II.

§ 1.

Interpolation de Lagrange.

1° Nous passerons en revue, pour commencer, quelques résultats sur la convergence du procédé d'interpolation et de la quadrature mécanique.

On sait, depuis les recherches importantes de Runge, et surtout de G. Faber¹²⁾ que, quels que soient les points fondamentaux

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$$

de l'interpolation, on peut trouver toujours une fonction continue $f(x)$, pour laquelle la suite des paraboles d'interpolation de Lagrange

$$L_1(f), L_2(f), \dots, L_n(f), \dots$$

ne sera pas uniformément convergente.

Ce problème a été repris récemment par M. G. Grünwald. Il a donné, dans le cas des abscisses de Tchebychef de première espèce (système T) une méthode pour la construction effective de la fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange est divergente (et même, ne reste pas bornée), en presque tous les points de l'intervalle considéré.

¹²⁾ G. Faber, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, Jahresber. der D. Math. Ver. **23** (1914), p. 192—210.

Il a énoncé aussi (sans démonstration), le théorème analogue pour les points fondamentaux du système U . Voici ce théorème:

„Il existe dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$ une fonction continue $f(x)$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange appartenant aux points fondamentaux du système U ($x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$) est divergente (et même, ne reste pas bornée) en presque tous les points de l'intervalle fermé $(-1, +1)$, c'est-à-dire que les points de convergence (s'il en existe) forment un ensemble de mesure nulle¹³⁾.“

On sait que si l'on considère une fonction $f(x)$, bornée dans $(-1, +1)$, et si l'on désigne par M le maximum du module de $f(x)$ dans cet intervalle, on aura

$$|L_n(x)| < cM \log n \quad (c = \text{constante}).$$

Mais, si $f(x)$ est soumis à une certaine hypothèse restrictive, on peut trouver un intervalle partiel de $(-1, +1)$, dans lequel la suite des $L_n(x)$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$. Mentionnons, par exemple le théorème suivant, démontré par M. P. Turán:

Soit ε un nombre positif donné, arbitrairement petit. Si l'on a, dans l'intervalle $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, pour des h suffisamment petits,

$$|f(x+h) - f(x)| = o\left(\frac{1}{\log |h|}\right),$$

la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange $L_n(x)$ converge vers la fonction $f(x)$, et cela uniformément dans l'intervalle $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Pour ce qui est de la convergence de quadrature, nous savons, d'après M. Fejér¹⁴⁾, que l'on a, sur le système U , et pour toute fonction bornée et intégrable au sens de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} L_n(f) dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

Ceci résulte du fait que les «nombres de Cotes»

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

sont, pour ce système U , tous positifs.

¹³⁾ G. Grünwald, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, Acta Szeged. t. VII (1935), p. 207–221. Il a démontré tout dernièrement, dans un travail publié dans les Annals of Math., qu'il existe une fonction continue $f(x)$ dont la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange est divergente en tout point de l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, lorsque les points fondamentaux de l'interpolation appartiennent au système T .

¹⁴⁾ L. Fejér, Mechanische Quadraturen mit positiven Coteschen Zahlen, Math. Zeitschr. 37 (1933), p. 287–309.

2° Etude de la convergence de l'intégrale du carré de l'écart:

$$(33) \quad J_n^{(2)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 dx.$$

Ici nous trouverons des résultats tout à fait différents que dans le cas des abscisses de Tchebychef de première espèce (système T). Pour ce dernier système, on a¹⁵⁾, pour toute fonction continue (et aussi, pour toute fonction bornée et intégrable au sens de Riemann)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^{(2)} = 0, \quad \text{sur le système } T.$$

Nous verrons que, contrairement, il existe une fonction continue pour laquelle

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_n^{(2)} = +\infty, \quad \text{sur le système } U.$$

Autrement dit, sur le système U , la convergence en moyenne des polynômes d'interpolation de Lagrange ne sera pas vérifiée.

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur une identité qu'il est très facile à démontrer. On a

$$(34) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} l_k(x) \equiv U_{n-1}(x),$$

pour le système U des points fondamentaux de l'interpolation.

En effet, d'après (7):

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} l_k(x) = \frac{U_n(x)}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1-x_k^2}{x-x_k} = \frac{U_n(x)}{n+1} \sum_{k=1}^n \left[(1-x^2) \frac{1}{x-x_k} + x + x_k \right].$$

Les formules employées dans la note¹⁰⁾ montrent que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} l_k(x) = \frac{1}{n+1} [(1-x^2) U_n'(x) + n x U_n(x)].$$

Or,

$$(1-x^2) U_n'(x) = x U_n(x) - (n+1) T_{n+1}(x)$$

donc

$$\begin{aligned} (1-x^2) U_n'(x) + n x U_n(x) &= (n+1) [x U_n(x) - T_{n+1}(x)] \\ &= (n+1) \left[\cos \theta \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \cos(n+1)\theta \right], \end{aligned}$$

¹⁵⁾ P. Erdős et P. Turán, Quadrature and Mean-Convergence in the Lagrange-Interpolation, *Annals of Mathematics*, t. 38 (1937), p. 142-155.

e sorte que finalement, on a bien

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} l_k(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = U_{n-1}(x).^{16)}$$

Il résulte de cette formule que

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k l_k(x) \right\}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} l_i(x) l_k(x) = U_{n-1}^2(x),$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) dx &= \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^2(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \int_{-1}^{+1} U_{2r}(x) dx = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2}{2r+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) dx > \log \frac{2n}{3}.$$

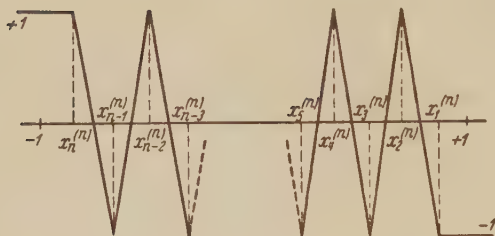


Fig. 1.

Considérons maintenant la fonction $f_n(x)$, définie de la manière suivante: Soit

$$f_n(x_r^{(n)}) = (-1)^r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

et sa courbe représentative soit la courbe ci-contre. Ici n est évidemment un nombre fixe.

¹⁶⁾ Rappelons ici une démonstration de l'identité (34) qui nous a été communiquée par M. Turán. Observons que, pour $x_r = \cos \frac{r\pi}{n+1}$,

$$U_{n-1}(x_r) = \frac{\sin n \frac{r\pi}{n+1}}{\sin \frac{r\pi}{n+1}} = (-1)^{r+1}$$

et qu'un polynome de degré $\leq n-1$ se reproduit par l'opération $L_n(f)$. On a alors

$$L_n(U_{n-1}) \equiv U_{n-1}(x)$$

ce qui n'est autre, dans notre cas, que l'identité (34).

(Ajouté à la correction des épreuves.) — Nous avons démontré, dans une Note qui paraîtra prochainement dans le Journal of the London Math. Soc. que $U_n(x)$ est le seul polynome orthogonal pour lequel l'identité (34) est vérifiée.

On voit que c'est une courbe continue, et

$$|f_n(x)| \leq 1.$$

(La figure correspond au cas où n est pair).

La formule (35) équivaut donc à écrire

$$(36) \quad \int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^2 dx > \log \frac{2n}{3}.$$

D'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver pour $f_n(x)$ un polynôme d'approximation $\varphi_m(x)$, de degré $m = m(n)$, tel que

$$(37) \quad |\varphi_m(x)| \leq \frac{3}{2}, \quad \text{pour } |x| \leq 1$$

et

$$(38) \quad \int_{-1}^{+1} L_n(\varphi_m)^2 dx > \frac{1}{2} \log \frac{2n}{3}, \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Définissons maintenant¹⁷⁾ une fonction continue $f(x)$ de la façon suivante:

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_{n_v}(x),$$

avec $c_1 = n_1 = 1$, où les coefficients c_v et les indices n_v sont déterminés comme il suit:

$$(39) \quad c_{k+1} = \text{Min} \left\{ \frac{c_k}{4}, \frac{1}{\underset{|x| \leq 1}{\text{Max}} \sum_{v=1}^{n_k} |l_v^{(n_k)}(x)|} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

et n_{k+1} est le plus petit entier pour lequel

$$(40) \quad n_{k+1} > m(n_k) + 1.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$(41) \quad c_{k+1}^2 \int_{-1}^{+1} L_{n_{k+1}}(\varphi_{n_{k+1}})^2 dx - 8c_k \sqrt{2 \int_{-1}^{+1} L_{n_{k+1}}(\varphi_{n_{k+1}})^2 dx} - 16 > 4^k,$$

qui est possible, en vertu de (38).

Alors

$$c_k \leq \frac{c_{k-1}}{4} \leq \frac{c_{k-2}}{4^2} \leq \dots \leq \frac{c_1}{4^k}$$

c'est-à-dire

$$(42) \quad c_k \leq \frac{1}{4^k},$$

ce qui, avec (37), assure la continuité de $f(x)$.

¹⁷⁾ La construction suivante est en analogie avec celle du mémoire cité sous ¹⁵⁾.

Considérons maintenant une valeur entière fixe ϱ , et écrivons, en tenant compte de (40), que

$$L_{n_\varrho}(f) = \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} c_\nu \varphi_{n_\nu}(x) + c_\varrho L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho}) + \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} c_\nu L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\nu}),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} (43) \quad J_{n_\varrho}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} [L_{n_\varrho}(f) - f(x)]^2 dx \\ &= \int_{-1}^{+1} [c_\varrho L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho}) + \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} c_\nu L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\nu}) - \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} c_\nu \varphi_{n_\nu}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Mais, d'après (37) et (42),

$$\left| \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} c_\nu \varphi_{n_\nu}(x) \right| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2,$$

et

$$\left| \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} c_\nu L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\nu}) \right| \leq \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} c_\nu \cdot \frac{3}{2} \sum_{\nu=1}^{n_\varrho} |l_\nu^{(n_\varrho)}(x)|$$

de sorte que, en vertu de (39),

$$\left| \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} c_\nu L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\nu}) \right| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

On tire alors de (43) que

$$J_{n_\varrho}^{(2)} = \int_{-1}^{+1} [c_\varrho L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho}) - 4\eta]^2 dx, \quad \text{avec } |\eta| \leq 1.$$

Or, on peut écrire que

$$\begin{aligned} J_{n_\varrho}^{(2)} &> c_\varrho^2 \int_{-1}^{+1} L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho})^2 dx - 8c_\varrho \int_{-1}^{+1} |L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho})| dx - 16 \\ &> c_\varrho^2 \int_{-1}^{+1} L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho})^2 dx - 8c_\varrho \sqrt{2 \int_{-1}^{+1} L_{n_\varrho}(\varphi_{n_\varrho})^2 dx} - 16, \end{aligned}$$

ce qui montre, en tenant compte de (41), que

$$J_{n_\varrho}^{(2)} > 4^\varrho, \quad \text{avec } \varrho = 1, 2, 3, \dots$$

Nous avons donc trouvé une fonction continue, pour laquelle l'intégrale (33), sur le système U augmente indéfiniment, si le nombre des points fondamentaux devient de plus en plus grand.

Remarques. On peut déduire du développement (21) que, pour $i \neq k$,

$$\int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-1)^{i+k}}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{2n-1} c_r^{(i,k)} \int_{-1}^{+1} \frac{U_r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or,

$$(44) \quad \int_{-1}^{+1} U_r(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{pour } r \text{ impair} \\ \pi, & \text{pour } r \text{ pair,} \end{cases}$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{(-1)^{i+k}}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n-1} c_{2r}^{(i,k)},$$

et en y remplaçant les coefficients $c_{2r}^{(i,k)}$ par la valeur (22), on trouve que

$$\int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{(-1)^{i+k}}{n+1} (1 + \cos\theta_i \cos\theta_k).$$

Le second membre étant du signe de $(-1)^{i+k}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)(2n-1)}{n+1} = O(n).$$

La méthode que nous venons d'employer permet alors d'affirmer qu'il existe une fonction continue $f_1(x)$ pour laquelle, sur le système U ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{-1}^{+1} [L_n(f_1) - f_1(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Ce fait peut être généralisé. Il est très simple de démontrer qu'il existe une fonction continue $f_2(x)$ telle que, toujours sur le système U , c'est-à-dire dans le cas où les points fondamentaux de l'interpolation sont $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{-1}^{+1} [L_n(f_2) - f_2(x)]^2 \frac{dx}{(1-x^2)^\varepsilon} = +\infty,$$

ε étant un nombre positif fixe, aussi petit que l'on veut.

Nous pouvons démontrer par contre que l'on a, dans tout intervalle $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$,

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} [L_n(f) - f(x)]^2 dx = 0,$$

pour toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, si $0 < \delta < 1$.

La convergence en moyenne sera vérifiée, en effet, si l'on intègre le carré de l'écart avec le poids $\sqrt{1-x^2}$ ¹⁸⁾:

$$(46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx = 0.$$

¹⁸⁾ Indiquons brièvement la démonstration de ce résultat. Définissons, pour un $\varepsilon > 0$, fixe, un polynôme $\varphi(x)$ de degré $\leq n-1$ qui représente au sens de Weier-

Or, dans l'intervalle $(-1 + \delta, 1 - \delta)$ le poids $\sqrt{1 - x^2}$ est toujours positif, et même

$$\sqrt{1 - x^2} \geq \delta > 0,$$

ce qui permet de déduire immédiatement (45) de la relation (46).

3° *Cas d'une puissance paire quelconque de l'écart.*

Nous allons considérer dans ce qui suit les intégrales

$$J_n^{(2r)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 \sqrt{1 - x^2} dx,$$

pour une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, et sur le système de points fondamentaux U .

Prenons d'abord le cas où $r = 2$. Nous établirons que pour la puissance 4 la forte convergence en moyenne (vérifiée pour le système T) ne sera vraie, même si l'on fait l'intégration par rapport au poids $\sqrt{1 - x^2}$. Plus exactement, on pourra trouver une fonction continue $g(x)$ dans $(-1, +1)$ pour laquelle (toujours sur le système U),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(g) - g(x)]^4 \sqrt{1 - x^2} dx = +\infty.$$

Il suffit pour cela d'observer que, d'après le développement (18)

$$\int_{-1}^{+1} h_i(x) h_k(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{2n-1} b_r^{(i)} b_r^{(k)} \quad (i \neq k)$$

strass, la fonction continue $f(x)$. Posons $f(x) - \varphi(x) = \Delta(x)$. Alors $|\Delta(x)| \leq \varepsilon$, pour $|x| \leq 1$. Or,

$$L_n(f) - f(x) = L_n(\Delta) - \Delta(x),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{-1}^{+1} [L_n(\Delta) - \Delta(x)]^2 \sqrt{1 - x^2} dx \\ &\leq 2 \int_{-1}^{+1} L_n(\Delta)^2 \sqrt{1 - x^2} dx + 2 \int_{-1}^{+1} \Delta^2 \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} L_n(\Delta)^2 \sqrt{1 - x^2} dx &= \sum_{i=1}^n \Delta(x_i)^2 \int_{-1}^{+1} l_i^2(x) \sqrt{1 - x^2} dx \leq \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \int_{-1}^{+1} l_i^2(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \varepsilon^2, \\ \int_{-1}^{+1} \Delta(x)^2 \sqrt{1 - x^2} dx &\leq \varepsilon^2 \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 \sqrt{1 - x^2} dx \leq 2\pi \varepsilon^2. \quad \text{c. q. f. d.}$$

avec les expressions (17) des coefficients b_r . La sommation donne

$$\int_{-1}^{+1} h_i(x) h_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2(n+1)^3} \sin^2 \theta_i \sin^2 \theta_k (1 + \cos \theta_i \cos \theta_k), (i \neq k),$$

Appliquons maintenant notre identité (19). En tenant compte des relations (20), il vient finalement

$$(47) \quad \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) l_p(x) l_q(x) \sqrt{1-x^2} dx \\ = (-1)^{i+k+p+q} \frac{\pi}{2(n+1)^3} [(1 + \cos \theta_i \cos \theta_k)(1 + \cos \theta_p \cos \theta_q) \\ + (\cos \theta_i + \cos \theta_k)(\cos \theta_p + \cos \theta_q)] \\ \text{pour } i \neq k \neq p \neq q.$$

Or, on sait que

$$\left| \frac{\cos \theta_i + \cos \theta_k}{1 + \cos \theta_i \cos \theta_k} \right| \leq 1,$$

donc

$$(1 + \cos \theta_i \cos \theta_k)(1 + \cos \theta_p \cos \theta_q) \left[1 + \frac{\cos \theta_i + \cos \theta_k}{1 + \cos \theta_i \cos \theta_k} \cdot \frac{\cos \theta_p + \cos \theta_q}{1 + \cos \theta_p \cos \theta_q} \right] > 0$$

d'où la conclusion que

$$\text{signe de } \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) l_p(x) l_q(x) \sqrt{1-x^2} dx = (-1)^{i+k+p+q}, (i \neq k \neq p \neq q).$$

Nous n'avons alors qu'à répéter le raisonnement du n° précédent. Considérons encore la courbe $f_n(x)$ pour laquelle $f_n(x_k^{(n)}) = (-1)^k = \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). La formule (47) montre que

$$\sum_{i \neq k \neq p \neq q} \varepsilon_i \varepsilon_k \varepsilon_p \varepsilon_q \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x) l_p(x) l_q(x) \sqrt{1-x^2} dx = O(n)$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^4 \sqrt{1-x^2} dx = O(n)$$

analogue à la relation (36). Le reste de la démonstration se fait exactement de la même manière que pour le carré de l'écart.

Remarque. Pour rester en analogie complète avec le cas $r = 1$, nous mentionnons que l'on trouve le même résultat en intégrant la puissance 4 par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En effet,

$$\int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^n (-1)^i l_i(x) \right]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ = \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^4 d\theta,$$

d'après l'identité (34). On sait que

$$U_{n-1}^2(x) = \sum_{r=0}^{n-1} U_{2r}(x),$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} U_{n-1}^4(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \int_{-1}^{+1} U_{2r}(x) U_{2s}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mais,

$$U_{2r}(x) U_{2s}(x) = \begin{cases} \sum_{v=0}^{2s} U_{2r+2s-2v}(x), & \text{si } r \geq s \\ \sum_{v=0}^{2r} U_{2r+2s-2v}(x), & \text{si } r \leq s \end{cases}$$

et

$$\int_{-1}^{+1} U_{2p}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

quel que soit p . Il en résulte donc que

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^4 d\theta = \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^4(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3} n(2n^2 + 1),$$

c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3} n(2n^2 + 1),$$

ce qui suffit pour démontrer qu'il existe une fonction continue $f(x)$ dans $(-1, +1)$ pour laquelle, sur le système U ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

En appliquant la même méthode que nous avons suivie dans la remarque précédente au cas général d'exposant $2r$, on aura, pour la même fonction $f_n(x)$:

$$\int_{-1}^{+1} L_n(f_n)^{2r} dx = \int_{-1}^{+1} U_{n-1}^{2r}(x)^{2r} dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^{2r} \sin \theta d\theta.$$

Il est évident que le second membre augmente indéfiniment avec n^{19} , donc nous pouvons énoncer le résultat suivant:

¹⁹⁾ On peut voir très facilement que

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right)^{2r} \sin \theta d\theta < c n^{2r-2}, \quad \text{si } r > 1.$$

On peut trouver une fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ telle que l'on ait, sur le système de points fondamentaux U ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} dx = +\infty$$

quel que soit l'entier positif r (indépendant de n)²⁰.

§ 2.

Interpolation d'Hermite.

Le problème de la convergence des polynômes d'interpolation d'Hermite, pour le cas général des abscisses de Jacobi, a été complètement résolue, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, par M. G. Szegö, dans son mémoire cité⁶). Nous remarquons seulement que les évaluations des fonctions fondamentales qui forment la base de ses démonstrations, peuvent être facilement retrouvées à l'aide de nos développements (13) et (18).

Nous ferons toutefois deux observations. On peut démontrer d'une manière analogue à celle qu'a suivie M. Fejér dans le cas des abscisses de Tchebychef de première espèce, le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, continue dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $X_n(x)$ une fonction entière, rationnelle, de degré au plus égal à $2n - 1$, satis-

²⁰ Ce résultat est à confronter à celui de notre travail cité sous ²), § 7, d'après lequel, sur le système T ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} dx = 0,$$

pour toute fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Nous profitons de l'occasion pour remarquer ici que M. Marcinkiewicz démontre dans un travail récent (Sur l'interpolation, *Studia Math.* t. VI, 1936), et dont nous avons pris connaissance pendant la rédaction de ce travail, le théorème suivant:

Considérons une fonction $f(x)$ continue, de période 2π . On forme la série trigonométrique

$$U_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{i=1}^n [a_i^{(n)} \cos ix + b_i^{(n)} \sin ix]$$

qui prend, aux points $x_i = \frac{2\pi i}{2n+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$) les mêmes valeurs que $f(x)$.

Alors

$$\int_0^{2\pi} |U_n(f) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty, \quad \text{et } 1 \leq p < \infty.$$

Ce résultat est à rapprocher au nôtre, que nous venons de rappeler, et qui n'est pas valable pour le système U .

faisant, aux points du système U : $x_k = \cos \frac{\pi k}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) aux conditions suivantes:

$$X_n(x_k) = f(x_k) \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, \dots, n) \\ (n = 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

et

$$|X'_n(x_k)| (1 - x_k^2)^2 \leq \varepsilon_n \frac{n}{\log n}, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Alors on a uniformément dans l'intervalle $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(x) = f(x)$$

aussi petit que soit le nombre positif δ donné.

Notre deuxième observation se rapporte au comportement des polynômes en escalier, et des polynômes d'onde aux points $x = \pm 1$. On pourrait conclure du théorème *B* de M. Szegö que, pour le système U , les polynômes d'interpolation d'Hermite sont divergents en ces points, mais la proposition n'est pas directement démontrée. Nous le ferons dans la suite.

Il faut évaluer pour cela les deux sommes

$$\sum_{k=1}^n |h_k(\pm 1)| \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n |h_k(\pm 1)|.$$

La formule (5) donne, après quelques simples calculs:

$$h_k(+1) = (1 + x_k)(1 - 2x_k),$$

$$h_k(-1) = (1 - x_k)(1 + 2x_k),$$

c'est-à-dire

$$|h_k(\pm 1)| = |\cos 2\theta_k \pm \cos \theta_k|,$$

d'où

$$(48) \quad \sum_{k=1}^n |h_k(\pm 1)| \approx cn.$$

(On peut montrer par exemple que $c < \sqrt[3]{5}$.)

Ensuite

$$h_k(1) = (1 - x_k^2)(1 + x_k) > 0, \quad \sum_{k=1}^n h_k(1) = \frac{n+1}{2},$$

et

$$h_k(-1) = -(1 - x_k^2)(1 - x_k) < 0, \quad \sum_{k=1}^n |h_k(-1)| = \frac{n+1}{2},$$

de sorte que

$$(49) \quad \sum_{k=1}^n |h_k(\pm 1)| = \frac{n+1}{2}.$$

Les relations (48) et (49) donnent la démonstration de notre proposition, d'après laquelle la série des polynômes d'interpolation d'Hermite est diver-

gente aux extrémités ± 1 de l'intervalle, si les points fondamentaux appartiennent au système U .

2° *Convergence de quadrature.* Considérons d'abord le cas où l'on effectue l'intégration par rapport au poids $\sqrt{1-x^2}$. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, et soit $X_n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'interpolation d'Hermite qui lui correspond par la formule (4). En tenant compte des relations (4) et (27), il vient

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{A}_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0.$$

Nous savons, d'autre part, que

$$\int_{-1}^{+1} l_k^2(x) \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^{+1} l_k(x) \sqrt{1-x^2} dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} H_n(x) \sqrt{1-x^2} dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{-1}^{+1} l_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k^2) f(x_k) \\ &= \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{\pi k}{n+1}\right) \sin^2 \frac{\pi k}{n+1}, \end{aligned}$$

qui tend, pour $n \rightarrow \infty$, vers

$$\int_0^\pi f(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} f(x) \sqrt{1-x^2} dx,$$

de sorte qu'on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} X_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^{+1} f(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

C'est un résultat général, qui est vrai pour tous les systèmes de points fondamentaux formés par les zéros de polynômes orthogonaux.

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de quadrature par la formule d'interpolation d'Hermite. Nous aurons le théorème suivant:

On a, pour toute fonction continue $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} X_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

si les points fondamentaux de l'interpolation appartiennent au système U .

Pour démontrer ce théorème, nous devons évaluer les quantités suivantes:

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right|, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right|.$$

Le développement (18) donne immédiatement que

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x) dx = \frac{2 \sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\cos \theta_k - \cos (2r+1) \theta_k}{2r+1},$$

d'où

$$\left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right| \leq \frac{4 \sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r+1} < \frac{2 \sin^2 \theta_k}{(n+1)^2} \log 2n.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^n 2 \sin^2 \theta_k = \sum_{k=1}^n (1 - \cos 2 \theta_k) = n + 1,$$

de sorte que

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right| \leq O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Pour faire l'autre évaluation, on emploie encore l'identité

$$h_k(x) = l_k^2(x) + \frac{3 \cos \theta_k}{\sin^3 \theta_k} h_k(x).$$

Nous avons vu que

$$\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} l_k^2(x) dx = 2 + \frac{3}{n+1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{2r+1},$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} l_k^2(x) dx \leq 2 + \frac{3}{2} \frac{\log(2n-1)}{n+1} = 2 + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

En tenant compte du résultat trouvé tout à l'heure pour $h_k(x)$, on voit que

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right| < 2 + \frac{15 \log(2n-1)}{2(n+1)} - \frac{3 \log(2n-1)}{2(n+1)^2}.$$

Alors, si on suppose que

$$|X'_n(x_k)| < X \quad (\text{constante indépendante de } n)$$

on aura

$$\left| \int_{-1}^{+1} \mathcal{X}_n(x) dx \right| \leq X \sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right| \leq X \cdot O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

et cela montre que, pour $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{X}_n(x) dx \rightarrow 0.$$

Considérons alors la quantité

$$\int_{-1}^{+1} [H_n(x) - f(x)] dx = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} [f(x_k) - f(x)] h_k(x) dx.$$

Choisissons le polynome d'approximation $\varphi(x)$ de degré $m = m(n)$ convenable de $f(x)$ tel que si l'on fait

$$f(x) - \varphi(x) = \psi(x),$$

on ait

$$|\psi(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{si } |x| \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [H_n(f) - f(x)] dx &= \int_{-1}^{+1} [H_n(\psi) - \psi(x)] dx = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} [\psi(x_k) - \psi(x)] h_k(x) dx, \\ \left| \int_{-1}^{+1} [H_n(f) - f(x)] dx \right| &\leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) dx \right| \leq 2\varepsilon \left[2 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

ce qui montre que, pour $n \rightarrow \infty$

$$\int_{-1}^{+1} H_n(f) dx \rightarrow \int_{-1}^{+1} f(x) dx^{21}.$$

Remarque. Nos développements permettent d'établir très facilement que l'on a aussi

$$(51) \quad \int_{-1}^{+1} [X_n(x) - f(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 0, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

En effet, on tire des formules (13) et (18), en tenant compte de (44), que

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{n+1} \sin^2 \theta_k,$$

et

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \theta_k \cos \theta_k.$$

¹⁾ La plupart des résultats de ce § 2. ont été trouvés aussi par M. P. Turán. Ses démonstrations sont entièrement différentes des nôtres, et sont d'ailleurs beaucoup plus compliquées.

Nous voyons alors que

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} h_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

et

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} h_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right| \approx \frac{2}{3}.$$

On peut en déduire, par le raisonnement que nous venons de faire, le résultat (51), et ce résultat suffirait pour en déduire la relation (50).

Paris, le 5 décembre 1936.

(Eingegangen am 9. Dezember 1936.)

Binary Quadratic Discriminants with a Single Class of Forms in Each Genus.

By

Newman A. Hall¹⁾ in Pasadena (Calif.).

1. The form of the number of representations function for binary quadratic forms has been considered recently by Dickson²⁾ and Pall³⁾. Using the classical result of Dirichlet⁴⁾ for the number of representations by a representative set of positive primitive binary quadratic forms of given discriminant for integers prime to the discriminant, and the properties of quadratic characters, Dickson indicates for a few examples the form of the number of representations function when there is a single class of forms in each genus⁵⁾. Pall considers the number of representations of any integer by arbitrary forms and derives reduction formulae for integers not prime to the discriminant⁶⁾.

For forms of discriminant such that there is a single class in each genus, we derive Pall's reduction formulae without using the theory of composition. Using these and the methods suggested by Dickson the form of the number of representations function is given explicitly for the general case⁷⁾.

S. Chowla has shown recently that there are a finite number of discriminants for which there are a specified number of classes in each genus⁸⁾. In view of the above results of the author it is then worth while for the sake of completeness to inquire whether the known discriminants as given by Dickson⁹⁾ comprise all for which there is a single class in each genus. In partial solution of this problem we give in this paper two theorems. The first lists all such discriminants which satisfy certain congruences. The second shows that aside from ten cases given explicitly every such discriminant must contain only distinct odd prime factors. We also derive for even discriminants general tests that there be a single class in each genus. The two theorems are particularly

¹⁾ Presented to the American Mathematical Society April 3, 1937, cf. Bulletin of the American Mathematical Society **43** (1937), S. 202.

²⁾ L. E. Dickson, Introduction to the Theory of Numbers (1929), Chap. V.

³⁾ G. Pall, Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 321—343.

⁴⁾ G. L. Dirichlet, Zahlentheorie, ed. 4 (1894), S. 229.

⁵⁾ Dickson, l. c., S. 78—88.

⁶⁾ Pall, l. c., S. 330—332.

⁷⁾ N. A. Hall, Thesis (California Institute of Technology, 1938).

⁸⁾ S. Chowla, Quarterly Journal of Mathematics **5** (1934), S. 304, Theorem III.

⁹⁾ Dickson, l. c., S. 85, 89.

useful in making it possible to list separately all of certain cases in which the number of representations function takes a highly specialized form ¹⁰⁾.

Our procedure throughout is to eliminate various discriminants from consideration by exhibiting primitive reduced forms

$$(A) \quad [a, b, c], \quad c > a > b > 0, \quad \text{or} \quad a > c > b > 0,$$

such that $[a, -b, c]$ is also primitive reduced, represents the same integers, and is hence in the same genus.

2. For odd discriminant, Δ , Dickson states certain general tests that there be a single class in each genus which we shall require¹¹⁾. Write $T_k = [\Delta + (2k + 1)^2]/4$; then for zero and positive integers, k , T_k must be a prime p , its square p^2 , or, also, $T_1 = 3p$, 3^3 or 3^4 , $T_2 = 5p$, 5^2 or 5^3 , $T_3 = 7p$ or 7^2 , $T_4 = 3p$ or 99 , etc. Here, as elsewhere in this paper, we assume all primes to be positive.

A search of the literature fails to disclose the corresponding rather evident tests for even discriminant. We shall derive those which are required in the later theorems.

Let $\Delta = 4D$ and write $S_k = D + k^2$. We list below for successive integers, k , the S_k which are eliminated by the corresponding reduced forms satisfying conditions (A) whose discriminant give S_k the value stated. For S_3 we give the details of deducing the permissible values of S_k that there be a single class in each genus. The argument in the other cases is quite similar. We let (r, s, m) denote the greatest common divisor of r , s , and m .

$$\begin{aligned} S_1 &= r \cdot s, \quad r > s > 2, \quad (r, s, 2) = 1, \quad [r, 2, s], \\ S_1 &= 2^k, \quad k > 5, & [8, 6, 2^{k-3} + 1], \\ S_1 &= 2^5, & [5, 4, 7]. \end{aligned}$$

Hence S_1 must be a prime p , p^2 , $2p$, 2^3 , or 2^4 .

$$\begin{aligned} S_2 &= r \cdot s, \quad r > s > 4, \quad (r, s, 4) = 1, \quad [r, 4, s], \\ S_2 &= 3 \cdot n, \quad n > 4, & [3, 2, n - 1], \\ S_2 &= 2^k, \quad k > 8, & [32, 12, 2^{k-5} + 1], \\ S_2 &= 2^8, & [8, 4, 31], \\ S_2 &= 2^7, & [3, 2, 41]. \end{aligned}$$

Hence S_2 must be a prime p , p^2 , $2p$, $4p$, 2^4 , 2^5 , or 2^6 .

$$\begin{aligned} (1) \quad S_3 &= r \cdot s, \quad r > s > 6, \quad (r, s, 6) = 1, \quad [r, 6, s], \\ (2) \quad S_3 &= 5 \cdot n, \quad n > 6, & [5, 4, n - 1], \\ (3) \quad S_3 &= 4 \cdot n, \quad n \text{ odd} > 3, & [4, 2, n - 2], \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Hall, l. c., Pall, l. c., S. 331.

¹¹⁾ Dickson, l. c., S. 88—89.

(4) $S_3 = 3 \cdot 2^k, k > 3,$	$[8, 2, 3 \cdot 2^{k-3} - 1],$
(5) $S_3 = 2^k, k > 4,$	$[8, 2, 2^{k-3} - 1],$
(6) $S_3 = 2 \cdot 3^k, k > 4,$	$[27, 12, 2 \cdot 3^{k-3} + 1],$
(7) $S_3 = 3^k, k > 5,$	$[27, 12, 3^{k-3} + 1],$
(8) $S_3 = 2 \cdot 3^4,$	$[7, 2, 22],$
(9) $S_3 = 3^5,$	$[5, 2, 47].$

We consider exhaustively the possible forms which S_3 may take and refer to the numbered cases above to eliminate certain forms. Let $S_3 = p \cdot n$ where p is the smallest prime factor of S_3 , then $n \geq p$ or $n = 1$. If $p > 5$ or $p = 5$, S_3 is eliminated by (1) or (2) respectively unless $n = p$ or $n = 1$. If $p = 3$, let $n = q \cdot m$ where q is the smallest prime factor of $n > 3$ if such exists. Then according as $q > 5$ or $q = 5$, we eliminate by (1) or (2) unless $m = 1$. If no such q exists then $S_3 = 2^k \cdot 3^j$, and when $k > 2$, $j > 1$ we use (1). For $k = 2$ consider (3); $k = 1$, (6) and (8); $k = 0$, (5); $j = 1$, (4); $j = 0$, (7) and (9). If $p = 2$ let $n = Q \cdot m$ where Q is the smallest odd prime factor of n if such exists. Then according as $Q > 5$ or $Q = 5$ we eliminate by (1) or (2) unless $m = 1, 2$, or 3 . If $m = 2$, we use (3). If $m = 3$ proceed as when $p = 3$. If no such Q exists, $S_3 = 2^k$ and we apply (5).

Hence S_3 must be a prime p , p^2 , $2p$, $3p$, $6p$, 2^4 , 3^3 , 3^4 , $2^3 \cdot 3$, or $2 \cdot 3^3$.

$S_4 = r \cdot s, r > s > 8, (r, s, 8) = 1,$	$[r, 8, s],$
$S_4 = 7 \cdot n, n > 8,$	$[7, 6, n - 1],$
$S_4 = 5 \cdot n, n > 5, n \neq 8,$	$[5, 2, n - 3],$
$S_4 = 3 \cdot n, n > 8,$	$[3, 2, n - 5],$
$S_4 = 2^k, k > 11,$	$[128, 24, 2^{k-7} + 1],$
$S_4 = 2^{11},$	$[47, 12, 44],$
$S_4 = 2^{10},$	$[11, 4, 92],$
$S_4 = 2^9,$	$[5, 4, 100].$

Hence S_4 must be a prime p , p^2 , $2p$, $4p$, $8p$, $2 \cdot 3^2$, $3 \cdot 7$, 2^5 , 2^6 , 2^7 , or 2^8 .

$S_5 = r \cdot s, r > s > 10, (r, s, 10) = 1,$	$[r, 10, s],$
$S_5 = 7 \cdot n, n > 7, n \neq 10,$	$[7, 4, n - 3],$
$S_5 = 3 \cdot n, n > 11,$	$[3, 2, n - 8],$
$S_5 = 8 \cdot n, n \text{ odd} > 7,$	$[8, 6, n - 2],$
$S_5 = 4 \cdot n, n \text{ odd} > 7,$	$[4, 2, n - 6],$
$S_5 = 5 \cdot 2^k, k > 3,$	$[8, 2, 5 \cdot 2^{k-3} - 3].$

$$\begin{array}{ll}
S_5 = 2^k, & k > 5, & [8, 2, 2^{k-3} - 3], \\
S_5 = 2 \cdot 5^k, & k > 3, & [25, 20, 2 \cdot 5^{k-2} + 3], \\
S_5 = 5^k, & k > 3, & [25, 20, 5^{k-2} + 3], \\
S_5 = 5^3, & & [8, 4, 13].
\end{array}$$

Hence S_5 must be a prime p , p^2 , $2p$, $5p$, $10p$, 2^4 , 2^5 , 5^2 , $2^3 \cdot 5$, $2 \cdot 5^3$, $2 \cdot 3^2$, $3 \cdot 7$, $2^3 \cdot 3$, 3^3 , $3 \cdot 11$, or $2^2 \cdot 7$.

Although these tests give certain information concerning the nature of the discriminants to be retained and are quite useful in calculating tables, they cannot, as they stand, settle the problem. However, they are very helpful in the proofs of more inclusive theorems.

3. Theorem I. *For discriminants satisfying the following congruences there is more than a single class of forms in each genus.*

$$\begin{array}{ll}
\Delta \equiv 7 \pmod{16}, & \Delta \neq 7, \\
\Delta \equiv 15 \pmod{16}, & \Delta \neq 15, \\
\Delta \equiv 12 \pmod{16}, & \Delta \neq 12, 28, 60, \\
\Delta \equiv 0 \pmod{16}, & \\
\Delta \neq 16n \text{ or } 64n, & n = 1, 3, 7, 15, \\
\Delta \neq 32 \pmod{64}. &
\end{array}$$

If $\Delta \equiv 7 \pmod{8}$, $\Delta = 8k - 1$, $T_0 = 2k$ and hence are excluded all cases but $k = 1$ or 2 , that is, $\Delta = 7$ or 15 . When $\Delta \equiv 12 \pmod{16}$, $D = 4k + 3$, $S_1 = 4(k + 1)$ so all cases except $k = 0, 1, 3$ are excluded. For $\Delta \equiv 0 \pmod{16}$, $D = 2^h(2k + 1)$, $S_4 = 16[2^{h-4}(2k + 1) + 1]$ hence we have excluded all cases $h > 4$, $h = 4$ except $k = 0, 1, 3, 7$. For $\Delta = 16(2k + 1)$, $S_2 = 8(k + 1)$, excluding all cases but $k = 0, 1, 3, 7$.

Aside from considerations of the congruences which the discriminant must satisfy, the problem may also be investigated by an examination of conditions on the several factors of the discriminant. In this direction we give

Theorem II. *If the discriminant contains as a factor the square of any odd prime, there is more than a single class of forms in each genus except for the ten known cases*

$$\begin{array}{l}
\Delta = 36, 72, 100, 180, 288; \\
\Delta = 27, 75, 99, 147, 315.
\end{array}$$

In proof, let Δ be even and contain as a factor the square of the positive odd prime q . Write $\Delta = 4q^2(r \cdot s - 1)$. Then either $r \cdot s = 2^h q^k$, or we may choose r as a positive odd prime distinct from q . In the latter case we consider the primitive form $[r, 2|cr - q|, sq^2 + c(cr - 2q)]$, where $c \geq 0$ is chosen so that $q = cr \pm b$, $0 < b < r/2$. Conditions (A), § 1, are clearly

satisfied when $r < sq^2 + c(cr - 2q)$. If $r > sq^2 + c(cr - 2q)$ then $r > q(sq - 2c)$, and $q < r$, if $sq - 2c > 0$. But $q > cr - r/2$ by choice of c . Hence $sq > scr - sr/2 = scr - 2c - sr/2 + 2c > 2c$, $c > 1$, since $scr - 2c - sr/2 > 0$ follows from $r \geq 3 > 4c/s(2c - 1)$; and $sq \geq 3 > 2 = 2c$, $c = 1$. If $q < r/2$, $c = 0$ and $2|cr - q| < 2q < sq^2 = sq^2 + c(cr - 2q)$. If $r/2 < q < r$, $c = 1$, $r < 2q < sq^2$, and $2|cr - q| = 2r - 2q < sq^2 + r - 2q = sq^2 + c(cr - 2q)$. Hence conditions (A) are always satisfied.

If $\Delta = 4q^2(2^h q^k - 1)$, then $[q^2, 4q, 2^h q^k + 3]$ satisfies conditions (A) when $q > 3$, $k > 1$, and $h > 1$, $k = 1$. If $q = 3$ then $S_3 = 2^h 3^{k+2}$, allowing the cases $h = 1, k = 1$; $h = 0, k = 2$; $h = 0, k = 1$; and $h = 1, k = 0$; or $\Delta = 180, 288, 72$, and 36 respectively. When $h = 1, k = 1$ we use $[q + 4, 24, 2q^2 - 9q + 36]$, $q > 19$, and eliminate $q = 5, 7, 11, 13, 17, 19$ since $S_3 = 9 \cdot 26, S_1 = 11 \cdot 58, S_1 = 31 \cdot 82, S_3 = 58 \cdot 73, S_1 = 38 \cdot 251, S_2 = 31 \cdot 431$ respectively. Similarly for $h = 0, k = 1$ we use $[q + 3, 12, q^2 - 4q + 12]$ $q > 7$ eliminating $q = 5$ and 7 , by $S_2 = 8 \cdot 13$ and $S_1 = 5 \cdot 59$ respectively. Finally, if $k = 0, S_1 = q^2(2^h - 1) + 1 = 4(2^{h-2}q^2 + (1 - q^2)/4)$, $h > 1$; and when $h = 1, S_1 = q^2 + 1, S_2 = q^2 + 4$ so that $5|S_2$ for $q \equiv \pm 1 \pmod{10}$ and $5|S_1$ for $q \equiv \pm 3 \pmod{10}$, thus excluding all cases except $q = 5$, namely, $\Delta = 100$.

Again, when Δ is odd and contains as a factor the square of the positive odd prime q , we may write $\Delta = q^2(4rs - 1)$, since $\Delta \equiv -1 \pmod{4}$. Then either $rs = q^k$ or we choose r as a positive prime distinct from q . In the latter case we consider the primitive form $[r, 2cr - q, sq^2 + c(cr - q)]$, where $c \geq 0$ is chosen so that $q = 2cr \pm b, 0 < b < r$. Conditions (A) are clearly satisfied when $r < sq^2 + c(cr - q)$. If $r > sq^2 + c(cr - q)$, then $r > q(sq - c)$, and $r > q$ if $sq - c > 0$. But $q > 2cr - r$ by choice of c . Hence $sq > 2scr - sr = 2scr - c - sr + c > c, c > 0$, since $2scr - c - sr > 0$ follows from $r \geq 2 > c/s(2c - 1)$. When $r > q, c = 0$, so that $|2cr - q| = q < sq^2 = sq^2 + c(cr - q)$. Hence conditions (A) are again satisfied.

If $\Delta = q^2(4q^k - 1)$, then $[q^2, 3q, q^k + 2]$ satisfies conditions (A) when $q > 3$ and $k > 1$. If $q = 3$ then $T_1 = 3^{k+2}$, and hence by Dickson's test there are allowed only $k = 0, 1, 2$, namely, $\Delta = 27, 99, 315$. When $k = 1$ all remaining cases are eliminated by $[q + 2, q - 4, q^2 - 2q + 2]$.

Finally, when $k = 0$, namely, $\Delta = 3q^2$, we write $q = 6m + e$ where e is $+1$ or -1 as case may be, so that $\Delta = 36m(3m + e) + 3$. Then $T_0 = 9m(3m + e) + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ when $m \equiv 4e$ or $5e \pmod{7}$; $T_1 = 9m(3m + e) + 3 \equiv 0 \pmod{7}$ when $m \equiv 3e$ or $6e \pmod{7}$; $T_2 = 9m(3m + e) + 7 \equiv 0 \pmod{7}$ when $m \equiv 0$ or $2e \pmod{7}$; and $T_3 = 9m(3m + e) + 13 \equiv 0 \pmod{49}$ when $m \equiv e \pmod{7}$. When

$e = -1$ Dickson's tests eliminate all cases except $m = 1$, namely, $q = 5$, since $T_1 = 3 \cdot 7$ and is allowed. When $e = +1$ all cases are eliminated except $m = 1$, namely, $q = 7$, since $T_3 = 49$ and is allowed. These give the final two allowable odd discriminants $\Delta = 75$, $\Delta = 147$.

4. Preliminary investigations give some light on a promising approach for the complete solution of the problem of listing exhaustively all discriminants for which there is a single class in each genus. In Theorem I the direct application of the general tests for even and odd discriminants was successful in eliminating discriminants satisfying certain congruences but left untouched other discriminants. That the direct application of these tests will always leave such exceptions can be illustrated by the following case. Let $\Delta \equiv 0 \pmod{16}$ and write $\Delta = 16(n-1)$. Then $T_1 = 4n-3$, $T_2 = 4n$, $T_3 = 4n+5$, $T_4 = 4n+12$, $T_5 = 4n+21$; and T_1, T_3, T_5 give no conclusive information since, to apply them, we need to answer questions of the following type: Are there an infinite number of prime pairs p, q satisfying $p - q = 8$? Similarly T_2 and T_4 , beyond stating that n must be a prime $\equiv 3 \pmod{4}$, raise the question of the number of prime pairs p, q satisfying $2q - p = 3$. Clearly a consideration of T_k for larger k will merely bring a multiplicity of questions on the linear character of primes like the two above about which in general no exhaustive information is available. A similar situation will arise in the case of any general group of discriminants thus considered.

On the other hand, the proof of Theorem II in its essential part makes no use of a definite S_k or T_k but rather falls back directly on the basic conditions (A). Here the middle coefficient of the reduced form is not fixed as a definite integer as when specific S_k or T_k are used but rather is determined by the form of the discriminant. Thus, more generally, we can reach certain conclusions for the discriminant $\Delta = 4q(q+br)(rs-a^2)$ by considering the primitive reduced form

$$[r, 2cr - aq, sq^2 + b(rs - a^2)q + c(cr - 2aq)]$$

where c is such that $2cr - aq < r$. Again, when $\Delta = 4q(q+r)(q+s)$, some information can be obtained by considering the form

$$[q + m, 2n, q^2 + (r + s - m)q + (m - r)(m - s)]$$

m and n being integer solutions of $m(m-r)(m-s) = n^2$.

(Eingegangen am 22. Juni 1937.)

Über die Lösung von Umkehrproblemen durch Differentialresolventen¹⁾.

Von

Karl Mayr in Graz.

Die Entwicklung der Lösung einer algebraischen Gleichung $\lambda + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots \lambda_n x^n = 0$ nach Potenzen der Gleichungskoeffizienten läßt sich auf die Lösung eines Systems von $n - 1$ Differentialgleichungen zurückführen²⁾. Wir behandeln nun hier die Aufgabe, in ähnlicher Weise die Umkehrung einer Potenzreihe durchzuführen. Es handelt sich dabei im einfachsten Falle um folgende Fragestellung: $z(x)$ sei eine Potenzreihe in x mit festen Koeffizienten, für welche $z(0) = a$, $z'(0) = b$ ist. Gesucht ist jene Lösung der Gleichung

$$z(\mu x) = \lambda + \kappa x,$$

die für $\lambda = a$ verschwindet und sich in der Form

$$x = \frac{\lambda - a}{b\mu - \kappa} \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda - a)^r \varphi_r \left(\frac{\mu}{b\mu - \kappa} \right)$$

darstellen läßt. Gibt es eine lineare Differentialgleichung, die es ermöglicht, die Entwicklungsfunktionen φ_r durch ein rekurrentes Verfahren zu berechnen? Wir wollen eine solche Differentialgleichung eine Differentialresolvente (im folgenden mit D.R. bezeichnet) der vorgelegten Gleichung nennen.

Diese Frage wird zunächst für gewisse elementare Funktionen erledigt, nämlich für e^z , $\lg(1 - z)$, $\arctg z$ (§ 2). Eine weitere Fragestellung, die sich hier anschließt, bezieht sich auf Umkehrprobleme von der Form

$$z(\mu x^k, \kappa x^l, \dots) = \lambda.$$

¹⁾ Unter dem Titel: „Über die Umkehrung von Potenzreihen“ hat der Verfasser auf dem deutschen Physiker- und Mathematikertag in Kreuznach (1937) über diesen Gegenstand berichtet.

²⁾ Vgl. Karl Mayr, Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen, Monatshefte für Mathem. u. Physik **45** (1937), S. 280.

Wir beschränken uns aber hier auf solche Funktionen z , die sich als Produkt von zwei oder mehreren Exponential- bzw. Binomialreihen darstellen lassen (§ 3). Die Frage, für welche Funktionen z die Gleichung $x^m z$ (μx) $= \lambda + \kappa x$ eine D.R. besitzt, wird in § 4 untersucht. Für den Nachweis der Existenz einer D.R. genügt das Bestehen einer Differentialgleichung

$$z' = R(x, z) \quad (R \text{ rational in } x \text{ und } z).$$

Daraus ergibt sich auch, daß man nach der hier besprochenen Resolventmethode die Koeffizienten von z gar nicht zu kennen braucht; es genügt die Kenntnis von R , um die Umkehrung durchzuführen.

§ 1.

Beweis einer Differentialformel.

Für irgendeine Funktion x der Veränderlichen $\lambda, \lambda_1, \kappa, \kappa_1$, für welche

$$\frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa_1} = x^n \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \quad (n \text{ ganz, positiv})$$

ist, gilt folgende Formel³⁾:

$$(1) \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial \lambda_1 \partial \kappa^n} = \frac{\partial^{n+1} x}{\partial \kappa_1 \partial \lambda^n}.$$

Beweis. Wir schreiben statt (1):

$$(1 \text{ a}) \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial \lambda_1 \partial \kappa^n} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(x^n \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right)$$

und nehmen diese Formel, die für $n = 1$ offenbar richtig ist, für ein beliebiges n als erwiesen an. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} x}{\partial \lambda_1 \partial \kappa^{n+1}} &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial \kappa \partial \lambda^n} \left(x^n \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right), \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(n x^{n-1} \frac{\partial x}{\partial \kappa} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + x^n \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \lambda_1} \right), \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ (n+1) x^n \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + x^{n+1} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \lambda_1} \right\}, \\ (\text{wegen } \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \lambda_1} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + x \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \lambda_1}). \end{aligned}$$

³⁾ Allgemein gilt, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll, die Formel

$$\text{wenn} \quad \frac{\partial^p q_1 + q p_1 x}{\partial \kappa^q p_1 \partial \lambda_1^q} = \frac{\partial^p q_1 + q p_1 x}{\partial \kappa_1^q p_1 \partial \lambda^{q p_1}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \kappa} = x^q \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa_1} = x^{q_1} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \quad \text{ist} \quad (p, p_1, q, q_1 \text{ ganz, positiv}).$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} \left(x^{n+1} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ (n+1) \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + x^{n+1} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \lambda_1} \right\}.$$

Die beiden Ableitungen

$$\frac{\partial^{n+2} x}{\partial \lambda_1 \partial x^{n+1}} \text{ und } \frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} \left(x^{n+1} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right)$$

stimmen also überein, d. h. aber, man kann in (1a) von n zu $n+1$ übergehen, was zu beweisen war.

Einen speziellen Fall von (1) erhalten wir, wenn wir $\lambda_1 = x$ setzen. Es gilt also, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial x} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial x_1} = x^n \frac{\partial x}{\partial x} = x^{n+1} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

ist, die Formel

$$(1b) \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(x^n \frac{\partial x}{\partial x} \right) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(x^{n+1} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right).$$

§ 2.

Umkehrprobleme vom Typus $z(\mu x) = \lambda + \kappa x$.

Wir wollen hier für einige elementare Funktionen z die D.R. der vorgelegten Gleichung angeben und mit deren Hilfe die Umkehrung durchführen.

$$I. \quad e^{ux} = \lambda + \kappa x.$$

Differentiation nach den Koeffizienten λ, κ, μ ergibt für jede Lösung x dieser Gleichung:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \kappa} &= x \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} &= -x e^{\mu x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -x(\lambda + \kappa x) \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\lambda \frac{\partial x}{\partial \kappa} - \kappa x^2 \frac{\partial x}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation der zweiten Gleichung nach λ folgt — wegen (1b) ist

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(x^2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa^2} - : \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \kappa} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \kappa} + \kappa \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa^2} &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte D.R. bereits gefunden. Um nun die Umkehrfunktion zu bestimmen, die für $\lambda = 1$ verschwindet, setzen wir

$$(4) \quad x = \frac{1-\lambda}{\mu-\kappa} \sum_{r=0}^{\infty} (1-\lambda)^r \varphi_r \left(\frac{\mu}{\mu-\kappa} \right).$$

Dann folgt aus (3):

$$(5) \quad (r+2) \varphi'_{r+1} = (t^3 - t^2) \varphi''_r + (4t^2 + (r-2)t) \varphi'_r + (2t+r) \varphi_r \left(t = \frac{\mu}{\mu-\kappa} \right).$$

Für $\mu = 0$ ist $x = -\frac{\lambda}{\kappa}$, daher $\varphi_r(0) = 0$ ($r > 0$). Da ferner $\varphi_0(t) = -1$ ist, können wir mit Hilfe von (5) die φ_r fortlaufend berechnen. Wir erhalten so:

$$(6) \quad \begin{aligned} -2! \quad \varphi_1 &= t^2, \\ -3! \quad \varphi_2 &= 3t^4 - t^3, \\ -4! \quad \varphi_3 &= 15t^6 - 10t^5 + t^4, \\ -5! \quad \varphi_4 &= 105t^8 - 105t^7 + 25t^6 - t^5, \\ &\dots \end{aligned}$$

Wählen wir speziell $\mu = 1$, $\kappa = -1$, so wird $t = \frac{1}{2}$ und wir erhalten als Umkehrung der Gleichung:

$$(7) \quad 1 - \lambda + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 0$$

die Reihe:

$$(8) \quad x = \frac{1-\lambda}{2} \left\{ -1 - \frac{1-\lambda}{2!2^2} - \frac{(1-\lambda)^2}{3!2^4} + \frac{(1-\lambda)^3}{4!2^6} + \frac{13(1-\lambda)^4}{5!2^8} \right. \\ \left. + \frac{47(1-\lambda)^5}{6!2^{10}} - \frac{73(1-\lambda)^6}{7!2^{12}} - \frac{2447(1-\lambda)^7}{8!2^{14}} + \dots \right\}.$$

$$\text{II.} \quad -\lg(1 - \mu x) = \lambda - 1 + \kappa x.$$

Es ist hier

$$(9) \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda},$$

$$(10) \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{x}{\mu x - 1} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{\mu x - 1} \frac{\partial x}{\partial \kappa}.$$

Aus $\frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda} = (\mu x - 1) \frac{\partial x}{\partial \mu}$ folgt dann durch Differentiation nach λ die D.R.:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \lambda} - \mu \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \mu} + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = 0.$$

Setzen wir wieder:

$$(12) \quad x = \frac{1-\lambda}{\mu-\kappa} \sum_{r=0}^{\infty} (1-\lambda)^r \varphi_r \left(\frac{\mu}{\mu-\kappa} \right),$$

so liefert (11):

$$(13) \quad (r+2) \varphi'_{r+1} = (t^3 - t^2) \varphi''_r + (4t^2 - 2t) \varphi'_r + 2t \varphi_r \left(t = \frac{\mu}{\mu-\kappa} \right).$$

Die Berechnung der φ_r ergibt, da wieder $\varphi_0 = -1$, $\varphi_r(0) = 0$ ist:

$$(14) \quad \begin{aligned} -2! \quad \varphi_1 &= t^2, \\ -3! \quad \varphi_2 &= 3t^4 - 2t^3, \\ -4! \quad \varphi_3 &= 15t^6 - 20t^5 + 6t^4, \\ -5! \quad \varphi_4 &= 105t^8 - 210t^7 + 130t^6 - 24t^5. \\ &\dots \end{aligned}$$

Für $\mu = 1$, $\kappa = -1$ erhalten wir als Lösung der Gleichung

$$(15) \quad 1 - \lambda + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = 0:$$

$$(16) \quad x = \frac{1-\lambda}{2} \left\{ -1 - \frac{1-\lambda}{2! 2^2} + \frac{(1-\lambda)^2}{3! 2^4} + \frac{(1-\lambda)^3}{4! 2^6} - \frac{13(1-\lambda)^4}{5! 2^8} \right. \\ \left. + \frac{47(1-\lambda)^5}{6! 2^{10}} + \frac{73(1-\lambda)^6}{7! 2^{12}} - \frac{2447(1-\lambda)^7}{8! 2^{14}} + \dots \right\}^4.$$

$$\text{III.} \quad \operatorname{arctg} \mu x = \lambda + \kappa x.$$

Durch Differentiation bestätigt man sofort die Gleichungen:

$$(17) \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda},$$

$$(18) \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \kappa} = -\mu^2 x^2 \frac{\partial x}{\partial \mu}.$$

Differenziert man (18) zweimal nach λ und beachtet, daß wegen (1a)

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(x^2 \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial^3 x}{\partial \kappa^2 \partial \mu}$$

ist, so ergibt sich die D.R.

$$(19) \quad -\mu^2 \frac{\partial^3 x}{\partial \kappa^2 \partial \mu} = \frac{\partial^3 x}{\partial \kappa \partial \lambda^2} + \frac{\partial^3 x}{\partial \mu \partial \lambda^2}.$$

Setzen wir

$$(20) \quad x = \frac{\lambda}{\mu - \kappa} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \varphi_r \left(\frac{\mu}{\mu - \kappa} \right),$$

⁴⁾ Die zunächst überraschende Tatsache, daß in (8) und (16) also für die Umkehrfunktionen von $e^x + x - 1 = u$ und $x' - \lg(1 - x') = v$ die Koeffizienten dem Betrag nach übereinstimmen, findet durch eine Bemerkung, die ich Herrn H. Kneser verdanke, eine einfache Erklärung. Setzt man nämlich $e^x - 1 = -x'$, so wird $x = \lg(1 - x') = x' - v$, daher $u = e^x + x - 1 = -v$. Ist also $x = \varphi(u) = \frac{u}{2}$

+ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n u^n$, so folgt $x' = v + x = \frac{v}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (-v)^n$.

so liefert (19):

$$(21) \quad (r+2)(r+3) \varphi'_{r+2} = t^2 \{ (t^3 - t^2) \varphi'''_r + (9t^2 - 6t) \varphi''_r + (18t - 6) \varphi'_r + 6 \varphi_r \} \quad \left(t = \frac{\mu}{\mu - \kappa} \right),$$

und wir erhalten, da $\varphi_0 = 1$, $\varphi_r(0) = 0$ ($r > 0$):

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{t^3}{3}, \\ \varphi_4 &= \frac{t^6}{3} - \frac{t^5}{5}, \\ \varphi_6 &= \frac{4}{9} t^9 - \frac{8}{15} t^8 + \frac{1}{7} t^7, \\ &\dots \end{aligned}$$

Für $\kappa = 0$, $t = 1$ ergibt sich als Umkehrfunktion die tg-Reihe.

§ 3.

Umkehrprobleme vom Typus $z(\mu x^k, \kappa x^l, \dots) = \lambda$.

I.

$$e^{\mu x^k} (\alpha + \kappa x)^a = \lambda.$$

k soll ganz positiv sein; a können wir gleich 1 annehmen, da wir ja andernfalls die Gleichung nur zur Potenz $\frac{1}{a}$ zu erheben brauchen. Gefragt ist dann nach jener Lösung, die für $\lambda = \alpha$ verschwindet und für $\mu = 0$ den Wert $\frac{\lambda - \alpha}{\kappa}$ annimmt.

Die D.R. erhalten wir sofort aus den beiden Relationen:

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \kappa} &= x \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} &= -\lambda x^k \frac{\partial x}{\partial \lambda}; \end{aligned}$$

nach (1) folgt ja daraus:

$$(24) \quad \frac{\partial^{k+1} x}{\partial \mu \partial \alpha^k} = -\lambda \frac{\partial^{k+1} x}{\partial \lambda \partial \kappa^k}.$$

Wählen wir für x die Entwicklung

$$(25) \quad x = \frac{\alpha}{\kappa} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu \alpha^k}{\kappa^k} \right)^r \varphi_r \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right),$$

so liefert (24):

$$(26) \quad -t^{k(r+1)+1} (t^{-kr-2} \varphi_{r+1})^{(k)} = k(kr+1)(kr+2) \dots (kr+k-1) \varphi'_r \quad \left(t = \frac{\lambda}{\alpha} \right).$$

Wir wollen die Auswertung von (26) zunächst für die beiden Fälle $k = 1$ und $k = 2$ durchführen.

1. $k = 1$. In diesem Falle handelt es sich also um die Umkehrfunktion der Gleichung $e^{\alpha x} (\alpha + \kappa x) = \lambda$, die wir schon im § 2 berechnet haben. Wir wollen aber hier dem Ansatz (25) entsprechend die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{\mu \alpha}{\kappa}$ berechnen.

Nach (26) ist jetzt

$$(27) \quad -t^{r+2} (t^{-r-2} \varphi_{r+1})' = \varphi_r',$$

und da $\varphi_0 = t - 1$, $\varphi_r(1) = 0$ ($r > 0$) ist, ergibt die fortlaufende Berechnung:

$$(28) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= t(1-t), \\ \varphi_2 &= \frac{t}{2!} (1-4t+3t^2), \\ \varphi_3 &= \frac{t}{3!} \left(1 - \binom{3}{1} 2^2 t + \binom{3}{2} 3^2 t^2 - 4^3 t^3 \right), \\ \varphi_4 &= \frac{t}{4!} \left(1 - \binom{4}{1} 2^3 t + \binom{4}{2} 3^3 t^2 - \binom{4}{3} 4^3 t^3 + 5^3 t^4 \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

Setzen wir den Ausdruck

$$(29) \quad 1 - \binom{n}{1} 2^{m-1} t + \binom{n}{2} 3^{m-1} t^2 + \dots + (-1)^n (n+1)^{m-1} t^n = \{1-t\}_{(m)}^{(n)}$$

$$(m, n \geq 1),$$

so wird

$$(30) \quad \varphi_n = \frac{t}{n!} \{1-t\}_{(n)}^{(n)} \quad (n \geq 1).$$

Diese Polynome φ_n haben tatsächlich die verlangte Eigenschaft

$$\varphi_n(1) = 0 \quad (n > 0)^5).$$

Für $\alpha = 0$, $\kappa = 1$ erhalten wir als Umkehrung der Gleichung

$$x e^{\mu x} = \lambda:$$

$$(31) \quad x = \lambda \left\{ 1 - \lambda \mu + \frac{3}{2} \lambda^2 \mu^2 - \frac{4^2}{3!} \lambda^3 \mu^3 + \frac{5^3}{4!} (\lambda \mu)^4 + \dots (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n!} (\lambda \mu)^n + \dots \right\},$$

eine Reihe, die für $|\lambda \mu| < \frac{1}{e}$ konvergiert.

⁵⁾ Allgemein gilt für $\psi = \{1-t\}_{(m)}^{(n)}$ ($n \geq m$): $\psi^{(k)}(1) = 0$ für $k = 0, 1, \dots, (n-m)$.

Ein Beweis dafür stammt von Herrn Holzer aus Wien. Bezeichnet D_0^m die m^{te} Ableitung nach x an der Stelle $x = 0$, so ist nämlich:

$$\psi(t) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} (l+1)^{m-1} t^l = D_0^{m-1} \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} t^l e^{(l+1)x} = D_0^{m-1}$$

$\{e^x (1-te^x)^n\}$, daher $\psi^{(k)}(t) = (-1)^k D_0^{m-1} \{e^{(k+1)x} (1-te^x)^{n-k}\}$ und somit

$\psi^{(k)}(1) = 0$, wenn $m-1 < n-k$ oder $k < n-m+1$.

2. $k = 2$. Nach (26) wird jetzt

$$(32) \quad -t^{2r+3}(t^{-2r-2}\varphi_{r+1})'' = 2(2r+1)\varphi_r'.$$

Wegen $\frac{\partial x}{\partial \lambda}|_{t=1} = \frac{\alpha}{\kappa \lambda}$ ist hier nicht nur $\varphi_r(1) = 0$, sondern auch $\varphi_r'(1) = 0$. Durch diese Bedingungen und dem Anfangswert $\varphi_0 = t - 1$ ist die Lösung von (32) wieder eindeutig bestimmt. Wir erhalten:

$$(33) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= -t(1-t)^2, \\ \varphi_2 &= \frac{t}{2!} 1 \left\{ -\binom{4}{1} 2t + \binom{4}{2} 3t^2 - \binom{4}{3} 4t^3 + 5t^4 \right\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Allgemein ist nach der Bezeichnungsweise (29):

$$\varphi_n = (-1)^n \frac{t}{n!} \{1 - t\}_{(n)}^{(2n)} \quad (n \geq 1).$$

3. k beliebig. Da in diesem Falle $\frac{\partial^m x}{\partial \lambda^m} = \frac{\alpha}{\kappa \lambda^m}$ ($m = 0, 1, \dots, k-1$) ist, so folgt $\varphi^{(m)}(1) = 0$ ($m = 0, 1, \dots, k-1$). Damit ist die Lösung von (26) wieder eindeutig bestimmt und wir finden schließlich:

$$(34) \quad \varphi_n = (-1)^{(k+1)n} \frac{t}{n!} \{1 - t\}_{(n)}^{(kn)} \quad (n \geq 1).$$

Für $\alpha = 0$, $\kappa = \mu = 1$ ergibt sich als Umkehrung der Gleichung

$$(35) \quad x e^{x^k} = \lambda: \\ x = \lambda \left\{ 1 - \lambda^k + \frac{2k+1}{2!} \lambda^{2k} - \frac{(3k+1)^2}{3!} \lambda^{3k} + \frac{(4k+1)^3}{4!} \lambda^{4k} \dots \right\},$$

eine Reihe, die für $|\lambda^k| < \frac{1}{k e^{1/k}}$ konvergiert.

Wir bemerken noch, daß, wenn wir an Stelle von (25) den Ansatz

$$x = \frac{\alpha}{\kappa} \sum \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^r \varphi_r \left(\frac{\mu \alpha^k}{\kappa^k} \right)$$

verwenden, für φ_r auf Grund von (24) eine lineare Differentialgleichung von der Ordnung $k+1$ folgt.

$$\text{II.} \quad (\alpha + \kappa x)^a (\beta + \mu x^k)^b = \lambda.$$

k ganz, positiv, α, β sind nur Hilfsveränderliche, b ist eine beliebige, reelle Zahl, a können wir dann wieder gleich 1 annehmen. Gefragt ist nach jener Lösung, die für $\lambda = \alpha \beta^b$ verschwindet und für $\lambda = 0$ den Wert $x = -\frac{\alpha}{\kappa}$ hat.

⁶⁾ Daß diese Polynomen wirklich der Bedingung $\varphi_n^{(m)}(1) = 0$ ($m = 0, 1 \dots (k-1)$) genügen, ergibt sich aus der Anmerkung ⁴⁾.

Zur Bestimmung der D.R. verwenden wir die Relationen:

$$(36) \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = x \frac{\partial x}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = x^k \frac{\partial x}{\partial \beta},$$

und erhalten nach (1):

$$(37) \quad \frac{\partial^{k+1} x}{\partial \beta \partial \alpha^k} = \frac{\partial^{k+1} x}{\partial \mu \partial \alpha^k}.$$

Schreiben wir die Umkehrfunktion in der Form

$$(38) \quad x = \frac{\alpha}{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu \alpha^k}{\beta \alpha^k} \right)^r \varphi_r \left(\frac{\lambda}{\alpha \beta^b} \right),$$

so liefert (37):

$$(39) \quad t^{k(r+1)+2} (t^{-kr-2} \varphi_{r+1})^{(k)} = k(kr+1)(kr+2) \dots (kr+k-1)(r \varphi_r + b t \varphi_r') \quad \left(t = \frac{\lambda}{\alpha \beta^b} \right).$$

1. $k = 1$. Dann ist nach (39):

$$(40) \quad -t^{r+3} (t^{-r-2} \varphi_{r+1})' = r \varphi_r + b t \varphi_r',$$

und wegen $\varphi_0 = t - 1$, $\varphi_r(1) = 0$ ($r \geq 0$) erhalten wir:

$$\varphi_1 = b t (1 - t),$$

$$(41) \quad \varphi_2 = \frac{b t}{2!} \{ b + 1 - 2(2b + 1)t + (3b + 1)t^2 \},$$

$$\varphi_3 = \frac{b t}{3!} \{ (b + 1)(b + 2) - \binom{3}{1} (2b + 1)(2b + 2)t + \binom{3}{1} (3b + 1)(3b + 2)t^2 - (4b + 1)(4b + 2)t^3 \},$$

.....

Setzen wir den Ausdruck:

$$(42) \quad (b + 1)(b + 2) \dots (b + m - 1) - \binom{n}{1} (2b + 1)(2b + 2) \dots (2b + m - 1) + \dots (-1)^n \{ (n + 1)b + 1 \} \{ (n + 1)b + 2 \} \dots \{ (n + 1)b + m - 1 \}$$

$$= [1 - t]_{(b, m)}^{(n)} \quad (m > 1)$$

und

$$[1 - t]_{(b, 1)}^{(n)} = (1 - t)^n,$$

so wird

$$(43) \quad \varphi_n = \frac{b t}{n!} [1 - t]_{(b, n)}^{(n)} \quad (n \geq 1)^7).$$

⁷⁾ Die Polynome $[1 - t]_{(b, m)}^{(n)}$ lassen sich leicht als Summe der in (29) eingeführten Polynome $\{1 - t\}_{(m)}^{(n)}$ darstellen. Daraus folgt auch die Eigenschaft $\varphi_n(1) = 0$

Für $\alpha = 0$, $\kappa = \nu = \beta = 1$ erhalten wir als Umkehrung von

$$(44) \quad x(1+x)^b = \lambda,$$

$$(45) \quad x = \lambda \left\{ 1 - \frac{2b}{2!} \lambda + \frac{3b(3b+1)}{3!} \lambda^2 - \frac{4b(4b+1)(4b+2)}{4!} \lambda^3 + \dots \right\},$$

eine Reihe, die für positive b sicher konvergiert, wenn $\lambda < \frac{1}{(b+1)e}$.

2. k beliebig. Die Rechnung ist dieselbe, wie im Falle I. Wir erhalten schließlich:

$$(46) \quad \varphi_n = (-1)^{n(k+1)} \frac{b^k}{n!} [1 - t]_{(b,n)}^{(k,n)}.$$

$$\text{III.} \quad (\alpha + \kappa x)^a (\beta + \mu x)^b (\gamma + \nu x)^c = \lambda.$$

Wir können wieder $a = 1$ setzen und fragen nach jener Lösung, die für $\lambda = \frac{\beta^b \gamma^c}{\alpha}$ verschwindet und für $\mu = \nu = 0$ den Wert $x = \frac{\lambda - \alpha}{\kappa}$ annimmt. Aus den drei Relationen:

$$(47) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \kappa} &= x \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} &= x \frac{\partial x}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} &= x \frac{\partial x}{\partial \gamma}, \end{aligned}$$

folgt nach (1):

$$(48) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \beta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \alpha}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \gamma} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \nu \partial \alpha}. \end{aligned}$$

Die D.R. ist also hier ein System von zwei Differentialgleichungen. Schreiben wir die Lösung in der Form:

$$x = \frac{\alpha}{\kappa} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu \alpha}{\beta \kappa} \right)^r \left(\frac{\nu \alpha}{\gamma \kappa} \right)^s \varphi_{rs} \left(\frac{\lambda}{\alpha \beta^b \gamma^c} \right),$$

so folgt aus (48):

$$(49) \quad \begin{aligned} -(r+1)t^{r+s+3}(t^{-r-s-2}\varphi_{r+1,s})' &= (r+s+1)(r\varphi_{rs} + bt\varphi'_{rs}), \\ -(s+1)t^{r+s+3}(t^{-r-s-2}\varphi_{r,s+1})' &= (r+s+1)(s\varphi_{rs} + ct\varphi'_{rs}), \\ \left(t = \frac{\lambda}{\alpha \beta^b \gamma^c} \right). \end{aligned}$$

Die Berechnung der Funktionen φ_{rs} wird nun sehr einfach. Setzen wir zur Abkürzung den Ausdruck:

$$(50) \quad (b+1)(b+2)\dots(b+k-1)(c+1)(c+2)\dots(c+l-1) \\ - 2 \binom{n}{1} (2b+1)(2b+2)\dots(2b+k-1)(2c+1)(2c+2) \\ \dots (2c+l-1) + \dots + (-1)^n (n+1) \{(n+1)b+1\} \\ \dots \{(n+1)(b+k-1)\} \{(n+1)c+1\} \\ \dots \{(n+1)c+l-1\} = [1-t]_{(b,k),(c,l)}^{(n)}$$

so erhalten wir:

$$(51) \quad \varphi_{rs} = \frac{b \cdot c \cdot t}{r! \cdot s!} [1-t]_{(b,r),(c,s)}^{(r+s)} \quad (r, s \neq 0), \\ \varphi_{r0} = \frac{b \cdot t}{r!} [1-t]_{(b,r)}^{(r)}, \\ \varphi_{0s} = \frac{c \cdot t}{s!} [1-t]_{(c,s)}^{(s)}.$$

§ 4.

Existenz einer D. R. für die Gleichung $x^m z(\mu x) = \lambda + \kappa x$.

Wir setzen voraus, daß z einer Differentialgleichung

$$(52) \quad z' = R(x, z) \quad (R \text{ rational in } x \text{ und } z)$$

genügt. Es folgt dann für jede Lösung x der vorgelegten Gleichung:

$$(53) \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} = -x^{m+1} z'(\mu x) \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -x^{m+1} R(\mu x, z) \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \bar{R}(x, \lambda, \kappa, \mu) \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

$\bar{R}$ ist wieder eine rationale Funktion, die man erhält, wenn man in R für z den Ausdruck $z = \frac{\lambda + \kappa x}{x^m}$ einsetzt. Wir können daher (53) in der Form schreiben:

$$(54) \quad (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n) \frac{\partial x}{\partial \mu} = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_n x^n) \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Die Koeffizienten a_i, b_k sind Polynome in κ, λ, μ . Außer (54) besteht noch die Gleichung:

$$(55) \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Nun ist noch (1a) und (1b) für beliebige ganze Zahlen k, l :

$$(56) \quad \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left(x^k \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial^{k+1} x}{\partial \kappa^k \partial \mu}, \\ \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(x^{l+1} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) = \frac{\partial^{l+1} x}{\partial \kappa^{l+1}}.$$

Haben daher die beiden Polynome, die in (54) als Faktoren von $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ auftreten, in bezug auf λ und x die höchste Dimensionszahl r und differenziert man (54) r mal nach λ , so kann man zufolge (56) sämtliche Glieder durch die Ableitungen von x nach den Koeffizienten κ , λ , μ ausdrücken und man erhält so eine lineare Differentialgleichung für x . Damit ist die Existenz einer D.R. nachgewiesen; es ist allerdings noch in jedem einzelnen Falle zu untersuchen, ob diese Differentialgleichung eine zur Berechnung der Umkehrfunktion brauchbare Rekursionsformel liefert.

Wir wollen hier nur ein Beispiel behandeln. Die Funktion

$$(57) \quad y = 1 + \frac{x}{p+1} + \frac{x^2}{2!(p+1)(p+2)} + \dots$$

genügt der Differentialgleichung

$$(58) \quad xy'' + (p+1)y' + y = 0.$$

Wir setzen $\frac{y'}{y} = z_p$ und fragen nach der durch die Gleichung

$$(59) \quad -(p+1)xz_p(\mu x) = \lambda + \kappa x$$

definierten Umkehrfunktion. Für z_p besteht die Gleichung

$$(60) \quad z_p' = -z_p^2 - \frac{p+1}{x}z_p - \frac{1}{x}.$$

Daher wird

$$(61) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \mu} &= (p+1)x^2 z'(\mu x) \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ &= \left\{ -\frac{(\lambda + \kappa x)^2}{p+1} + (p+1)(\lambda + \kappa x) \frac{1}{\mu} - (p+1) \frac{x}{\mu} \right\} \frac{\partial x}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(62) \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa} = x \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

folgt durch Differentiation von (61) nach λ die D.R.:

$$(63) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \lambda} &= \left(\frac{p+1}{\mu} - \frac{2\lambda}{p+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \left\{ (p+1) \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda^2}{p+1} \right\} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - \frac{2\kappa}{p+1} \frac{\partial x}{\partial \kappa} \\ &\quad + \left\{ \frac{(p+1)(\kappa-1)}{\mu} - \frac{2\lambda\kappa}{p+1} \right\} \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa \partial \lambda} - \frac{\kappa^2}{p+1} \frac{\partial^2 x}{\partial \kappa^2}. \end{aligned}$$

Da die Entwicklung der linken Seite von (59) mit dem Glied x beginnt, so ist für $\mu = 0$, $x = \frac{\lambda}{1-\kappa}$.

Schreiben wir dementsprechend x in der Form

$$(64) \quad x = \frac{\lambda}{1-\kappa} \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda\mu)^r \varphi_r \left(\frac{1}{1-\kappa} \right),$$

so gewinnen wir aus (63):

$$(65) \quad - (p+1)^2 (r+2) t^{\frac{p(r+1)}{p+1}+1} \left\{ t^{-\frac{p(r+1)}{p+1}} \varphi_{r+1} \right\}' \\ = \{ (r+1)(r+2) + 2(r+2)(t-1) + 2(t-1)^2 \} \varphi_r \\ + \{ 2(r+2) + 4(t-1) \} t(t-1) \varphi_r' + t^2(t-1)^2 \varphi_r'' \left(t = \frac{1}{1-\kappa} \right)$$

und erhalten, da $\varphi_0 = 1$, $\varphi_r(0) = 0$ ($r > 0$) ist,

$$(66) \quad \varphi_1 = - \frac{t^2}{(p+1)(p+2)}, \\ \varphi_2 = \frac{2t^4}{(p+1)^2(p+2)^2} - \frac{2t^3}{(p+1)^2(p+2)^2(p+3)}, \\ \varphi_3 = \frac{-5t^6}{(p+1)^3(p+2)^3} + \frac{10t^5}{(p+1)^3(p+2)^2(p+3)} - \frac{4(5p+1)^2 t^4}{(p+1)^3(p+2)^2(p+3)(p+4)}, \\ \dots$$

Ist $p = 0$, so wird y die Besselsche Funktion nullter Ordnung. Setzen wir noch $\kappa = 0$, $t = 1$, so erhalten wir als Umkehrfunktion von

$$(67) \quad -xz_0(\mu x) = \lambda: \\ x = \lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda \mu}{2} + \frac{\lambda^2 \mu^2}{6} - \frac{\lambda^3 \mu^3}{48} - \frac{\lambda^4 \mu^4}{80} + \dots \right\}.$$

Für die Gleichung

$$(68) \quad - (p+1) z_p(\mu x) = \lambda + \kappa x$$

wird die D.R. von dritter Ordnung.

Da für jede Lösung y einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Quotient $z = \frac{y'}{y}$ einer Riccatischen Differentialgleichung genügt, kann man daher für jede Gleichung $x^m z(\mu x) = \lambda + \kappa x$ eine D.R. angeben.

(Eingegangen am 29. November 1937.)

Über die Klassifikation der geometrischen Objekte.

Von

St. Golab in Kraków.

§ 1.

Einleitung.

Der Präzisierung des Begriffes des geometrischen Objektes sowie der Klassifikation der geometrischen Objekte wurde vor kurzem eine Arbeit von J. A. Schouten und J. Haantjes¹⁾ gewidmet.

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich eine spezielle Klasse von geometrischen Objekten mit einer einzigen Komponente. Die Bestimmung aller möglichen Objekte dieser Klasse, die ich kurz Δ -Klasse nenne, hat mich zu einer Funktionalgleichung geführt. Da die exakte Darstellung der Methode der Auflösung dieser Funktionalgleichung zu viel Raum beanspruchen würde, so habe ich mich entschlossen, die Lösung der genannten Funktionalgleichung gesondert zu publizieren²⁾. Hier sollen nur die Resultate angeführt werden, aus denen dann Schlüsse bezüglich der Klassifikation der geometrischen Objekte gezogen werden.

Ich erhalte vier verschiedene Typen von Objekten der Δ -Klasse, die am Ende der Arbeit zusammengestellt sind.

Herrn Professor Schouten und Herrn Dr. Haantjes sei für einige Ratschläge, die zu der endgültigen Fassung dieser Arbeit beigetragen haben, mein herzlicher Dank ausgesprochen.

§ 2.

Definition des Objektes.

Es sei ein analytischer Raum $\mathfrak{A}$ (d. h. ein Raum, dessen Elemente Systeme von Zahlen sind) gegeben. Außerdem sei $\mathfrak{R}$ ein topologischer Raum, über welchen wir voraussetzen, daß seine Elemente (Punkte) eineindeutig und stetig auf die Elemente von $\mathfrak{A}$ abgebildet werden können. Eine solche Abbildung legt in $\mathfrak{R}$ ein *Koordinatensystem* fest. Ist nun eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von Trans-

¹⁾ J. A. Schouten u. J. Haantjes, On the theory of the geometric object. Proc. of the Lond. Math. Soc. Ser. 2, Vol. 42 (1937), S. 356—376.

²⁾ Die Arbeit „Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte“ erscheint soeben in der Zeitschrift „Wiadomości Matematyczne“, Bd. 45, S. 97—137, Warszawa 1938.

formationen in $\mathfrak{A}$ zugelassen (eine sogenannte „Pseudogruppe“³⁾ würde auch bereits genügen) und geht man von einem beliebigen Koordinatensystem in $\mathfrak{R}$ aus, so wird in $\mathfrak{R}$ eine bestimmte Klasse $\mathfrak{S}$ von Koordinatensystemen definiert; es sind nämlich diejenigen Koordinatensysteme, zu welchen man von dem a priori gegebenen mit Hilfe einer Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ gelangen kann. Die zugelassenen Koordinatensysteme werden nach Veblen-Whitehead „adapted“ genannt⁴⁾. Die Klasse dieser „zulässigen“ Koordinatensysteme werden wir mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{E}$ einen beliebigen Punkt des Raumes $\mathfrak{R}$ und mit B ein beliebiges Koordinatensystem der Klasse $\mathfrak{S}$.

Ist dem Punkte $\mathfrak{E}$ und jedem B von $\mathfrak{S}$ in eindeutiger Weise eine Folge von Zahlen:

$$(1) \quad \Omega^1, \Omega^2, \dots$$

zugeordnet, so sagen wir, daß im Punkte $\mathfrak{E}$ ein Objekt Ω definiert ist⁵⁾. Die Zahlen Ω^v nennen wir die Komponenten dieses Objektes in bezug auf das Koordinatensystem B .

Das Objekt ist also ein System von Funktionalen, die im Raume der Paare $(\mathfrak{E}, B)$ definiert sind. Ist $\mathfrak{E}$ fixiert, so haben wir es mit einem Objekt zu tun, durchläuft dagegen $\mathfrak{E}$ ein Gebiet G von $\mathfrak{R}$, so sprechen wir von einem „Feld“ von Objekten. In unseren Betrachtungen wird der Punkt $\mathfrak{E}$ fest bleiben. Weiterhin beschränken wir uns auf *Objekte mit einer einzigen Komponente*.

§ 3.

Geometrische Objekte der Klasse $\mathcal{A}$.

Wir wollen nun eine spezielle Klasse von Objekten aussondern. Die Objekte dieser Klasse sollen „geometrische Objekte“ heißen.

Es sei ein Objekt

$$(2) \quad \Omega = f(B)$$

gegeben und zwei beliebige Koordinatensysteme der Klasse $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit B_1 und B_2 . Mit T_{12} bezeichnen wir dann diejenige Transformation, die vom Koordinatensystem B_1 zum Koordinatensystem B_2 führt. Wir setzen kurz: $\Omega_1 = f(B_1)$, $\Omega_2 = f(B_2)$. Es kann vorkommen, daß Ω_2 ermittelt werden kann, wenn bloß Ω_1 und T_{12} gegeben sind, d. h. daß die Kenntnis der Transformation und die Kenntnis der Komponente in einem Koordinatensystem die Berechnung der Komponente in dem transformierten Koordinaten-

³⁾ Nach Veblen-Whitehead, vgl. Schouten-Haantjes, l. c. ¹⁾.

⁴⁾ Wegen dieser Terminologie vgl. den zweiten Abschnitt der unter ¹⁾ zitierten Arbeit.

⁵⁾ Was die Definition des Objektes betrifft, vgl. die Einleitung der unter ¹⁾ zitierten Arbeit.

system erlaubt. Genauer gesagt: es kann vorkommen, daß ein Funktional von zwei Argumenten

$$(3) \quad \varphi(x, T)$$

existiert (wobei die erste Veränderliche die numerischen Werte, die zweite dagegen alle möglichen Transformationen der Pseudogruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft) von der Art, daß für beliebige B_1, B_2 aus $\mathfrak{S}$ gilt:

$$(4) \quad \Omega_2 = \varphi(\Omega_1, T_{12}).$$

In diesem Falle soll das Objekt Ω ein *geometrisches* Objekt genannt werden⁶⁾.

Im folgenden beschränken wir uns auf:

1. n -dimensionale analytische und reelle Räume $\mathfrak{R}$ (die sogenannten X_n -Räume);

2. die Räume X_n , bei denen die Pseudogruppe $\mathfrak{G}$ aus allen Transformationen besteht, deren Komponenten ein vollständiges Differential im Stolzischen Sinne und eine nicht verschwindende Jacobische Determinante besitzen;

3. die geometrischen Objekte, für welche das Funktional $\varphi(x, T)$, bezüglich des zweiten Argumentes ausschließlich und in expliziter Weise von dem Werte der Jacobischen Determinante Δ der Transformation T im Punkte $\mathfrak{E}$ abhängt, so daß die Formel (4) durch folgende:

$$(5) \quad \Omega_2 = \varphi(\Omega_1, \Delta_{12}),$$

ersetzt werden kann (Δ_{12} bezeichnet die Jacobische Determinante der Transformation T_{12} im Punkte $\mathfrak{E}$). Das Funktional φ reduziert sich also in diesem Falle auf eine gewöhnliche Funktion von zwei numerischen Veränderlichen;

4. die Objekte mit reellen Komponenten.

Die so entstandene Klasse von geometrischen Objekten nennen wir kurz Δ -Klasse⁷⁾.

§ 4.

Die Funktionalgleichung des Problems.

Nehmen wir drei beliebige Koordinatensysteme B_i ($i = 1, 2, 3$) der Klasse $\mathfrak{S}$ und bezeichnen mit T_{ik} diejenige Transformation, die von B_i zu B_k führt. Mit Δ_{ik} sei der Wert der Jacobischen Determinante der Transformation T_{ik} im betrachteten Punkte bezeichnet. Da man von B_1 zu B_3 entweder unmittelbar mit Hilfe der Transformation T_{13} übergehen kann, oder aber

⁶⁾ Der Begriff des „geometrischen Objektes“ geht auf A. Wundheiler zurück. Vgl. A. Wundheiler. Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien, Abhandl. aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis IV, Moskau (1937), S. 366—375.

⁷⁾ Unsere Objekte der Δ -Klasse bilden eine Unterklasse der „speziellen Objekte der ersten Klasse“ nach der Terminologie von Schouten-Haantjes, vgl. § 4 und 5 der unter ¹⁾ zitierten Arbeit.

auf dem Umwege durch Zusammensetzung von Transformationen T_{12} , T_{23} und da — wie aus der Definition des Objektes folgt — die Komponente Ω durch Angabe des Koordinatensystems B eindeutig bestimmt ist, so folgt daraus die Relation:

$$(6) \quad \Omega_3 = \varphi(\Omega_1, \Delta_{13}) = \varphi(\Omega_2, \Delta_{23}) = \varphi[\varphi(\Omega_1, \Delta_{12}), \Delta_{23}].$$

Auf Grund der bekannten Relation zwischen den Jacobischen Determinanten

$$(7) \quad \Delta_{ij} = \Delta_{ik} \cdot \Delta_{kj}$$

kann also gefolgert werden, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ der folgenden iterierten Funktionalgleichung genügen muß:

$$(8) \quad \boxed{\varphi[\varphi(x, y), z] = \varphi(x, y \cdot z)}.$$

§ 5.

Die Lösung der voranstehenden Funktionalgleichung und die daraus folgende Klassifikation von geometrischen Objekten der Klasse Δ .

Wie ich an anderer Stelle gezeigt habe⁸⁾, besitzt die Funktionalgleichung

$$(8) \quad \varphi[\varphi(x, y), z] = \varphi(x, y \cdot z)$$

eine ganze Menge von „nichtregulären“ Lösungen, die sich auf keine vernünftige Weise klassifizieren lassen. Deswegen werden wir im folgenden nur solche Lösungen in Betracht ziehen, die gewissermaßen regulär sind, was natürlich eine weitere Einschränkung des Problems darstellt. Zunächst aber wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Gestalt des Definitionsbereiches der Gleichung (8) richten.

Die Funktion

$$(9) \quad \varphi(x, y)$$

soll bei gegebenem x für alle von Null verschiedenen Werte y :

$$(10) \quad y \neq 0$$

erklärt werden, und zwar deswegen, weil zu der Pseudogruppe $\mathfrak{G}$ auch solche Transformationen gehören, deren Determinante im gegebenen Punkte E beliebige von Null verschiedene Werte annimmt. Den Definitionsbereich der Veränderlichen x bezeichnen wir mit

$$(11) \quad E.$$

Gemäß der Gestalt der linken Seite der Gleichung (8) muß der Wertbereich F der Funktion (9) in der Menge E enthalten sein:

$$(12) \quad F \subset E.$$

⁸⁾ l. c. ²⁾, § 2.

Da die Gleichung:

$$(13) \quad z = \varphi(x, y)$$

nach x auflösbar sein soll, wobei die Lösung wiederum in der Form

$$(14) \quad x = \varphi\left(z, \frac{1}{y}\right)$$

geschrieben werden kann (die inverse Transformation besitzt eine Jacobische Determinante, die das Reziproke der Determinante der gegebenen Transformation ist!), so folgt daraus, daß der Wertbereich F mit der Menge E identisch ist:

$$(15) \quad F = E.$$

Nun machen wir die *erste Voraussetzung über die Regularität der Funktion* $\varphi(x, y)$, und zwar verlangen wir, daß sie im Gebiete D stetig sein soll, wo mit D kurz das folgende Gebiet der Ebene (x, y) bezeichnet wird:

$$(16) \quad (D) \begin{cases} x \in E, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, daß aus dieser Voraussetzung folgt, daß die *lineare Menge* (11) *aus höchstens zwei zusammenhängenden Komponenten besteht.*

Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß die folgende Identität:

$$(17) \quad \varphi(x, 1) \equiv x \quad \text{für jedes } x \in E$$

stattfindet. In der Tat, nehmen wir die identische Transformation $T = I$; für diese spezielle Transformation hat die Jacobische Determinante offenbar den Wert $+1$. Da bei dieser Transformation das Koordinatensystem unverändert bleibt, so erfährt auch die Komponente des Objektes keine Veränderung, was eben in der obigen Identität ausgedrückt ist.

Wir werden nun die Annahme, E sei aus wenigstens drei zusammenhängenden Teilen gebildet, ad absurdum führen. Daraus würde nämlich die Existenz von solchen fünf Zahlen: $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2$ folgen, daß gleichzeitig die folgenden Relationen bestehen:

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3, \\ x_i \in E, \xi_k \sim \in E \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2). \end{cases}$$

Es ist:

$$(19) \quad x_2 = \varphi(x_1, \Delta_{12}), \quad x_3 = \varphi(x_2, \Delta_{23}), \quad x_3 = \varphi(x_1, \Delta_{12} \cdot \Delta_{23}).$$

Wäre $\Delta_{12} > 0$, so müßte die Funktion φ , wegen der Gleichung $\varphi(x_1, 1) = x_1$ und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit auf dem Abschnitte: $x = x_1, y \in [1, \Delta_{12}]$ jeden Wert zwischen x_1 und x_2 annehmen, insbesondere also auch ξ_1 , was zu einem Widerspruch führt. Es ist also $\Delta_{12} < 0$. Aus analogen Gründen folgt auch $\Delta_{23} < 0$. Daraus folgt aber $\Delta_{13} = \Delta_{12} \cdot \Delta_{23} > 0$, woraus zu folgern ist, daß φ jeden Wert zwischen x_1 und x_3 , also auch ξ_1 , annimmt, was der Voraussetzung widerspricht.

Die erwähnte Eigenschaft der Menge E ist also bewiesen, und folglich können die folgenden zwei Möglichkeiten vorkommen:

- (20) $\left\{ \begin{array}{l} \text{I. } E \text{ besteht aus einer einzigen zusammenhängenden Komponente,} \\ \text{II. } E \text{ besteht aus zwei zusammenhängenden Komponenten.} \end{array} \right.$

Was die erste Möglichkeit betrifft, bemerken wir, daß eine lineare, zusammenhängende Menge notwendigerweise ein Intervall darstellen muß. Der Fall I kann also in zwei Unterfälle zerspalten werden, und zwar:

- (21) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ia. } E \text{ besteht aus einem einzigen Punkte,} \\ \text{Ib. } E \text{ stellt ein eigentliches (endliches oder unendliches) Intervall dar.} \end{array} \right.$

Im Falle Ia sei x_0 der einzige Punkt der Menge E . Da F gleich E ist, so haben wir:

$$(22) \quad \varphi(x_0, y) \equiv x_0 \quad \text{für alle } y \neq 0$$

und folglich besitzt das Objekt eine Komponente, deren Wert unabhängig vom Koordinatensystem ist.

Solche Objekte werden *Skalare* genannt.

Gehen wir zu dem Falle Ib über. Hier werden wir die *zweite Voraussetzung über die Regularität der Funktion* φ machen. Wir setzen nämlich voraus, daß $\varphi(x, y)$ in jedem inneren Punkte des Gebietes D stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Unter dieser Voraussetzung kann man beweisen⁹⁾, daß es eine Funktion

$$(23) \quad \Psi(u)$$

gibt, die für alle

$$(24) \quad u > 0$$

definiert und stark monoton ist, und die die Eigenschaft hat, daß im ganzen Gebiet D die Formel

$$(25) \quad \varphi(x, y) = \Psi[|y| \cdot \psi(x)]$$

gilt. Dabei bezeichnet ψ die zu Ψ inverse Funktion.

Definieren wir nun das neue Objekt Ω^* mit Hilfe der Relation:

$$(26) \quad \Omega^* = \psi(\Omega)$$

und fragen nach der Transformationsformel für Ω^* . Da

$$(27) \quad \Omega_2 = \varphi(\Omega_1, A_{12})$$

ist, so haben wir auf Grund der Formel (25):

$$(28) \quad \Omega_2^* = \psi(\Omega_2) = \psi[\varphi(\Omega_1, A_{12})] = \psi\{\Psi[|A_{12}| \cdot \psi(\Omega_1)]\} \\ = \psi(\Omega_1) \cdot |A_{12}| = \Omega_1^* \cdot |A_{12}|,$$

also:

$$(29) \quad \Omega_2^* = \Omega_1^* \cdot |A_{12}|.$$

⁹⁾ l. c. ²⁾

Dies ist aber das Transformationsgesetz wohlbekannter Objekte, nämlich der sogenannten *Weylschen Dichten* (vom Gewicht (-1)). Aus (26) bekommen wir:

$$(30) \quad \Omega = \Psi(\Omega^*),$$

so daß wir schließen können, daß *das gegebene Objekt eine (stark) monotone Funktion einer Weylschen Dichte ist.*

Nun ziehen wir den zweiten Fall in Betracht, wo E aus zwei Teilkomponenten besteht. Hier können a priori drei Unterfälle unterschieden werden, und zwar:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{IIa. } E \text{ besteht aus zwei verschiedenen Punkten } x_1, x_2, \\ \text{IIb. } E \text{ ist die Summe eines eigentlichen Intervalls und eines isolierten Punktes,} \\ \text{IIc. } E \text{ zerfällt in zwei fremde, eigentliche Intervalle.} \end{array} \right.$$

Zunächst wollen wir den Fall IIa ins Auge fassen. Es ist

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \varphi(x_1, \Delta_{12}), \\ x_1 = \varphi(x_2, \Delta_{21}). \end{array} \right.$$

Wie früher beweist man, daß die Ungleichheit $\Delta_{12} < 0$ bestehen muß; sonst müßte die Funktion φ , da sie stetig ist, alle Werte zwischen x_1 und x_2 annehmen, was mit der Voraussetzung nicht im Einklang steht. Da $\Delta_{12} \cdot \Delta_{21} = 1$ ist, so haben wir auch $\Delta_{21} < 0$. Daraus folgt auf Grund der Identität (17) und der Stetigkeit der Funktion φ , daß folgende Relationen gelten müssen:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_1, y) \equiv x_1 \\ \varphi(x_2, y) \equiv x_2 \end{array} \right\} \text{ für alle } y > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_1, y) \equiv x_2 \\ \varphi(x_2, y) \equiv x_1 \end{array} \right\} \text{ für alle } y < 0.$$

Durch einfaches Einsetzen stellen wir fest, daß jede mit Hilfe der obigen Formeln definierte Funktion φ wirklich die Gleichung (8) erfüllt. Im Falle IIa ist also das betrachtete Objekt ein Skalar, aber nur innerhalb der Untergruppe von Transformationen mit positiver Jacobischen Determinante; der Wert der Komponente erfährt aber einen Sprung, falls die Jacobische Determinante negativ ist.

Solche Objekte wollen wir *Biskalare* nennen.

Den einfachsten Fall eines Biskalars bekommt man, indem man in einem gegebenen Koordinatensystem B_1 : $\Omega_1 = 1$ setzt und nachher Ω_2 in jedem beliebigen Koordinatensystem B_2 durch die Formel $\Omega_2 = \text{sgn } \Delta_{12}$ bestimmt.

Es soll bemerkt werden, daß ein Biskalar Ω immer in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(34) \quad \Omega = a \cdot \omega + b,$$

wo a, b Skalare sind, und ω den Quotienten einer Weylschen und einer gewöhnlichen Dichte von demselben Gewicht darstellt. Es soll aber betont werden, daß weder ω noch a, b eindeutig bestimmt sind.

Wir gehen zu dem zweiten Uterfall IIb über. Es soll gezeigt werden, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Es bestehe E aus einem eigentlichen Intervall E_0 und aus einem isolierten Punkte x_1 , der *nicht* zu E_0 gehört. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, stellen wir zuerst die folgende Tatsache fest:

$$(35) \quad x \in E_0 \supset \varphi(x, -1) = x_1.$$

Denn wäre für ein gewisses $x_0 \in E_0$: $\varphi(x_0, -1)$ in E_0 enthalten, so würde auch $\varphi(x_0, y)$, $y < 0$, sonst beliebig, wegen der vorausgesetzten Kontinuität in E_0 enthalten sein. Da aber $\varphi(x_0, 1) = x_0$ zu E_0 gehört, so ist auf Grund der Stetigkeit: $\varphi(x_0, y)$ auch für $y > 0$ in E_0 enthalten. Folglich würde $\varphi(x_0, y)$ für alle $y \neq 0$ zu E_0 gehören, was aber unmöglich ist, da es ein $y_0 \neq 0$ geben muß, für welches

$$(36) \quad \varphi(x_0, y_0) = x_1$$

gilt. (35) ist also bewiesen worden. Nun bekommt man aus (35) auf Grund von (14):

$$(37) \quad x = \varphi(x_1, -1) \text{ für alle } x \in E_0,$$

was wegen der Eindeutigkeit der Funktion φ nur dann möglich ist, wenn E_0 aus einem einzigen Punkt besteht. Somit haben wir gezeigt, daß der Fall IIb nicht vorkommen kann.

Es bleibt noch der Fall IIc zu erledigen. In diesem Falle besteht E aus zwei eigentlichen (endlichen oder unendlichen) Intervallen E_1 und E_2 , die keinen gemeinsamen Punkt haben.

Man kann zeigen¹⁰⁾, daß es in diesem Falle zwei stark monotone und für alle

$$(38) \quad u > 0$$

definierte Funktionen

$$(39) \quad \Psi_1(u), \Psi_2(u)$$

von der Eigenschaft gibt, daß folgende Relationen erfüllt sind:

$$(40) \quad \begin{cases} x \in E_1, y > 0 \supset \varphi(x, y) = \Psi_1[y \cdot \psi_1(x)], \\ x \in E_2, y > 0 \supset \varphi(x, y) = \Psi_2[y \cdot \psi_2(x)], \\ x \in E_1, y < 0 \supset \varphi(x, y) = \Psi_2[-y \cdot \psi_1(x)], \\ x \in E_2, y < 0 \supset \varphi(x, y) = \Psi_1[-y \cdot \psi_2(x)]. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2$) die zu $\Psi_i(u)$ inverse Funktion. Es sei bemerkt, daß

$$(41) \quad \psi_1(x) \text{ für } x \in E_1, \psi_2(x) \text{ für } x \in E_2 \text{ definiert sind,}$$

¹⁰⁾ l. c. 2)

wobei definitionsgemäß die Ungleichheiten

$$(42) \quad \psi_i(x) > 0 \quad (i = 1, 2)$$

bestehen. Man bestätigt ohne Schwierigkeit, daß umgekehrt, wenn zwei Funktionen (39) derart gegeben sind, daß der Wertbereich von $\Psi_i(u)$ das Intervall E_i ist und, wenn in D die Funktion $\varphi(x, y)$ mit Hilfe der vier Formeln (40) erklärt wird, die so definierte Funktion φ der Gleichung (8) genügt.

Um klar zu sehen, mit welchem Objekt wir es in diesem Falle zu tun haben, schreiben wir die Gleichungen (40) in der folgenden Form:

$$(43) \quad \Omega_2 = \begin{cases} \Psi_1 [\Delta_{12} \cdot \psi_1(\Omega_1)] & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ \Psi_2 [\Delta_{12} \cdot \psi_2(\Omega_1)] & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2, \\ \Psi_2 [-\Delta_{12} \cdot \psi_1(\Omega_1)] & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ \Psi_1 [-\Delta_{12} \cdot \psi_2(\Omega_1)] & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2, \end{cases}$$

und definieren das neue Objekt Ω^* durch die Gleichungen:

$$(44) \quad \Omega^* = \begin{cases} \psi_1(\Omega) & \text{für } \Omega \in E_1, \\ -\psi_2(\Omega) & \text{für } \Omega \in E_2. \end{cases}$$

Es wird nun nach dem Transformationsgesetz des Objektes Ω^* gefragt. Aus (43) bekommt man sofort:

$$(45) \quad \begin{cases} \psi_1(\Omega_2) = \Delta_{12} \cdot \psi_1(\Omega_1) & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ -\psi_2(\Omega_2) = \Delta_{12} \cdot (-\psi_2(\Omega_1)) & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2, \\ -\psi_2(\Omega_2) = \Delta_{12} \cdot \psi_1(\Omega_1) & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ \psi_1(\Omega_2) = \Delta_{12} \cdot (-\psi_2(\Omega_1)) & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2. \end{cases}$$

Gleichzeitig folgt aus (43):

$$(46) \quad \Omega_2 \in \begin{cases} E_1 & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ E_2 & \text{für } \Delta_{12} > 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2, \\ E_2 & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_1, \\ E_1 & \text{für } \Delta_{12} < 0 \text{ und } \Omega_1 \in E_2. \end{cases}$$

(44), (45) und (46) ergeben einfach:

$$(47) \quad \Omega_2^* = \Delta_{12} \cdot \Omega_1^*.$$

Das Objekt Ω^* ist also eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht (-1) .

Nun wollen wir Ω durch Ω^* ausdrücken. Aus (42) und (44) folgt:

$$(48) \quad \Omega = \begin{cases} \Psi_1(\Omega^*) & \text{für } \Omega^* > 0, \\ \Psi_2(-\Omega^*) & \text{für } \Omega^* < 0. \end{cases}$$

Wird jetzt die neue Funktion $\Psi_0(u)$ folgendermaßen definiert:

$$(49) \quad \Psi_0(u) = \begin{cases} \Psi_1(u) & \text{für } u > 0, \\ \Psi_2(-u) & \text{für } u < 0, \end{cases}$$

so ist $\Psi_0(u)$ für alle $u \neq 0$ erklärt und (48) kann mit Hilfe von (49) einfacher
(50) $\Omega = \Psi_0(\Omega^*)$
geschrieben werden.

Die Funktion $\Psi_0(u)$ besitzt die drei folgenden Eigenschaften:

- (51) 1. $\Psi_0(u)$ ist umkehrbar,
(52) 2. $\Psi_0(u)$ ist stark monoton für $u > 0$,
(53) 3. $\Psi_0(u)$ ist stark monoton für $u < 0$.

Da aber die Funktion $\Psi_0(u)$ für $u = 0$ nicht definiert ist, so braucht sie nicht im ganzen Definitionsbereiche monoton zu sein. Für $u = 0$ besitzt $\Psi_0(u)$ im allgemeinen eine Unstetigkeitsstelle. Diese Unstetigkeit wird dann und nur dann hebbbar, wenn E_1 und E_2 zusammenstoßende Intervalle sind und wenn gleichzeitig $\Psi_0(u)$ für $u > 0$ Monotonie von derselben Art wie für $u < 0$ aufweist.

Eine Funktion, die die drei Eigenschaften (51) bis (53) besitzt, wollen wir kurz α -Funktion nennen.

Unser Resultat kann jetzt folgendermaßen ausgesprochen werden:

Im Falle IIc ist jedes Objekt eine α -Funktion einer gewöhnlichen Dichte vom Gewicht (-1) .

Das obige Verfahren hat notwendigerweise die Existenz und die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von $\varphi(x, y)$ vorausgesetzt (ohne diese Voraussetzung können wir die Funktionalgleichung (8) nicht vollständig lösen). Dies hat zur Folge, daß auch die Funktion $\Psi_0(u)$ eine stetige Ableitung besitzt. Es entsteht also die Frage, ob man umgekehrt ein geometrisches Objekt erhält, wenn man eine α -Funktion einer gewöhnlichen Dichte konstruiert und diese Funktion nur stetig (aber nicht differenzierbar) voraussetzt. Die Antwort fällt positiv aus. Wir bekommen nämlich für $\varphi(x, y)$:

(54)
$$\varphi(x, y) = \Psi_0[y \cdot \psi_0(x)],$$

wo ψ_0 die zu Ψ_0 inverse Funktion bedeutet, und man überzeugt sich sofort, daß erstens (8) durch (54) erfüllt ist und zweitens, daß $\varphi(x, 1) \equiv x$ ausfällt, und dies ist hinreichend dafür, daß wir es mit einem geometrischen Objekt zu tun haben.

Es ist nicht ohne Interesse die Bemerkung hinzuzufügen, daß die Eigenschaften (52) und (53) notwendig dafür sind, daß das Objekt $\Psi_0(\Omega^*)$, wo Ω^* eine gewöhnliche Dichte ist, ein geometrisches Objekt ist. Denn wäre die Funktion $\Psi_0(u)$ z. B. für $u > 0$ nicht monoton, so würde sie wegen der Stetigkeit nicht umkehrbar sein. Dies würde jedoch zu einem Widerspruch führen mit einem Satz, der an anderer Stelle publiziert wird, und der besagt, daß eine stetige aber nicht umkehrbare Funktion einer gewöhnlichen Dichte entweder ein Skalar bzw. Biskalar oder eine monotone Funktion einer Weul-schen Dichte ist, oder endlich kein geometrisches Objekt darstellt.

§ 6.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

Die Bestimmung aller geometrischen Objekte mit einer Komponente der Klasse Δ , d. h. aller solchen Objekte, deren Transformationsgesetz der Komponente sich in der Form (5) darstellen läßt, führt zu der Funktionalgleichung (8) mit der Nebenbedingung (17) (diese Bedingung ist keine Folge von (8)!). Die vollständige Lösung der Gleichung ohne weitere Voraussetzungen über die Regularität der Funktion $\varphi(x, y)$ ist — unserer Meinung nach — sehr schwer, wenn nicht überhaupt unmöglich. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß φ im Inneren des Definitionsbereiches mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen ist, gelingt es, die Funktionalgleichung (8) zu lösen. Die Klassifikation der Lösungen führt zu einer entsprechenden Klassifikation der gewonnenen geometrischen Objekte. Wir bekommen in dieser Weise vier verschiedene Typen von Objekten, und zwar:

- (55) {
- I. *Skalare*,
 - II. *Monotone Funktionen von Weylschen Dichten*,
 - III. *Biskalare*, d. h. Größen der Form: $a\omega + b$, wo ω der Quotient einer Weylschen und einer gewöhnlichen Dichte und a, b Skalare sind
 - IV. *α -Funktionen*, d. h. Funktionen mit den Eigenschaften (51), (52) und (53), *von gewöhnlichen Dichten*.

Es soll noch bemerkt werden: Falls man in der Gruppe von Transformationen nur Transformationen mit einer *positiven* Jacobischen Determinante zuläßt, so können die Typen III und IV *nicht* auftreten.

(Eingegangen am 10. Dezember 1937.)

Über die asymptotische Darstellung der summatorischen Funktion von Dirichletreihen mit positiven Koeffizienten.

Von

Alfred Kienast in Küsnacht-Zürich.

Für zwei Klassen von Sätzen sind die folgenden die einfachsten Beispiele:
Tauber bewies den *Satz*: Wenn

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_1^{\infty} a_k x^k = l,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_1^n k a_k = 0,$$

dann ist $\sum a_k = l$ konvergent.

Hardy und Littlewood fügten den *Satz* hinzu: Wenn

$$(i) \quad \sum_1^{\infty} a_k x^k \sim A (1-x)^{-1} \quad \text{für } x \rightarrow 1,$$

$$(ii) \quad a_k \geq 0,$$

dann ist

$$\sum_1^n a_k \sim A n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Letzere Art von Sätzen nannten Hardy und Littlewood „Taubersche Sätze für Reihen mit positiven Koeffizienten“

Die erste Art dieser Sätze stellt die Konvergenz einer Reihe fest, die zweite das Hauptglied einer asymptotischen Darstellung; beide geben keinen Aufschluß über die Schnelligkeit der Annäherung, d. h. über den „Rest“.

Diese Sätze wurden bald auf Reihen $\sum a_k f_k(x)$ ausgedehnt mit dem Ziel, einen Beweis für den Primzahlsatz $\pi(x) \sim x \lg^{-1} x$ zu gewinnen. Diese Versuche knüpften an an die Koeffizienten der beiden Reihen

$$\zeta^{-1}(s) = \sum \mu(k) k^{-s}, \quad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum \Lambda(k) k^{-s},$$

für die

$$\sum \mu(k) x^k (1-x^k)^{-1} = x$$

$$(1-x) \sum (\Lambda(k) - 1) x^k (1-x^k)^{-1} \sim -2E \quad \text{für } x \rightarrow 1-0,$$

wo $\mu(k)$ die Möbiusschen Koeffizienten sind und $\Lambda(k)$ die in der analytischen Zahlentheorie übliche Bedeutung hat. N. Wiener gelangte ans Ziel. Seine

Untersuchungen wurden von Bochner, Landau und Heilbronn, schließlich Ingham [1]*) wesentlich vereinfacht und auf eine Formel der reellen Integralrechnung gegründet. Sie führt zu zwei verschiedenen Formen, je nachdem man Sätze der ersten oder zweiten Art beweisen will.

Diese Formel leistet nun viel mehr als in der ursprünglichen Absicht lag: sie liefert nicht nur Sätze „Tauberscher Art“, sondern sie ergibt darüber hinaus Aussagen über den „Rest“, was ich in [3], [4] ausgeführt habe. [3] bezieht sich auf Reihenkonvergenz und es kam mir darauf an, die Bedingungen möglichst elementar zu halten; in [4] spielte die „Nebenbedingung“ eine entscheidende Rolle, daß von der ζ -Funktion nur Eigenschaften benutzt werden sollten, die bewiesen werden können ausschließlich mit Überlegungen, die rechts der Geraden $\sigma = 1$ verlaufen.

In diesem Aufsatz will ich zeigen, daß die Formel nicht nur den Hauptterm der asymptotischen Darstellung und einen Rest liefert, sondern zu einem aus mehr als einem Glied bestehenden asymptotischen Ausdruck und einem Rest führt.

Außerdem werde ich hier das Restglied so weitgehend wie zur Zeit möglich abschätzen. Dazu wird der Cauchysche Satz verwendet und die Resultate von Tchudakoff [6], [7], wonach

$$(1) \quad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{für } \sigma > 1 - \frac{\kappa}{(\lg t)^\gamma}, \quad \frac{7}{8} < \gamma < 1, \quad 0 < t_0 < t,$$

und analoge für die L -Funktionen.

I.

Satz 1. *Es sei*

- (i) $f(s) = \sum_1^\infty a_n n^{-s}$ konvergent für $1 < \sigma$, a_n reell und $a_n \geq 0$;
- (ii) $f(s) = (s-1)^{-1-\varrho} \{b_0 + b_1(s-1) + b_2(s-1)^2 + \dots\}$, $0 < \varrho < 1$,
und die Klammer eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius größer als Null ist, also wegen (i) b_v reell, $v = 0, 1, 2, \dots$;
- (iii) $f(s)$ sei für $0 < \alpha_1 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq |t| \leq T$ mit Ausnahme von $s = 1$ regulär und

$$|f(s)| \leq c_1 t^b \lg^\tau t, \quad 0 \leq b \leq 3/2,$$

für $0 < t_0 \leq t$; also ist

$$\Phi(s) = [f(s) - b_0 s(s-1)^{-1-\varrho} - (b_1 - b_0)s(s-1)^{-\varrho}] s^{-1}$$

stetig für $1 \leq \sigma$, $|t| \leq T$;

*) Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Verzeichnis am Schluß des Aufsatzes.

definiert man noch

$$\psi(x) = \sum_1^x a_n,$$

$$H(u) = \psi(e^u) e^{-u} u^{-\varrho}, \quad u \geq 0,$$

dann ist

$$(2) \quad H(\omega) = b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) + (b_1 - b_0) \Gamma^{-1}(\varrho) \omega^{-1} + \omega^{-1} R$$

$$|R| \leq c_2 \omega T^{-1/2} + c_3 \omega^{-1-\varrho} T^{-1/2} \lg^{\tau} T + e^{-\omega(1-\alpha)} \{c_4 T^b \lg^{\tau} T + c_5 T^{1-\varrho}\};$$

c_1 und die nachfolgenden c_i bedeuten positive Konstanten, die unabhängig von den Variablen in den betreffenden Relationen bestimmbar sind: $\alpha_1 \leq \alpha \leq 1$.

Spezialisiert man Satz 1 für Funktionen, für die die Ergebnisse von Tschudakoff (1) das in Voraussetzung (iii) auftretende Gebiet links von $\sigma = 1$ beherrschen, so erhält man

Satz 2. Wenn zu den Voraussetzungen von Satz 1 hinzutritt

$$\alpha_1 = 1 - \kappa (\lg T)^{-\gamma},$$

dann gilt (2) und

$$\omega^{-1} |R| = c_6 e^{-p \omega^q},$$

p eine positive Zahl, $q = (1 + \gamma)^{-1}$.

Die folgenden Erörterungen geben den Beweis dieser Behauptungen.

Man hat (siehe Landau [5], S. 5, 6)

$$f(s) = s \int_0^{\infty} \psi(e^u) e^{-su} du$$

$$= s \int_0^{\infty} H(u) u^{\varrho} e^{-u(s-1)} du,$$

und wenn man setzt

$$H_1(u) = u H(u) - b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) u,$$

so ist

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \{H_1(u) - (b_1 - b_0) \Gamma^{-1}(\varrho)\} u^{\varrho-1} e^{-u(s-1)} du.$$

Definiert man (ebenso wie in [4])

$$k(x) = 1 - |x|; \quad K(y) = \int_{-1}^{+1} k(x) e^{-y x i} dx = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} \right)^2,$$

dann lautet die von Ingham angegebene Formel

$$(3) \quad \int_{-T}^{+T} \Phi(\sigma + it) k(t T^{-1}) e^{\omega t i} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \{H_1(u) - (b_1 - b_0) \Gamma^{-1}(\varrho)\} u^{\varrho-1} e^{-u(\sigma-1)} T K(T|u - \omega|) du,$$

$$1 < \sigma.$$

Wegen Voraussetzung (iii) kann man zur Grenze $\sigma \rightarrow 1 + 0$ übergehen. Macht man noch in der rechten Seite von (3) die Substitution $u = \omega + y T^{-1}$, so folgt die Formel

$$(4) \quad J = \int_{-T}^{+T} \Phi(1 + it) k(t T^{-1}) e^{\omega t i} dt \\ = \int_{-T\omega}^{\infty} H_1(\omega + y T^{-1}) (\omega + y T^{-1})^{\varrho-1} K(y) dy - U,$$

wo

$$U = (b_1 - b_0) \Gamma^{-1}(\varrho) \int_{-T\omega}^{\infty} (\omega + y T^{-1})^{\varrho-1} K(y) dy.$$

Die rechte Seite unterscheidet sich von derjenigen der analogen Formel (5) in [4] durch den Faktor $(\dots)^{\varrho-1}$ und durch die erweiterte Bedeutung von $H_1(u)$. Die Behandlung dieser Formel verläuft parallel derjenigen von (5) in [4] mit dem einzigen Unterschied, daß ich jetzt zur Approximation von J (in II) den Cauchyschen Satz verwende, was in [4] ausgeschlossen war.

Zuerst wird U ermittelt. Dazu zerlege ich das Integral in vier Teile:

$$U = \int_{-T\omega}^{-T^{3/4}\omega^{1/2}} \dots + \int_{-T^{3/4}\omega^{1/2}}^{-T^{1/2}} \dots + \int_{-T^{1/2}}^{+T^{1/2}} \dots + \int_{+T^{1/2}}^{\infty} \dots \\ = U_1 + U_2 + U_3 + U_4.$$

Zur Abkürzung sei $\omega^{\varrho-1} \Gamma^{-1}(\varrho) (b_1 - b_0) = A$. Es findet ständige Verwendung, daß $K(y)$ nicht negativ ist, nur isolierte Nullstellen hat und kleiner als $c_7 y^{-2}$ ist. Ferner ist $1 + y T^{-1} \omega^{-1}$ monoton wachsend von $y = -T\omega$ bis $+\infty$. Man hat

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y) dy; \quad L_1 = \int_{T\omega}^{\infty} K(t) dt \leq 4(T\omega)^{-1}; \\ (5) \quad \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} K(t) dt = K - 2 \int_{\sqrt{T}}^{\infty} K(t) dt = K - 2L_2; \quad L_2 \leq 4T^{-1/2}; \\ \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} \leq 1 + 2x < 2 \quad \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

Nun ist

$$U_1 = A \int_{-T\omega}^{-T^{3/4}\omega^{1/2}} [1 + y(T\omega)^{-1}]^{\varrho-1} K(y) dy \\ = A K(y_1) T\omega \varrho^{-1} | [1 + y(T\omega)^{-1}]^{\varrho} |_{-T\omega}^{-T^{3/4}\omega^{1/2}}, \\ |U_1| \leq A c_7 T^{-3/4} \omega^{-1} T\omega \varrho^{-1} (1 - T^{-1/4} \omega^{-1/2})^{\varrho} \\ \leq A c_7 \varrho^{-1} T^{-1/2}.$$

In U_2 ist

$$2^{1-\varrho} > (1 - T^{-1/4} \omega^{-1/2})^{\varrho-1} > [1 + y(T\omega)^{-1}]^{\varrho-1} > (1 - T^{-1/2} \omega^{-1})^{\varrho-1},$$

falls $T^{1/4} \omega^{1/2} > 2$, was immer erfüllt ist für $T \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$.

Somit ist

$$|U_2| \leq A 2^{1-\varrho} c_8 \int_{-T^{3/4} \omega^{1/2}}^{-T^{1/2}} K(y) dy$$

$$\leq A c_9 T^{-1/2}.$$

In U_3 ist

$$1 - c_{10} T^{-1/2} \omega^{-1} < [1 + y(T\omega)^{-1}]^{\varrho-1} < 1 + c_{11} T^{-1/2} \omega^{-1},$$

daher ist

$$U_3 = A(1 + \theta T^{-1/2} \omega^{-1}) \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} K(y) dy; \quad |\theta| < c_{12}$$

$$= A(1 + \theta T^{-1/2} \omega^{-1})(K - 2L_2)$$

$$= A(K + \theta_1 T^{-1/2}); \quad |\theta_1| < c_{13}.$$

In U_4 ist, wegen $0 < \varrho < 1$,

$$[1 + y(T\omega)^{-1}]^{\varrho-1} < (1 + T^{-1/2} \omega^{-1})^{\varrho-1} < 1,$$

somit ist

$$|U_4| \leq A c_{14} \int_{\sqrt{T}}^{\infty} K(y) dy \leq A c_{15} T^{-1/2}.$$

Zusammenfassend folgt

$$U = \omega^{\varrho-1} \Gamma^{-1}(\varrho+1)(b_1 - b_0)(K + L_3),$$

wo

$$|L_3| \leq c_{16} T^{-1/2}.$$

II.

Der Integrationsweg von J in (4) wird zerlegt in die Stücke von $-T \dots 0$ und $0 \dots T$; im Integral über das erste wird die Substitution $t = -u$ ausgeführt. Setzt man

$$\Phi(1 + it) e^{w t i} = P + iQ,$$

so sieht man, daß

$$J = 2R \left\{ \int_0^T (P + iQ)(1 - tT^{-1}) dt \right\} = 2R(J_1).$$

Das Integral J_1 ist enthalten als Teil im Integral

$$J_2 = -i \int \Phi(z) [1 + i(z-1)T^{-1}] e^{w(z-1)} dz,$$

erstreckt über das Rechteck $z = 1, 1 + iT, \alpha + iT, \alpha$, wo $0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq 1$; dann ist $\Phi(z)$ in diesem Rechteck regulär nach Voraussetzung, also $J_2 = 0$. Man erhält

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^T \dots = i \int_{1+iT}^{\alpha+iT} \dots + i \int_{\alpha+iT}^{\alpha} \dots + i \int_{\alpha}^1 \dots dz \\ &= J_3 + J_4 + J_5 \end{aligned}$$

und

$$R(J) = R(J_3) + R(J_4) + R(J_5).$$

$\Phi(s)$ hat in $s = 1$ einen Windungspunkt; da $\Phi(1) = 0$, so kann man auf den Rechteckseiten in den Punkt $s = 1$ hineinintegrieren.

Man gewinnt obere Schranken für J_3, J_4, J_5 unter Verwendung von Voraussetzung (iii) und der folgenden Abschätzungen:

Auf der Strecke $1 + iT \dots \alpha + iT$ ist

$$\begin{aligned} |\sigma + iT|^{-1} &< T^{-1}, \\ |\sigma - 1 + iT|^{-\varrho} &< T^{-\varrho}, \quad 0 < \varrho; \end{aligned}$$

auf der Strecke $\alpha + iT \dots \alpha$ ist

$$\begin{aligned} |\alpha + it|^{-1} &< t^{-1}, \\ |\alpha - 1 + it|^{-\varrho} &< t^{-\varrho}, \quad 0 < \varrho. \end{aligned}$$

Man findet

$$|J_3| \leq T^{-1} \int_{\alpha}^1 |\Phi(\sigma + iT)| (1 - \sigma) e^{-\omega(1-\sigma)} d\sigma$$

und

$$|\Phi(\sigma + iT)| \leq c_1 T^{b-1} \lg^{\tau} T + T^{-1-\varrho} + |b_1 - b_0| T^{-\varrho},$$

somit

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq (c_1 T^{b-2} \omega^{-2} \lg^{\tau} T + c_{17} |b_1 - b_0| T^{-1-\varrho} \omega^{-2}) \int_0^{\omega(1-\alpha)} u e^{-u} du \\ &\leq c_1 T^{b-2} \omega^{-2} \lg^{\tau} T + c_{17} T^{-1-\varrho} \omega^{-2}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $b \leq \frac{3}{2}$, so kann man, abkürzend, im Hinblick auf $T \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty$, setzen

$$(6) \quad |J_3| \leq c_{18} T^{-1/2} \omega^{-2} \lg^{\tau} T.$$

$$J_4 = -e^{-\omega(1-\alpha)} \int_0^T \Phi(\alpha + it) \left(1 + \frac{i(\alpha-1)}{T} - \frac{t}{T}\right) e^{wt} dt.$$

Dies Integral wird zerlegt in die Teile von $0 \dots 1$ und $1 \dots T$. Für $t = 0 \dots 1$ ist der Integrand stetig und beschränkt für alle $\omega_0 < \omega$ und $1 < T_0 \leq T$;

somit ist der absolute Betrag des Integrals kleiner als eine von ω und T unabhängige Schranke. Ferner ist, $1 \leq T$

$$|1 + i(\alpha - 1)T^{-1} - tT^{-1}| < 1 + (1 - \alpha)^2 T^{-2} < 2.$$

Somit

$$\begin{aligned} \left| \int_1^T \dots \right| &\leq 2 \int_1^T \{c_1 t^{b-1} \lg^\tau t + t^{-1-\varepsilon} + |b_1 - b_0| t^{-\varepsilon}\} dt \\ &\leq c_{19} T^b \lg^\tau T + c_{20} T^{1-\varepsilon} + c_{21}, \end{aligned}$$

also

$$(7) \quad |J_4| \leq e^{-\omega(1-\alpha)} (c_{19} T^b \lg^\tau T + c_{20} T^{1-\varepsilon}).$$

Endlich ist

$$J_5 = i \int_{\alpha}^1 \Phi(\sigma) [1 + i(\sigma - 1)T^{-1}] e^{-\omega(1-\sigma)} d\sigma$$

$\Phi(\sigma)$ ist reell wegen Voraussetzung (ii); somit ist

$$R(J_5) = -T^{-1} \omega^{-2} \int_{\alpha}^1 \Phi(\sigma) \omega(1-\sigma) e^{-\omega(1-\sigma)} d\omega(1-\sigma),$$

$$(8) \quad |R(J_5)| \leq c_{22} T^{-1} \omega^{-2} \int_0^{\omega(1-\alpha)} u e^{-u} du \leq c_{22} T^{-1} \omega^{-2},$$

wobei c_{22} das Maximum von $\Phi(\sigma)$ ist im Intervall. Fügt man (6), (7), (8) zusammen, so ist

$$|R(J_1)| = c_{18} T^{-1/2} \omega^{-2} \lg^\tau T + e^{-\omega(1-\alpha)} (c_{19} T^b \lg^\tau T + c_{20} T^{1-\varepsilon}).$$

Über α braucht man an dieser Stelle noch nicht zu verfügen.

III.

Die rechte Seite in (4) wird nach dem von Landau [5] befolgten Verfahren behandelt (das auch in [4] angewendet wurde). Es wird benutzt, daß die Koeffizienten in $f(s)$ alle positiv sind (Voraussetzung (i)) und somit $e^u u^\varrho H(u) \geq 0$ monoton zunimmt; da

$$H(u) e^u u^\varrho = [H_1(u) + b_0 u \Gamma^{-1}(\varrho + 1)] e^u u^{\varrho-1},$$

so ist

$$(H_1(u_2) + b_0 u_2 \Gamma^{-1}(\varrho + 1)) u_2^{\varrho-1} \geq (H_1(u_1) + b_0 u_1 \Gamma^{-1}(\varrho + 1)) e^{u_1 - u_2} u_1^{\varrho-1}$$

$$\text{für } u_2 \geq u_1;$$

also

$$(9) \quad H_1(u_2) u_2^{\varrho-1} \geq H_1(u_1) e^{u_1 - u_2} u_1^{\varrho-1} + b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) e^{u_1 - u_2} u_1^\varrho - b_0 u_2^\varrho \Gamma^{-1}(\varrho + 1),$$

$$(10) \quad H_1(u_2) u_2^{\varrho-1} e^{u_2 - u_1} + b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) e^{u_2 - u_1} u_2^\varrho - b_0 u_1^\varrho \Gamma^{-1}(\varrho + 1) \geq H_1(u_1) u_1^{\varrho-1},$$

beide für $u_2 \geq u_1$.

Ferner werden benutzt die Relationen (5) und

$$e^{2/\sqrt{T}} \leq 1 + 2e T^{-1/2} \text{ für } 4 < T; \quad 1 - e^{-2/\sqrt{T}} \leq 2e T^{-1/2}.$$

Man ersetze im ersten Integral der rechten Seite von (4) y durch $-y$, ω durch $\omega + T^{1/2}$ und verwende für H_1 die Ungleichung (9); dann folgt

$$\begin{aligned} J &\geq \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} H_1 \left(\omega + \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right) \left(\omega + \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho-1} K(y) dy - U, \\ &\geq \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} H_1(\omega) \omega^{\varrho-1} e^{-2/\sqrt{T}} K(y) dy - \frac{1 - e^{-2/\sqrt{T}}}{\Gamma(\varrho+1)} b_0 \omega^{\varrho} \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} K(y) dy \\ &\quad - b_0 \Gamma^{-1}(\varrho+1) \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} \left[\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho} - \omega^{\varrho} \right] K(y) dy - U \end{aligned}$$

unter Addition und gleichzeitiger Subtraktion derselben Größe. Hier ist

$$0 \leq \left(\omega + \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho} - \omega^{\varrho} \leq \left(\omega + \frac{2}{\sqrt{T}} \right)^{\varrho} - \omega^{\varrho} \leq c_{23} \omega^{\varrho-1} T^{-1/2};$$

also schließlich, wenn $T > 16^2 K^{-2}$, damit $2 L_2 K^{-1} < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &\leq \left(1 + \frac{2e}{\sqrt{T}} \right) \left(1 + \frac{4L_2}{K} \right) \left\{ \frac{b_1 - b_0}{\Gamma(\varrho)} + \frac{1}{K} \left[\omega^{1-\varrho} J + c_{24} \frac{\omega}{\sqrt{T}} + \frac{c_{25}}{\sqrt{T}} \right] \right\} \\ (11) \quad &\leq \frac{b_1 - b_0}{\Gamma(\varrho)} + \frac{c_{26} \omega}{\sqrt{T}} + \frac{c_{27} \lg^{\tau} T}{\omega^{1+\varrho} \sqrt{T}} + e^{-\omega(1-\alpha)} \{ c_{28} T^b \lg^{\tau} T + c_{29} T^{1-\varrho} \}. \end{aligned}$$

Für T und α fest, folgt $\omega^{-1} H_1(\omega) < c_{30}$ für $\omega_0 < \omega$; also ist $\omega^{-1} H_1(\omega)$ beschränkt für alle ω . $H_1(\omega) < c_{30} \omega$.

Zweitens ersetzt man im ersten Integral der rechten Seite von (4) y durch $-y$, ω durch $\omega - T^{-1/2}$; das gibt

$$\begin{aligned} (12) \quad U - |J| &\leq \int_{-\infty}^{-\sqrt{T}} \dots + \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} H_1 \left(\omega - \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right) \left(\omega - \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho-1} K(y) dy \\ &\leq H^* + \dots \end{aligned}$$

In H^* ist für $y \leq -\sqrt{T}$

$$1 \leq 1 - \frac{1}{\omega \sqrt{T}} - \frac{y}{\omega T} \leq 1 + \frac{|y|}{\omega T},$$

somit

$$|H^*| \leq c_7 c_{30} \omega^{\varrho-1} T^{-1} \int_{\omega^{-1} T^{-1/2}}^{\infty} (1+u)^{\varrho} d(-u^{-1}) \leq c_{31} \omega^{\varrho} T^{-1/2}.$$

Dies und (10) in (12) verwendet, gibt

$$\begin{aligned}
 U - |J| \leq c_{31} \omega T^{-1/2} + H_1(\omega) \omega^{\varrho-1} e^{2/\sqrt{T}} \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} K(y) dy \\
 + b_0 \omega^{\varrho} \Gamma^{-1}(\varrho + 1) [e^{2/\sqrt{T}} - 1] \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} K(y) dy \\
 + b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} \left[\omega - \left(\omega - \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho} \right] K(y) dy
 \end{aligned}$$

unter Addition und gleichzeitiger Subtraktion derselben Größe.

Hier ist

$$0 \leq \omega^{\varrho} - \left(\omega - \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T} \right)^{\varrho} \leq \omega^{\varrho} - \left(\omega - \frac{2}{\sqrt{T}} \right)^{\varrho} \leq c_{32} \omega^{\varrho-1} T^{-1/2};$$

also schließlich

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega) &\geq \frac{b_1 - b_0}{\Gamma(\varrho)} \left(1 + \frac{L_3}{K} \right) - |J| \omega^{1-\varrho} K^{-1} - c_{33} \omega T^{-1/2} \\
 (13) \quad &\geq \frac{b_1 - b_0}{\Gamma(\varrho)} - \frac{c_{33} \omega}{\sqrt{T}} - \frac{c_{37} \lg^{\tau} T}{\omega^{1+\varrho} \sqrt{T}} - e^{-\omega(1-\alpha)} \{ c_{28} T^b \lg^{\tau} T + c_{29} T^{1-\varrho} \}.
 \end{aligned}$$

In (11) und (13) sind ω und T unabhängig voneinander; es folgt

$$\omega^{-1} H_1(\omega) = H(\omega) - b_0 \Gamma^{-1}(\varrho + 1) = (b_1 - b_0) \Gamma^{-1}(\varrho) \omega^{-1} + \omega^{-1} R.$$

Damit ist das asymptotische Verhalten des Ausdrucks $H_1(\omega)$ ermittelt und Satz 1 bewiesen.

IV.

Die endgültige Gestalt der Aussage über das Restglied R ist abhängig von α , also von der Beschaffenheit des Gebietes links von $\sigma = 1$, in dem $f(s)$ regulär ist, sowie von den Möglichkeiten, die für die Festsetzung einer Abhängigkeit zwischen T und ω bestehen. In einer großen Klasse von Fällen ist das erwähnte Gebiet durch die Sätze von Tchudakoff (1) abgegrenzt; setzt man $\alpha = \alpha_1$ und nimmt für α_1 den in Satz 2 angegebenen Wert, so enthält $\omega^{-1} R$ den Term

$$\omega^{-1} \exp \{ -\kappa \omega \lg^{-\gamma} T \} T^b \lg^{\tau} T,$$

wo $T^b \lg^{\tau} T$ durch $T^{1-\varrho}$ zu ersetzen ist, falls $1 - \varrho > b$; der größte von $e^{-\omega(1-\alpha)}$ unabhängige Term ist $T^{-1/2}$. Man erhält die beste Approximation für R , wenn man ω und T so in Beziehung setzt, daß diese zwei Terme infinitär möglichst von gleicher Größenordnung sind; das erreicht man durch die Annahme

$$T = \exp \{ (\vartheta \omega^{1/1+\gamma}) \}; \quad \vartheta \omega = (\lg T)^{1+\gamma}$$

und es ist zu setzen

$$\begin{aligned}\vartheta &= \kappa\left(\frac{3}{2} - \varrho\right)^{-1} \quad \text{für} \quad 1 - \varrho > b, \\ &= \kappa\left(b + \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{für} \quad 1 - \varrho < b;\end{aligned}$$

dann findet man, wenn $(1 + \gamma)^{-1} = q$,

$$\omega^{-1} R = \theta_2 e^{-p\omega^q}, \quad |\theta_2| < c_6,$$

und dies ist die Behauptung von Satz 2.

V.

Spezielle Fälle:

$$1. \quad f(s) = \zeta^{\varrho}(s) = \sum_1^{\infty} \alpha(\varrho, n) n^{-s}, \quad 0 < \varrho < 1; \text{ vgl. [2];}$$

man hat $b_0 = 0$; $b_1 = 1$; das Rechteck in II liegt sicher rechts von $\sigma = \frac{1}{2}$, da $\zeta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ Nullstellen hat. Hier gilt der

Satz. Es ist gleichmäßig für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$\zeta(s) = O(t^{1/2 - 1/2\sigma} \lg t),$$

siehe E. C. Titchmarsh, The Zeta-function of Riemann, Cambridge Tract No. 26, Theorem 11, p. 20.

Somit kann man in Voraussetzung (iii) nehmen $b = \frac{1}{2} \varrho$. Satz 2 liefert

$$\sum_1^x \alpha(\varrho, n) = \Gamma^{-1}(\varrho) x \lg^{\varrho-1} x (1 + c_{34} \exp[-q \lg^q x]).$$

Hierin hat b , d. h. ϱ Einfluß auf die Konstante p , dagegen nicht auf $q = (1 + \gamma)^{-1}$; $\frac{1}{2} < q < \frac{8}{15}$.

$$2. \quad f(s) = \zeta^{\varrho+1}(s) = \sum \alpha(\varrho+1, n) n^{-s}, \quad 0 < \varrho < 1;$$

es ist $b_0 = 1$; $b_1 = (\varrho+1) \mathfrak{C}_0$, wo $\mathfrak{C}_0$ die Eulersche Konstante ist. Satz 2 liefert, analog wie unter 1.,

$$(14) \quad \begin{aligned} \sum_1^x \alpha(\varrho+1, n) &= \Gamma^{-1}(\varrho+1) x \lg^{\varrho} x \\ &+ [(\varrho+1) \mathfrak{C}_0 - 1] \Gamma^{-1}(\varrho) x \lg^{\varrho-1} x (1 + c_{35} \exp[-p \lg^q x]), \end{aligned}$$

hieraus folgt für $\varrho = 1$

$$\sum_1^x \alpha(2, n) = x \lg x + (2 \mathfrak{C}_0 - 1) x (1 + c_{35} \exp[-p \lg^q x]),$$

und dies stimmt in den Haupttermen mit dem Ausdruck überein, den man durch das Dirichletsche Verfahren für $\sum_1^x d(n) = \sum_1^x \alpha(2, n)$ erhält.

3. Es ist

$$S = \sum_1^x \alpha(\varrho+1, n) = \sum_{n \cdot m \leq x} \alpha(\varrho, n) \cdot 1;$$

berechnet man dies mit Hilfe des Dirichletschen Verfahrens und verwendet das Ergebnis aus [3], S. 132, nämlich

$$\sum_1^x \alpha(\varrho, n) n^{-1} = \Gamma^{-1}(\varrho + 1) \lg^{\varrho} x + (\Omega + o(1)) \lg^{\varrho-1} x,$$

so ergibt sich

$$S = \Gamma^{-1}(\varrho + 1) x \lg^{\varrho} x + x \lg^{\varrho-1} x [2^{1-\varrho} \Omega - (2^{1-\varrho} - \mathfrak{C}_0) \Gamma^{-1}(\varrho) + o(1)].$$

Vergleich mit (14) liefert den Wert von Ω

$$\Omega = \Gamma^{-1}(\varrho) [1 + \varrho 2^{\varrho-1} \mathfrak{C}_0 - 2^{\varrho-1}].$$

In [3] konnte nur die Existenz der Konstanten Ω , nicht ihre Verbindung mit bekannten Größen festgestellt werden.

$$4. \quad f(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum A(n) n^{-s}; \quad \varrho = 1.$$

Es ist $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b = 0$, $\tau = 2$. Die Voraussetzungen $b_0 = 0$, $\varrho = 1$ bewirken, daß die Überlegungen in III geringfügige Abänderungen erleiden; es ergibt sich: $H_1(\omega) = \omega H(\omega)$ ist beschränkt; die Folgerung ist

$$H_1(\omega) = \omega H(\omega) = b_1 + R;$$

also

$$\psi(x) = \sum_1^x A(n) = x(1 + c_{36} \exp[-p \lg^{\gamma} x]),$$

d. h. die Restabschätzung zum Primzahlsatz.

5. Weitere Beispiele für $f(s)$ liefern die den vorangehenden Funktionen entsprechenden für den Hauptcharakter mod k , weiter die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörende Zeta-Funktion, sowie Reihenbildungen analog der folgenden:

$$\begin{aligned} f(s) &= \zeta(s) + \frac{1}{2} \{L^{-1}(s, \chi) + L^{-1}(s, \chi^*)\} \\ &= \Sigma [1 + R(\chi(n) \mu(n))] n^{-s}, \end{aligned}$$

wo χ nicht Hauptcharakter mod k und χ^* der konjugierte Charakter ist; $R(\dots)$ bedeutet den reellen Teil der eingeklammerten Größe.

6. Schließlich ist leicht zu sehen, wie die Formeln sich gestalten, wenn man Voraussetzung (ii) ersetzt durch

$$f(s) = (s-1)^{-\nu-\varrho} \{b_0 + b_1(s-1) + b_2(s-1)^2 + \dots\}, \quad \nu \text{ ganz,}$$

und alles folgende entsprechend erweitert.

Literaturverzeichnis.

A. E. Ingham.

- [1] On Wiener's Method in Tauberian Theorems. Proc. London M. S. (2), 38 (1935), S. 458—480.

A. Kienast.

- [2] Über die Dirichletschen Reihen für $\zeta^{\varrho}(s)$, $L^{\varrho}(s)$. Comment. Math. Helv. 8 (1935), S. 359—370.

[3] Erweiterung eines Konvergenzsatzes von M. Riesz für Dirichletsche Reihen. *Commet. Math. Helv.* **9** (1936), S. 124—134.

[4] Beweis des Satzes $x^{-1} \lg^q x (\psi(x) - x) \rightarrow 0$ ohne Überschreitung der Geraden $\sigma = 1$. *Math. Zeitschr.* **43** (1937), S. 113—119.

E. Landau.

[5] Über den Wienerischen neuen Weg zum Primzahlsatz. *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin* 1932, S. 514—521.

N. Tchudakoff.

[6] On zeros of the function $\zeta(s)$. *C. R. Acad. Sci. URSS.* 1936, I, S. 201—204.

[7] On zeros of Dirichlet's L -functions. *Rec. math. Moscou* (2) **1**, S. 591—602. Betreffe [6], [7] siehe *Fortschritte d. M.* **62**, I (1936), S. 344.

(Eingegangen am 9. Dezember 1937.)

Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen.

Teil V:

Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren bei beliebigen Grenzkreisgruppen.

Von

Hans Petersson in Hamburg.

Einleitung.

Mit der vorliegenden Untersuchung bringe ich die Reihe der Arbeiten, die unter dem angegebenen gemeinsamen Obertitel¹⁾ erscheinen, zum Abschluß. Die hier behandelte Theorie gehört insofern zu den Gegenständen der früheren Arbeiten, als bereits in B von Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren die Rede war; dort ist eine Theorie dieser Reihen im Spezialfall der Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe durchgeführt worden. Die Betrachtung der Reihen in diesem Spezialfall eröffnete einen neuen Zusammenhang zwischen der Theorie der Modulfunktionen und der Arithmetik reell-quadratischer Zahlkörper, von welcher besonders die Einheiten in jenen Reihen eine Rolle spielten. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie für ganz allgemeine Grenzkreisgruppen entwickelt. Dabei zeigt sich, daß *jede* der früher benutzten speziellen Tatsachen aus der Arithmetik der reell-quadratischen Zahlkörper ihr Analogon im allgemeinen Fall besitzt; insbesondere sind also die arithmetischen Eigenschaften derjenigen Zahlen, die im allgemeinen Fall an die Stelle der Einheiten treten, ohne Einfluß auf die Durchführbarkeit des ganzen Ansatzes. Überdies ergibt der Konvergenzbeweis in § 2 der vorliegenden Arbeit die Konvergenz der Reihen für $r > 2$ und nicht nur für $r > 4$, wie in B bewiesen wurde. Ferner ist hervorzuheben, daß der Ansatz der Poincaréschen Reihen neuer Art aus B und der Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren auf solche Substitutionsgruppen in mehreren Variablen verallgemeinert wird, die durch

¹⁾ Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, Teil I, Teil II (Math. Annalen 115 (1938), S. 23—67, S. 175—204); Teil III, IV (im Druck bei den Math. Annalen); im folgenden zitiert mit G I, G II, G III, G IV; die vorliegende Arbeit wird mit G V zitiert. Vgl. ferner: Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen, Math. Annalen 103 (1930), S. 369—436, im folgenden zitiert mit B; Neuere Untersuchungen über automorphe Formen komplexer Dimension, Bericht, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 47 (1937), S. 161—176. Bei den Beweisen der vorliegenden Arbeit werden nur Ergebnisse aus B und G I benutzt.

simultane Anwendung der Substitutionen der Grenzkreisgruppe auf jede der Variablen entstehen. Die Beweisführung konnte gegenüber B in einigen wesentlichen Punkten vereinfacht werden.

Es sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe, von erster oder zweiter Art, mit oder ohne parabolische Substitutionen, r reell, v ein Multiplikatorsystem des Betrages 1. In den fünf Abschnitten des § 1 wird der formale algebraische Apparat entwickelt, auf den sich die Definition der Reihen gründet. § 2, Abschnitt 1 enthält die Darstellung des sogenannten zweiten Poincaréschen Konvergenzbeweises für die Reihen G_{-r} aus B und die neuen Reihen. Da diese beiden Reihentypen sich von den ursprünglichen Poincaréschen Reihen wesentlich unterscheiden, da die deutsche Darstellung dieses Beweises bei Fricke²⁾ mit nahezu allen möglichen Mängeln behaftet ist, und da sich schließlich dieser außerordentlich schöne Beweis auf weniger als drei Seiten in extenso durchführen läßt, habe ich auf seine Darstellung nicht verzichtet. Im zweiten Abschnitt des § 2 wird daraus die Konvergenz von verallgemeinerten Reihen in beliebig vielen Variablen und deren analytisches Verhalten, insbesondere in den Spitzen erschlossen.

Hinsichtlich der Bedeutung dieser etwas komplizierten Theorie möchte ich auf einige Tatsachen kurz hinweisen; bei ihrer Formulierung nenne ich die in der vorliegenden Arbeit konstruierten Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren einfacher „hyperbolische Reihen“

Die hyperbolischen Reihen stehen in enger Beziehung zu den von Hecke³⁾ untersuchten Eisensteinschen Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers³⁾. Wenn man in einer solchen Eisensteinreihe zur vollen Hilbertschen Modulgruppe $\mathfrak{M}$ (oder auch zur Hauptkongruenzuntergruppe von $\mathfrak{M}$ für die Idealstufe n) zwischen den beiden Variablen eine geeignete lineare Relation stiftet, erhält man eine analytische Funktion von einer komplexen Variablen τ in Gestalt einer Reihe, welche eine ganze Modulform in τ von einer gewissen Stufe N darstellt; (eine Reihe von dieser Herkunft soll kurz „spezialisierte Reihe“ genannt werden). Andererseits sind die hyperbolischen Fixpunktpaare von Modulsstitutionen konjugierte reell-quadratische Irrationalitäten, und dies hat zur Folge, daß gewisse sehr spezielle von den hyperbolischen Reihen eine weitgehende (zunächst formale) Ähnlichkeit mit den spezialisierten Reihen aufweisen.

Der Ansatz der hyperbolischen Reihen dient im Zusammenhang hiermit folgenden Zwecken: Erstens soll die Summationsbedingung in den hyper-

²⁾ Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. II (Teubner 1912), I, 3., § 7, S. 167—175.

³⁾ E. Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, I. Teil, II. Teil, Abhandlungen aus d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 102—126; 3 (1924), S. 213—236.

bolischen Reihen dafür sorgen, daß genau über alle Fixpunktepaaire summiert wird, die zu einem festen Fixpunktpaar äquivalent sind; in den spezialisierten Reihen ist das keineswegs der Fall. Daraus ergibt sich, daß die hyperbolischen Reihen als die einfachsten automorphen Bausteine der spezialisierten Reihen aufzufassen sind. Zweitens sollen in Analogie zu den in B aufgestellten Ausdrücken $G_{-\tau}(\tau; v; A, \Gamma; F)$ sowohl Formen reeller Dimension mit beliebigen Multiplikatoren des Betrages 1 gewonnen, als auch die Abhängigkeiten von den ortsuniformisierenden Variablen, die den hyperbolischen Fixpunktepaairen zugeordnet sind, in dem Ansatz ausgedrückt werden. Daß der Übergang zu nichtganzen Dimensionen und die Aufnahme von Multiplikatoren schon für arithmetische Untersuchungen notwendig ist, hat neuerdings nochmals H. Maass⁴⁾ erhärtet. Das Auftreten der genannten Ortsuniformisierenden bringt in Spezialfällen sehr eigentümliche Reihentypen hervor, da diese Ortsuniformisierenden von ähnlicher Bauart sind, wie die Heckschen Größencharaktere λ in den Funktionen $\zeta(s, \lambda)$.

Wenn Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art ist, welche keine parabolischen Matrizen enthält, so sind die ursprünglichen Poincaréschen Reihen, deren Glieder mit konstantem Zähler gebildet sind, nicht konvergent. Die konvergenten Reihen dieses Typus eignen sich zur Auffindung feinerer arithmetischer Zusammenhänge durchaus nicht. Der Grund ist zweifellos, daß man eine automorphe Form als nicht-fortsetzbare analytische Funktion nur dadurch mit Aussicht auf Erfolg untersuchen kann, daß man ihre Entwicklungen in den Umgebungen der Randpunkte ihres Definitionsbereiches betrachtet. Man muß deshalb die Form nach den Ortsvariablen der hyperbolischen Fixpunktepaaire entwickeln, und hier ergeben sich für die genannten Reihen völlig unübersichtliche Darstellungen. Diese Tatsachen legen es nun nahe, die Entwicklungen der hyperbolischen Reihen nach diesen Ortsvariablen zum Ausgangspunkt zu nehmen. Ich erwähne hier, daß solche Reihenentwicklungen für gewisse der von Fricke diskutierten Grenzkreisgruppen Γ von erster Art ohne parabolische Matrizen mit explizit bekanntem Koeffizientengesetz⁵⁾ aufgestellt worden sind, und daß sich dabei in der Tat Be-

⁴⁾ H. Maass, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahlgiger Dimension mit θ -Multiplikatoren in einer und zwei Variablen, Abhandlungen aus d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 12 (1938), S. 133—162; Konstruktion ganzer Modulformen halbzahlgiger Dimension mit θ -Multiplikatoren in zwei Variablen, im Druck bei der Math. Zeitschr.

⁵⁾ Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, Teubner 1897; Dritter Abschnitt: Über arithmetische Definitionsweisen eigentlich diskontinuierlicher Gruppen aus ζ -Substitutionen, S. 446—634. Die untersuchten Gruppen sind durch (14) auf S. 537 gegeben, wenn a, b, c, d als ganze rationale Zahlen gewählt und die Parameter $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ wie folgt spezialisiert werden: $q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = 1$; $p_1 = 1, p_2 = p$ oder $p_1 = p, p_2 = 1$; $p > 1, p$ ganz, quadrat-

ziehungen herausgestellt haben, die auf eine arithmetische Bedeutung dieser automorphe Formen hinweisen.

Die dabei benutzten hyperbolischen Reihen zeichnen sich durch eine Eigenschaft aus, die sich bei einem anderen Reihentypus inzwischen als höchst wichtig erwiesen hat: sie sind formal polfrei. Formal polfreie Reihen vom Charakter der Poincaréschen Reihen sind zuerst in B in Gestalt von Poincaréschen Reihen neuer Art aufgetreten, und in E⁶⁾ wurde gezeigt, daß ein geeignetes System endlich vieler $G_{-\nu}(\tau; \nu; A, \Gamma; R_\nu)$, wo ν gewisse ganze Zahlen mit $\nu + \kappa > 0$ durchläuft, eine Basis für die Schar der ganzen Spitzenformen aus der betreffenden Formenklasse bildet. Da bei Poincaré und Ritter-Fricke die formalen Pole (also endlich viele Punkte in einer Halbebene), und die transformierenden Substitutionen (also endlich viele Substitutionen aus Γ) „geeignet“ bestimmt werden müssen, wird durch den Satz aus E eine erheblich genauere Bestimmung für eine Basis gewonnen. Vor kurzem konnte ich nun zeigen, daß — wenigstens im Fall der Modulgruppe — die ersten μ dieser Reihen, wenn μ die Anzahl der Basisformen angibt, eine Basis bilden. Damit ist in diesem Spezialfall das Problem der expliziten Darstellung aller automorphen Formen vollständig gelöst, und es kann keinem Zweifel unterliegen, daß dieser Satz zum mindesten für eine ziemlich umfassende Klasse von Grenzkreisgruppen erster Art richtig und gegenwärtig beweisbar ist — natürlich nur, wenn die Gruppe parabolische Matrizen enthält. Bei Grenzkreisgruppen von erster Art ohne parabolische Matrizen führt der einzige Ansatz zu einem ähnlichen Vorgehen auf die hyperbolischen Reihen.

Daß die hyperbolischen Reihen sämtlich ohne die geringste formale Änderung und ohne Konvergenzbeschränkungen für schlechthin alle Grenzkreisgruppen sinnvolle analytische Ausdrücke (und zwar automorphe Formen) darstellen, dürfte bei den Untersuchungen, bei denen stetige Abänderungen der Gruppen vorgenommen werden, eine Bedeutung erlangen.

In der vorliegenden Arbeit werden die in G I, S. 30, 31 zusammengestellten Bezeichnungen verwendet.

§ 1.

1. Bezeichnungen; zwei Hilfssätze.

Es sei Γ bis auf weiteres eine beliebige Grenzkreisgruppe, von erster oder zweiter Art, mit parabolischen Matrizen oder ohne solche. Die Fixpunkte frei. Die genauere Untersuchung dieser Gruppen mit p = Primzahl ist der erste Schritt, den die Theorie der automorphen Funktionen über die Modulgruppe hinaus zu tun hat, um die arithmetischen Gesetze der Grenzkreisgruppen zu erforschen. Es sei bemerkt, daß die genannten Gruppen nur für $p \equiv 1 \pmod{4}$ parabolische Substitutionen enthalten.

⁶⁾ H. Petersson, Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen, Math. Annalen 106 (1932), S. 343—368.

einer reellen unimodularen hyperbolischen Matrix $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\gamma \neq 0$ sind durch

$$(1) \quad \omega = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2|\gamma|}, \quad \omega' = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} - \frac{\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2|\gamma|}$$

gegeben, wo

$$\omega - \omega' = \frac{\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{|\gamma|} > 0, \quad \omega + \omega' = \frac{\alpha - \delta}{\gamma}, \quad \omega \omega' = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Setzt man

$$V = \frac{1}{\sqrt{\omega - \omega'}} \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & -\omega' \end{pmatrix}, \quad V' = -TV = \frac{1}{\sqrt{\omega - \omega'}} \begin{pmatrix} -1 & \omega' \\ 1 & -\omega \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

so erhält man

$$H = V^{-1} D_{\mu'} V = V'^{-1} D_{\mu} V', \quad \mu = \gamma\omega + \delta, \quad \mu' = \gamma\omega' + \delta,$$

$$\mu\mu' = 1, \quad \operatorname{sgn} \mu = \operatorname{sgn} \mu' = \operatorname{sgn}(\alpha + \delta), \quad |\mu| \neq 1 \neq |\mu'|.$$

Hilfssatz 1. Γ enthält hyperbolische Matrizen.

Beweis: Enthält Γ eine elliptische Matrix, so existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Transformierte $\Gamma' = B\Gamma B^{-1}$ von Γ , welche eine elliptische Matrix E mit dem Fixpunkt i und zugleich eine elliptische Matrix E' mit dem Fixpunkt $i\lambda$, $0 < \lambda < \varepsilon$, enthält. Aus der Darstellung

$$E = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{l} & \sin \frac{\pi}{l} \\ -\sin \frac{\pi}{l} & \cos \frac{\pi}{l} \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{l'} & \lambda \sin \frac{\pi}{l'} \\ -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{\pi}{l'} & \cos \frac{\pi}{l'} \end{pmatrix}$$

in der l, l' feste natürliche Zahlen > 1 bezeichnen, folgt (mit $Sp = \text{Spur}$)

$$-Sp \, E E' = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \sin \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l'} - 2 \cos \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l'} > 2,$$

sobald

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq 2 \frac{\cos \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l'} + 1}{\sin \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l'}}.$$

Enthält Γ parabolische Matrizen, so existiert eine Transformierte Γ' von Γ , welche zwei parabolische Matrizen von der Form

$$U^N = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = S^{-1} U^N S = \begin{pmatrix} 1 + c d N & d^2 N \\ -c^2 N & 1 - c d N \end{pmatrix} \quad (N > 0)$$

enthält, wo $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in Γ , $c \neq 0$. Hieraus folgt für ganzes $k < 0$:

$$Sp \, U^{kN} P = 2 - kc^2 N^2 > 2. \quad -$$

Hilfssatz 2. Wenn zwei hyperbolische Matrizen von Γ einen Fixpunkt gemein haben, so haben sie auch den anderen Fixpunkt gemein.

Beweis (indirekt): Nach Ausübung einer geeigneten Transformation enthalte Γ die hyperbolischen Matrizen H_1 mit dem Fixpunktpaar $0, \infty$ und H_2 mit dem Fixpunktpaar h, ∞ (h reell, $\neq 0$). Danach ist in den Bezeichnungen von G I

$$H_1 = D_\lambda, \quad H_2 = U^h D_a U^{-h} = \begin{pmatrix} a & h(a^{-1} - a) \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix};$$

es werde $\lambda > 1$, $a > 1$ vorausgesetzt. Wenn $\frac{\log \lambda}{\log a}$ rational ist, so findet man mit ganzen p, q , für die $p \log a - q \log \lambda = 0$:

$$H_1^q H_2^{-p} = \begin{pmatrix} \lambda^q & 0 \\ 0 & \lambda^{-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-p} & h(a^p - a^{-p}) \\ 0 & a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = h \lambda^q a^{-p} (a^{2p} - 1) = h (a^{2p} - 1) \neq 0,$$

also einen Widerspruch zu G I, Satz 1.

Es sei $\frac{\log \lambda}{\log a}$ irrational. Man bilde mit ganzen k, p, q :

$$H_1^{q-k} H_2^{-p} H_1^k = \begin{pmatrix} \lambda^q a^{-p} & \lambda^q h (a^p - a^{-p}) \lambda^{-2k} \\ 0 & \lambda^{-q} a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ 0 & \delta^* \end{pmatrix}$$

und bestimme eine Folge von Paaren $p = p_i$, $q = q_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), so daß $\lambda^{q_i} a^{-p_i} \rightarrow 1$, wenn $i \rightarrow \infty$. Hierauf bestimme man zu jedem natürlichen i ein ganzes k_i , so daß

$$\beta_i^* = h \cdot \lambda^{q_i} a^{-p_i} (a^{2p_i} - 1) \lambda^{-2k_i} \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Damit ist eine elementweise gegen I konvergente Folge von Matrizen $L \neq \pm I$ in Γ nachgewiesen und die Annahme widerlegt. —

Ist $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine hyperbolische Matrix von Γ ($\gamma \neq 0$ oder $\gamma = 0$) mit den Fixpunkten η und η' , so führen wir die unimodularen reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\alpha'_1 & -\alpha'_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = -T A$$

ein; von ihnen wird verlangt, daß

$$(2) \quad \begin{cases} A\eta = 0, & \text{d. h. } \alpha_1\eta + \alpha_2 = 0 \text{ für endliches } \eta, \alpha_1 = 0 \text{ für } \eta = \infty, \\ A\eta' = \infty, & \text{d. h. } \alpha'_1\eta' + \alpha'_2 = 0 \text{ für endliches } \eta', \alpha'_1 = 0 \text{ für } \eta' = \infty. \end{cases}$$

Man findet

$$A'\eta' = A\eta = 0, \quad A'\eta = A\eta' = \infty, \\ H = A^{-1} D_{\eta'} A = A'^{-1} D_{\eta} A',$$

$\mu = \gamma\eta + \delta$ für endliches η , $\mu' = \gamma\eta' + \delta$ für endliches η' ,

$\mu = \alpha$ für $\eta = \infty$ ($\mu' = \delta$), $\mu' = \alpha$ für $\eta' = \infty$ ($\mu = \delta$).

$\mu\mu' = 1$, μ und μ' reell, $\operatorname{sgn} \mu = \operatorname{sgn} \mu' = \operatorname{sgn} (\alpha + \delta)$;

$\gamma \neq 0$ ist gleichbedeutend damit, daß η, η' beide im Endlichen liegen und gibt

$$\alpha_1 \alpha'_1 (\eta - \eta') = 1.$$

$\alpha_1 = 0$ zieht $\gamma = 0$ nach sich, $\alpha'_1 = 0$ zieht $\gamma = 0$ nach sich.

2. Verhalten einer automorphen Form komplexer Dimension bei Anwendung hyperbolischer Matrizen aus Γ (vgl. G I, § 2, Abschnitt 1 und 2).

Es sei r komplex; für die Funktion

$$h(\tau) = (\alpha_1 \tau + \alpha_2)^{\frac{r}{2}} (\alpha'_1 \tau + \alpha'_2)^{\frac{r}{2}}$$

gilt mit $\sigma^* = \sigma(\frac{r}{2})$:

$$h(H\tau) = (\alpha_1 A'^{-1} D_\mu A' \tau + \alpha_2)^{\frac{r}{2}} (\alpha'_1 A'^{-1} D_\mu A' \tau + \alpha'_2)^{\frac{r}{2}} =$$

$$= \sigma^*(A', H) \sigma^*(A, H) (\mu' \alpha_1 \tau + \mu' \alpha_2)^{\frac{r}{2}} (\mu \alpha'_1 \tau + \mu \alpha'_2)^{\frac{r}{2}} (\gamma \tau + \delta)^{-r};$$

$$h(H\tau) = \zeta_r(A, A'; H) (\gamma \tau + \delta)^{-r} h(\tau),$$

$$\zeta_r(A, A', H) \equiv \zeta_r(H) = e^{\pi i r u(A, A'; H)}$$

$$u(A, A'; H) = w(A', H) + w(A, H) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \{ \arg(\mu' \alpha_1 \tau + \mu' \alpha_2) - \arg(\alpha_1 \tau + \alpha_2) + \\ + \arg(\mu \alpha'_1 \tau + \mu \alpha'_2) - \arg(\alpha'_1 \tau + \alpha'_2) \}.$$

Man findet nach G I, § 2, Abschnitt 1, Satz 4:

$$(3) \quad w(A', H) = \begin{cases} \frac{1}{4} \{ \operatorname{sgn} \alpha_1 + \operatorname{sgn} \gamma - \operatorname{sgn} \mu' \alpha_1 - \operatorname{sgn} \mu' \gamma \} & \text{für } \alpha_1 \neq 0, \\ \frac{1}{4} (1 - \operatorname{sgn} \alpha_2) (1 - \operatorname{sgn} \mu') & \text{für } \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad w(A, H) = \begin{cases} \frac{1}{4} \{ \operatorname{sgn} \alpha'_1 + \operatorname{sgn} \gamma - \operatorname{sgn} \mu \alpha'_1 - \operatorname{sgn} \mu \gamma \} & \text{für } \alpha'_1 \neq 0, \\ \frac{1}{4} (1 - \operatorname{sgn} \alpha'_2) (1 - \operatorname{sgn} \mu) & \text{für } \alpha'_1 = 0 \end{cases}$$

und nach G I, Gleichung (9):

$$\frac{1}{2\pi} \{ \arg(\mu' \alpha_1 \tau + \mu' \alpha_2) - \arg(\alpha_1 \tau + \alpha_2) \} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{4} (\operatorname{sgn} \mu' \alpha_1 - \operatorname{sgn} \alpha_1) & \text{für } \alpha_1 \neq 0, \\ \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \alpha_2 \cdot (1 - \operatorname{sgn} \mu') & \text{für } \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \{ \arg(\mu \alpha'_1 \tau + \mu \alpha'_2) - \arg(\alpha'_1 \tau + \alpha'_2) \} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{4} (\operatorname{sgn} \mu \alpha'_1 - \operatorname{sgn} \alpha'_1) & \text{für } \alpha'_1 \neq 0, \\ \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \alpha'_2 \cdot (1 - \operatorname{sgn} \mu) & \text{für } \alpha'_1 = 0, \end{cases}$$

daher

$$\begin{aligned}
 w(A', H) + \frac{1}{2\pi} \{ \arg(\mu' \alpha_1 \tau + \mu' \alpha_2) - \arg(\alpha_1 \tau + \alpha_2) \} &= \\
 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \gamma \cdot (1 - \operatorname{sgn} \mu') & \text{für } \alpha_1 \neq 0 \\ \frac{1}{4} & (1 - \operatorname{sgn} \mu') \text{ für } \alpha_1 = 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \operatorname{sgn}_+ \gamma \cdot (1 - \operatorname{sgn} \mu') \\
 w(A, H) + \frac{1}{2\pi} \{ \arg(\mu \alpha'_1 \tau + \mu \alpha'_2) - \arg(\alpha'_1 \tau + \alpha'_2) \} &= \frac{1}{4} \operatorname{sgn}_+ \gamma \cdot (1 - \operatorname{sgn} \mu'),
 \end{aligned}$$

wo

$$\operatorname{sgn}_+ \gamma = \operatorname{sgn} \gamma \quad \text{für } \gamma \neq 0, \operatorname{sgn}_+ 0 = 1.$$

Also hat sich ergeben:

$$(5) \quad u(H) = u(A, A'; H) = \operatorname{sgn}_+ \gamma \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn} \mu'}{2}.$$

An dieser Formel läßt sich die Tatsache, daß

$$\zeta_r(A, A'; H) (\gamma \tau + \delta)^{-r}$$

beim Übergang von H zu $-H$ fest bleibt, leicht bestätigen. Denn die Änderung von $\frac{1}{\pi i r} \log(\gamma \tau + \delta)^r$ stimmt mit der Änderung von $\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} \gamma - 1)$, d. h. von $\frac{1}{2} \operatorname{sgn} \gamma$ für $\gamma \neq 0$ und von $-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} \delta - 1) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} \mu')$ für $\gamma = 0$ überein; im ersten Falle wechseln γ und μ' das Vorzeichen, im zweiten ist $\operatorname{sgn}_+ \gamma = 1$.

Auf der Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ der Matrizen K von Γ mit dem Fixpunkt η bilden die $\zeta_r(K)$ ein Multiplikatorsystem von der Dimension $+r$. $\zeta_r(H)$ ist dann und nur dann für alle komplexen r gleich 1, wenn das zu H gehörige $\mu' > 0$, d. h. wenn $\alpha + \delta > 0$ (also ≥ 2) ausfällt. Bezeichnet H_0 diejenige (einzige) Matrix aus $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$, für welche μ' unter der Bedingung $\mu' > 1$ den kleinstmöglichen Wert erhält, so wird die Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ von den Matrizen $-I$ und H_0 erzeugt, und $\zeta_r(K)$ ist für alle K aus $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ durch

$$\zeta_r(-I) = e^{\pi i r}, \quad \zeta_r(H_0) = 1$$

eindeutig bestimmt. H_0 heiße normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$; der zu H_0 gehörige Wert μ' werde μ'_0 genannt. Die Vertauschung der Fixpunkte η und η' zerstört diese Normierung von H_0 .

Es sei v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$, $f(\tau)$ eine automorphe Form $\{\Gamma, -r, v\}$. Für die Funktion

$$g(\tau) = f(\tau) \cdot h(\tau)$$

gilt

$$g(K\tau) = v(K) \zeta_r(K) g(\tau) \quad (K \in \mathfrak{Z}_{\eta, \eta'})$$

und die Gesamtheit dieser Formeln ist mit

$$g(H_0 \tau) = v(H_0) g(\tau)$$

gleichbedeutend. Setzt man

$$(5_1) \quad v(H_0) = e^{2\pi i f_{\eta, \eta'}}, \quad f_{\eta, \eta'} = f_{\eta, \eta'; I}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} f_{\eta, \eta'} < 1,$$

$$z = A \tau, \quad w = \log z = \log |z| + i \arg z \text{ (log } |z| \text{ reell, } 0 < \arg z < \pi),$$

$$t = e^{\frac{2\pi i - w}{\log \mu_0^2}},$$

so geht $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\tau$ in diejenige Fläche über, die aus der vollen Riemannschen Fläche von $\log t$ durch die Ungleichung

$$(6) \quad e^{-\frac{2\pi^2}{\log \mu_0^2}} < |t| < 1$$

ausgeschnitten wird. Es ergibt sich

$$g(\tau) = (\alpha_1 \tau + \alpha_2)^{\frac{r}{2}} (\alpha'_1 \tau + \alpha'_2)^{\frac{r}{2}} f(\tau) = e^{2\pi i f_{\eta, \eta'} \frac{w}{\log \mu_0^2}} \Omega(t),$$

wo $\Omega(t)$ eine Laurentreihe in t bezeichnet, die in einem geeigneten offenen konzentrischen Teilringe des Kreisringes (6) der t -Ebene konvergiert.

Es sei S unimodular und reell; die Gruppe der K' aus $\Gamma' = S^{-1} \Gamma S$ mit den Fixpunkten $\eta_1 = S^{-1} \eta$, $\eta'_1 = S^{-1} \eta'$ ist durch

$$\mathfrak{Z}_{\eta_1, \eta'_1} = S^{-1} \mathfrak{Z}_{\eta, \eta'} S$$

gegeben; dabei gilt

$$H_1 = S^{-1} H S = B^{-1} D_{\mu'} B = B'^{-1} D_{\mu} B'$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix} = A S, \quad B' = A' S = -T B = \begin{pmatrix} -\beta'_1 & -\beta'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

so daß

$$B \eta_1 = B' \eta'_1 = 0, \quad B \eta'_1 = B' \eta_1 = \infty.$$

Man setze

$$h_1(\tau) = (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}}.$$

Dann erhält man

$$h(S\tau) = \xi_r(A, A'; S) (c\tau + d)^{-r} h_1(\tau)$$

mit

$$\xi_r(A, A'; S) = \sigma^*(A', S) \sigma^*(A, S), \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

und daraus mit $\sigma = \sigma^{(r)}$, $\underline{H}S = \{c', d'\}$:

$$\begin{aligned} h(S H_1 \tau) &= h(H S \tau) = \frac{\xi_r(H) \xi_r(A, A'; S)}{\sigma(H, S)} (c' \tau + d')^{-r} h_1(\tau) \\ &= \frac{\xi_r(H_1) \xi_r(A, A'; S)}{\sigma(S, H_1)} (c' \tau + d')^{-r} h_1(\tau), \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{\sigma(H, S)}{\sigma(S, H_1)} = \frac{\zeta_r(H)}{\zeta_r(H_1)}$$

also

$$v'_S(H_1) = \frac{\zeta_r(H)}{\zeta_r(H_1)} v(H) = e^{\pi i r (\operatorname{sgn}_+ \gamma - \operatorname{sgn}_+ \gamma_1) \frac{1 - \operatorname{sgn} u'}{2}} \cdot v(H)$$

$$\gamma_1 = \gamma a^2 + (\delta - \alpha) a c - \beta c^2.$$

Insbesondere wird für die normierte Erzeugende $H_{1,0} = S^{-1} H_0 S$ von $\mathfrak{Z}_{\eta_1, \eta'_1}$:

$$v'_S(H_{1,0}) = v(H_0) = e^{2\pi i f_{\eta, \eta'; \Gamma}}, \quad f_{\eta_1, \eta'_1; \Gamma} = f_{\eta, \eta'; \Gamma}.$$

3. Die Multiplikatorsysteme auf $\mathbf{A}\Gamma$; die Funktionen $\psi(\mathbf{B}; \tau)$.

Es seien

$$(7) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} L' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathbf{A} L'' = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{pmatrix}$$

zwei Matrizen aus $\mathbf{A}\Gamma$, $\mathbf{B}' = -T\mathbf{B}$, $\Delta' = -T\Delta$. Wenn eine Beziehung $L'' = \pm H_0^n L'$ erfüllt ist, so gilt

$$\Delta = \pm D_{\mu_0^n} \mathbf{B}, \text{ d. h. } \{\delta_1, \delta_2\} = \pm \mu_0'^n \{\beta_1, \beta_2\}, \quad \{\delta'_1, \delta'_2\} = \pm \mu_0^n \{\beta'_1, \beta'_2\}$$

und umgekehrt. Sei andererseits

$$\{\delta_1, \delta_2\} = \lambda \{\beta_1, \beta_2\}, \quad \lambda \text{ reell, } \neq 0.$$

Dann haben Δ' und $D_{\lambda^{-1}} \mathbf{B}'$ die gleiche zweite Zeile; folglich gilt mit einem reellen k :

$$\Delta' = \mathbf{A}' L'' = U^k D_{\lambda^{-1}} \mathbf{B}' = U^k D_{\lambda^{-1}} \mathbf{A}' L',$$

$$\mathbf{A}' L'' L'^{-1} \eta = \infty, \quad L'' L'^{-1} \eta = \mathbf{A}'^{-1} \infty = \eta,$$

also nach Hilfssatz 2

$$L'' L'^{-1} = \pm H_0^n, \quad L'' = \pm H_0^n L', \quad \lambda = \pm \mu_0'^n.$$

Die analoge Tatsache erschließt man aus

$$\{\delta'_1, \delta'_2\} = \lambda' \{\beta'_1, \beta'_2\}, \quad \lambda' \text{ reell, } \neq 0.$$

Es sei wie bisher r komplex, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$. Es werde $v(\mathbf{A})$, wenn $\mathbf{A}$ nicht in Γ liegt, willkürlich definiert, jedoch mit der Einschränkung: $v(\mathbf{A}) \neq 0$ immer, $|v(\mathbf{A})| = 1$, wenn r reell und $|v| \equiv 1$ auf Γ .

Ist $\mathbf{B} = \mathbf{A} L' \subset \mathbf{A}\Gamma$, so setze man

$$v(\mathbf{B}) = v(\mathbf{A}) \sigma^*(\mathbf{A}, L') \sigma^*(\mathbf{A}', L') v(L').$$

Diese $v(\mathbf{B})$ bilden ein rechtsseitiges Multiplikatorsystem auf $\mathbf{A}\Gamma$ bezüglich des Faktorensystems $\sigma^*(\mathbf{B}, L) \sigma^*(\mathbf{B}', L)$, $L \subset \Gamma$. Denn man erhält für $L \subset \Gamma$:

$$\begin{aligned}
 v(\mathbf{B}L) &= v(\mathbf{A}) \sigma^*(\mathbf{A}, L' L) \sigma^*(\mathbf{A}', L' L) v(L' L) \\
 &= v(\mathbf{A}) \sigma^*(\mathbf{A}, L') \sigma^*(\mathbf{A}', L') \sigma^*(\mathbf{B}, L) \sigma^*(\mathbf{B}', L) v(L') v(L) \\
 &= v(\mathbf{B}) \sigma^*(\mathbf{B}, L) \sigma^*(\mathbf{B}', L) v(L).
 \end{aligned}$$

Im weiteren werde die Abhängigkeit von Γ , $-r$, v durch das Argument $\mathfrak{R}$ (= Klasse) zum Ausdruck gebracht. Die Funktion

$$(8) \quad \psi(\mathbf{B}; \tau) = \psi(\mathfrak{R}, \mathbf{B}; \tau) = v(\mathbf{B}) (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}}$$

hat die folgenden Eigenschaften (9), (10), (11):

$$(9) \quad \psi(-\mathbf{B}; \tau) = \psi(\mathbf{B}; \tau).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}} &= \\
 &= \sigma^*(\mathbf{B}, -I) \sigma^*(\mathbf{B}', -I) \frac{(-\beta_1 \tau - \beta_2)^{\frac{r}{2}} (-\beta'_1 \tau - \beta'_2)^{\frac{r}{2}}}{(-1)^r}, \\
 v(-\mathbf{B}) &= \sigma^*(\mathbf{B}, -I) \sigma^*(\mathbf{B}', -I) v(\mathbf{B}) (-1)^{-r}.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich (9).

Sei $L^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$ aus Γ . Dann gilt

$$(10) \quad \psi(\mathbf{B}; L^* \tau) = (v(L^*))^{-1} (\gamma^* \tau + \delta^*)^{-r} \psi(\mathbf{B}L^*; \tau).$$

Beweis: Mit $\mathbf{B}L^* = \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{pmatrix}$ kommt

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{B}; L^* \tau) &= v(\mathbf{B}) \sigma^*(\mathbf{B}, L^*) \sigma^*(\mathbf{B}', L^*) \frac{(\delta_1 \tau + \delta_2)^{\frac{r}{2}} (\delta'_1 \tau + \delta'_2)^{\frac{r}{2}}}{(\gamma^* \tau + \delta^*)^r} \\
 &= (v(L^*))^{-1} (\gamma^* \tau + \delta^*)^{-r} \psi(\Delta; \tau).
 \end{aligned}$$

Für beliebiges $\mathbf{B} = \mathbf{A}L' \subset \mathbf{A}\Gamma$ und beliebiges ganzes n gilt

$$(11) \quad \psi(\mathbf{A}H_0^n L'; \tau) = \psi(D_{\mu_0^n} \mathbf{B}; \tau) = (v(H_0))^n \psi(\mathbf{B}; \tau).$$

Beweis:

$$\frac{\psi(\mathbf{A}H_0^n L'; \tau)}{\psi(\mathbf{B}; \tau)} = \frac{v(\mathbf{A}H_0^n L')}{v(\mathbf{A}L')},$$

$$\begin{aligned}
 v(\mathbf{A}H_0^n L') &= v(\mathbf{A}) \sigma^*(\mathbf{A}, H_0^n L') \sigma^*(\mathbf{A}', H_0^n L') v(H_0^n \cdot L') \\
 &= v(\mathbf{A}) \sigma^*(D_{\mu_0^n} \mathbf{A}, L') \sigma^*(D_{\mu_0^n} \mathbf{A}', L') \sigma^*(\mathbf{A}, H_0^n) \sigma^*(\mathbf{A}', H_0^n) v(H_0^n) v(L') \\
 &= v(\mathbf{B}) \sigma^*(\mathbf{A}, H_0^n) \sigma^*(\mathbf{A}', H_0^n) v(H_0^n).
 \end{aligned}$$

Da das zu $H = H_0^n$ gehörige $\mu' = \mu_0'^n > 0$ ist, so ergibt sich nach (3), (4)

$$\sigma^*(\mathbf{A}, H_0^n) = \sigma^*(\mathbf{A}', H_0^n) = 1.$$

Da ferner auf $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ die $\zeta_r(K)$ ein Multiplikatorsystem von der Dimension $+r$, die $v(K)$ ein Multiplikatorsystem von der Dimension $-r$ bilden, so stellt

$$\chi(K) = \zeta_r(K) v(K)$$

einen geraden Abelschen Charakter auf $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ dar. Deshalb und wegen (5) ist

$$v(H_0^n) = \chi(H_0^n) = (\chi(H_0))^n = (v(H_0))^n,$$

also

$$v(\mathbf{A} H_0^n L') = v(\mathbf{B}) (v(H_0))^n.$$

4. Die Systeme $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$. Die Reihen $\Xi(\tau; \mathfrak{R}, \mathbf{A}; F)$.

Definition der Systeme $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Matrizen $\mathbf{B}$ habe folgende Eigenschaften:

a) Jedes $\mathbf{B}$ aus $\mathfrak{M}$ liegt in der Nebengruppe $\mathbf{A} \Gamma$.

b) Liegen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{pmatrix}$$

beide in $\mathfrak{M}$, so ist

$$\{\delta_1, \delta_2\} = \lambda \{\beta_1, \beta_2\} \text{ für kein } \lambda > 0$$

erfüllt.

An Stelle dieser Aussage b) kann auch für beliebige $\mathbf{B}, \Delta$ aus $\mathfrak{M}$ gefordert werden, daß

b') $\{\delta'_1, \delta'_2\} = \lambda' \{\beta'_1, \beta'_2\}$ für kein $\lambda' > 0$ zutrifft.

c) $\mathfrak{M}$ ist nicht erweiterungsfähig.

Eine derartige Menge heißt ein System $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$. Ein System $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$ wird danach in der Gesamtheit aller $\mathbf{A} L', L' \subset \Gamma$ erhalten, wo L' ein volles Repräsentantensystem der Linksnebangruppen von Γ bezüglich der zyklischen Untergruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}^+$ der H_0^n , n ganz, durchläuft; also bei mengentheoretischer Bedeutung des Summenzeichens:

$$\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma) = \sum_{L'} \mathbf{A} L', \quad \Gamma = \sum_{L'} \mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}^+ L'.$$

In beiden Summen soll kein Glied doppelt auftreten.

Die zwischen den Systemen $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$ bestehenden Relationen besagen, daß man durch gewisse Umformungen aus jedem solchen System $\mathfrak{S}$ ein neues System $\mathfrak{S}'$ gewinnt; seine Elemente sind durch das erste System $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt. In diesem Sinne gilt bei mengentheoretischer Bedeutung des obigen Summenzeichens:

$$(12) \quad \mathfrak{S}(D_\lambda \mathbf{A}, \Gamma) = D_\lambda \mathfrak{S}'(\mathbf{A}, \Gamma) \quad (\lambda \text{ reell, } \neq 0),$$

da $\mathbf{A}$ und $D_\lambda \mathbf{A}$ zur gleichen Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}^+$ gehören. Ferner:

$$(13) \quad \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma) L_0 = \mathfrak{S}'(\mathbf{A}, \Gamma) \quad (L_0 \subset \Gamma),$$

$$(14) \quad \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma) S = \mathfrak{S}'(\mathbf{A} S, S^{-1} \Gamma S) \quad (S \text{ unimodular und reell}).$$

Es sei die Funktion $F(t)$ im Kreisring (6) der t -Ebene, abgesehen von isolierten Ausnahmepunkten, erklärt. Man bilde mit allgemeinem $\mathfrak{R}$ unter der bisher benutzten Bezeichnung, und mit irgend einem System $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$ die (zunächst mengentheoretisch zu verstehende) Summe

$$(15) \quad \Xi(\tau; \mathfrak{R}, \mathbf{A}; F) = \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)} t_{\mathbf{B}}^{f_{\eta, \eta'}} F(t_{\mathbf{B}}) (\psi(\mathfrak{R}, \mathbf{B}; \tau))^{-1},$$

wo für komplexes ξ :

$$(16) \quad t_{\mathbf{B}}^{\xi} = e^{\frac{2\pi i \xi \log \mathbf{B} \tau}{\log \mu_0'^2}}$$

zu setzen und τ in $\mathfrak{H}$ so zu wählen ist, daß $F(t_{\mathbf{B}})$ für alle $\mathbf{B}$ aus $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$ erklärt ist. Wird das System $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$ irgendwie abgeändert, d. h. jedes $\mathbf{B}$ durch ein $D_{\mu_0', n} \mathbf{B}$ (n eine beliebige ganze Zahl) ersetzt, so ändern sich nach (11) die einzelnen Glieder der Summe (15) nicht. Aus (8) und (12) folgt für reelles $\lambda \neq 0$:

$$\Xi(\tau; \mathfrak{R}, D_{\lambda} \mathbf{A}; F) = e^{\frac{2\pi i f_{\eta, \eta'} \log \lambda^2}{\log \mu_0'^2}} \frac{v(\mathbf{A})}{v(D_{|\lambda|} \mathbf{A})} \Xi(\tau; \mathfrak{R}, \mathbf{A}; F^*)$$

mit

$$F^*(t) = F(\xi t), \quad \xi = e^{\frac{2\pi i \log \lambda^2}{\log \mu_0'^2}}.$$

Aus (10) und (13) folgt für $L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$\Xi(L_0 \tau; \mathfrak{R}, \mathbf{A}; F) = v(L_0) (\gamma_0 \tau + \delta_0)^r \Xi(\tau; \mathfrak{R}, \mathbf{A}; F).$$

5. Transformation der Reihen $G_{-\tau}$ aus $\mathbf{B}$ und der Reihen Ξ mit einer unimodularen reellen Matrix S . Die möglichen Pole in den elliptischen Ecken.

Die Reihen $G_{-\tau}$ wurden in $\mathbf{B}$ durch die Formel

$$G_{-\tau}(\tau; v; \mathbf{A}, \Gamma; F) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)} \frac{e^{\frac{2\pi i \kappa \frac{M\tau}{N}}{N}} F\left(e^{\frac{2\pi i \frac{M\tau}{N}}{N}}\right)}{v(M) (m_1 \tau + m_2)^r}$$

definiert, in der die Zahlen N, κ sich auf die Spitze $s = A^{-1} \infty$ beziehen. Hier wird also vorübergehend die Existenz von parabolischen Matrizen in Γ vorausgesetzt. Mit

$$\underline{M} = \{m_1, m_2\}, \quad \underline{S} = \{c, d\}, \quad MS = M', \quad \underline{M}' = \{m'_1, m'_2\}$$

ist

$$(m_1 S \tau + m_2)^r = \sigma(M, S) \frac{(m'_1 \tau + m'_2)^r}{(c \tau + d)^r},$$

und es folgt, wenn $M = AL$, $L \in \Gamma$:

$$v(M) \sigma(M, S) = v(A) \sigma(A, L) \sigma(AL, S) v(L),$$

ferner, wenn $L' = S^{-1} L S$ und

$$v'_S(L') = v_1(L') = v(L) \frac{\sigma(L, S)}{\sigma(S, L')}$$

gesetzt wird, mit willkürlichem $v_1(AS) \neq 0$:

$$v(M) \sigma(M, S) = \frac{v(A)}{v_1(AS)} C(A, S, L) v_1(M'),$$

$$C(A, S, L) = \frac{\sigma(A, L) \sigma(AL, S) \sigma(S, S^{-1} L S)}{\sigma(AS, S^{-1} L S) \sigma(L, S)} = \sigma(A, S).$$

Daher gilt

$$(17) \quad G_{-r}(S\tau; v; A, I'; F) = \frac{v(A) \sigma(A, S)}{v(A) \sigma(A, S)} (c\tau + d)^r G_{-r}(\tau; v_1; AS, S^{-1} I' S; F).$$

Um die analoge Transformationsformel für die Reihen Ξ zu beweisen, setzen wir in Abänderung der bisher benutzten Bezeichnung $B = AL$, $L \subset \Gamma$ und schreiben

$$B_1 = BS = ASS^{-1}LS = \begin{pmatrix} \beta_3 & \beta_4 \\ \beta'_3 & \beta'_4 \end{pmatrix},$$

$$B'_1 = -TB_1 = B'S = A'SS^{-1}LS = \begin{pmatrix} -\beta'_3 & -\beta'_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich mit $v'_S = v_1$ und willkürlichem $v_1(AS) \neq 0$:

$$\psi(\mathfrak{R}, B; S\tau) = v(B) \sigma^*(B, S) \sigma^*(B', S) \frac{(\beta_3\tau + \beta_4)^{\frac{r}{2}} (\beta'_3\tau + \beta'_4)^{\frac{r}{2}}}{(c\tau + d)^r},$$

$$v(B) \sigma^*(B, S) \sigma^*(B', S) = \frac{v(A)}{v_1(AS)} C(A, S, L) v_1(B_1),$$

$$C(A, S, L) = \frac{\sigma^*(A, L) \sigma^*(A', L) \sigma^*(AL, S) \sigma^*(A'L, S) \sigma(S, S^{-1}LS)}{\sigma^*(AS, S^{-1}LS) \sigma^*(A'S, S^{-1}LS) \sigma(L, S)} = \sigma^*(A, S) \sigma^*(A', S),$$

$$\psi(\mathfrak{R}, B; S\tau) = \frac{v(A)}{v_1(AS)} \sigma^*(A, S) \sigma^*(A', S) (c\tau + d)^{-r} \psi(\mathfrak{R}_1, B_1; \tau),$$

wo $\mathfrak{R}_1$ die Argumente $S^{-1}LS$, $-r$, v_1 zusammenfaßt. Also hat sich ergeben:

$$(18) \quad \Xi(S\tau; \mathfrak{R}, A; F) = \frac{v_1(AS)}{v(A) \sigma^*(A, S) \sigma^*(A', S)} (c\tau + d)^r \Xi(\tau; \mathfrak{R}_1, AS; F).$$

Es sei $F(t)$ eine im Kreisring (6) bis auf Pole analytische Funktion von t ; $F(t)$ habe im Punkte $t = t_0$ des Kreisringes (6) einen Pol von der Ordnung $g > 0$, so daß

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^g F(t) = C \neq 0.$$

Wir fixieren irgend einen Punkt τ_0 in $\mathfrak{H}$ mit

$$t_0 = e^{\frac{2\pi i \log \tau_0}{\log \mu_0'^2}},$$

setzen $\tau'_0 = \mathbf{A}^{-1} \tau_0$ und sehen nach einer Rechnung, deren Resultat nachher angegeben werden wird, zunächst, daß das mit

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A} L_0 \subset \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)$$

gebildete Glied $W_{\mathbf{B}_0}$ der $\mathcal{E}$ -Reihe in allen Punkten

$$\tau_1 = L^{-1} \tau'_0 \text{ mit } L = H_0^n L_0, \quad n \text{ ganz,}$$

je einen Pol der Ordnung g erhält. Die Gesamtheit der Pole von der Ordnung g , die die sämtlichen Glieder der $\mathcal{E}$ -Reihe aus dem einen Pol $t = t_0$ von $F(t)$ erhalten, ist also mit der Gesamtheit der zu τ'_0 nach Γ äquivalenten Punkte identisch. Im allgemeinen, nämlich dann, wenn τ'_0 nicht elliptischer Fixpunkt von Γ ist, können sich die so entstehenden Pole endlich vieler Glieder der $\mathcal{E}$ -Reihe nicht (auch nicht teilweise) gegenseitig zerstören. Das gleiche gilt im Falle der weiter unten zu bestimmenden Konvergenz für die Gesamtheit der Pole aller Glieder; beides folgt aus (9).

Es sei nun τ'_0 elliptischer Fixpunkt von Γ . Die Antwort auf die Frage, wann die Pole der $\mathcal{E}$ -Reihe sich im genannten Sinne gegenseitig zerstören können, ergibt sich unmittelbar nach Berechnung des Koeffizienten, den in der Entwicklung von $W_{\mathbf{B}_0}$ im Punkte

$$\tau = \tau_1, \quad \tau_1 = \mathbf{B}^{-1} \tau_0 \quad (\mathbf{B} = \mathbf{A} L, \quad L = H_0^n L_0, \quad n \text{ ganz})$$

nach Potenzen von $\tau - \tau_1$ die niedrigste dieser Potenzen aufweist. Wir setzen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix};$$

der genannte Koeffizient hat zunächst für allgemeines τ'_0 den Wert

$$(19) \quad C \left(\frac{\log \mu_0'^2}{2\pi i} \right)^g e^{2\pi i (f_{\eta, \eta'} - g) \frac{\log \tau_0}{\log u_0'^{\frac{2}{3}}}} (\psi(\mathfrak{R}_g, \mathbf{B}; \tau_1))^{-1},$$

wo $\mathfrak{R}_g$ die Argumente Γ , $-(r-2g)$, v zusammenfaßt. Ist τ_1 elliptischer Fixpunkt von der inhomogenen Ordnung l von Γ , E normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\tau_1}$, so ergeben sich die Glieder $W_{\mathbf{B}_1}$ der $\mathcal{E}$ -Reihe, die in $\tau = \tau_1$ einen Pol haben, für

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A} L_1 \subset \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma), \quad L_1 = H_0^{n_1} L_0 E^*, \quad E^* = E^k \quad (0 \leq k \leq 2l-1)$$

(n_1 bezeichnet jeweils eine zu k geeignet zu bestimmende ganze Zahl). Die Koeffizienten der niedrigsten Potenz von $\tau - \tau_1$ für diese Glieder werden aus (19) erhalten, indem man dort

$$\mathbf{B} \text{ durch } \mathbf{B} E^* = \mathbf{B} E^k \quad (0 \leq k \leq 2l-1)$$

ersetzt. Dies kann durch Transformation mit E^k , also sukzessive Transformation mit E bewirkt werden. Dabei bekommt der Ausdruck (19), wenn

$$\underline{E} = \{e_1, e_2\}, \quad v(\underline{E}) = e^{\pi i \frac{r}{l} + 2\pi i \frac{a}{l}}, \quad a \text{ ganz, } 0 \leq a \leq l-1,$$

gesetzt wird, gemäß (10) und G I, (35) jedesmal den Faktor

$$v(E)(e_1 \tau_1 + e_2)^{r-2g} = e^{\pi i \frac{r}{l} + 2\pi i \frac{a}{l} - \pi i \frac{r-2g}{l}} = e^{2\pi i \frac{a+g}{l}}.$$

Man erkennt daraus, daß die Ξ -Reihe den Pol von der Ordnung g im Punkte $\tau = \tau_1$ dann und nur dann behält, wenn

$$-g \equiv a \pmod{l},$$

und wenn der Pol nicht von anderen Polen der Funktion $F(t)$ kompensiert wird.

Zum Abschluß dieser formalen Theorie soll noch eine Formel bewiesen werden, die das Verhalten der Reihen Ξ bei Vertauschung der Fixpunkte

und η' erkennen läßt. Man setze mit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A_1 = T A = -A', \quad A'_1 = -T A_1 = A.$$

Werden die mit A_1 und A'_1 an Stelle von A und A' gebildeten Symbole mit den gleichen Buchstaben wie in der oben entwickelten Theorie bezeichnet, aber durch Anbringung des (eventuell zusätzlichen) Index 1 von den zu A und A' gehörigen Symbolen unterschieden, so ergibt sich

$$\eta_1 = \eta', \quad \eta'_1 = \eta; \quad \mathfrak{Z}_{\eta_1, \eta'_1} = \mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}; \quad \mu'_1 = \frac{1}{\mu'}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\mu};$$

(μ'_1 und μ_1 gehören zum gleichen $H = A_1^{-1} D_\mu A_1 = A_1'^{-1} D_{\mu'} A_1'$ wie μ' und μ)

$$H_{0,1} = H_0^{-1}, \quad \mu'_{0,1} = \mu'_0, \quad f_{\eta_1, \eta'_1} + f_{\eta, \eta'} = 1 - \vartheta_{\eta, \eta'},$$

wo $\vartheta_{\eta, \eta'} = 0$ oder 1, je nachdem ob $\operatorname{Re} f_{\eta, \eta'} > 0$ ist oder nicht; ferner mit $B = A L', L' \subset \Gamma$:

$$B_1 = A_1 L' = T A L' = T B = -B', \quad B'_1 = -T B_1 = T B' = A L' = B;$$

$$\log B \tau + \log B_1 \tau = \pi i, \quad t_{B_1}^\zeta = R_0^\zeta t_B^{-\zeta}, \quad R_0 = e^{-\frac{2\pi^2}{\log \mu_0'^2}},$$

wo für komplexes ζ :

$$R_0^\zeta = e^{\zeta \log R_0}, \quad \log R_0 = -\frac{2\pi^2}{\log \mu_0'^2} \text{ reell.}$$

Die Verwandlung von $\psi(B_1; \tau)$ in $\psi(B; \tau)$ läßt sich auf Grund der Identität

$$\frac{(-\alpha_1 L' \tau - \alpha_2)^{\frac{r}{2}}}{(\alpha_1 L' \tau + \alpha_2)^{\frac{r}{2}}} = \frac{\sigma^*(-A', L') (-\beta_1 \tau - \beta_2)^{\frac{r}{2}}}{\sigma^*(A', L') (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}}} = e^{\pi i \frac{r}{2} \operatorname{sgn} A},$$

$$\text{wo } \operatorname{sgn} A = \begin{cases} -\operatorname{sgn} \alpha_1 & \text{für } \alpha_1 \neq 0 \\ \operatorname{sgn} \alpha_2 & \text{für } \alpha_1 = 0 \end{cases},$$

müheles durchführen. Es ergibt sich

$$\psi(B_1; \tau) = \frac{v(A_1)}{v(A)} e^{\pi i \frac{\tau}{2} \operatorname{sgn} A} \psi(B; \tau).$$

Wird für $R_0 < |t| < 1$

$$F_1(t) = \left(\frac{R_0}{t}\right)^{1-\vartheta_{\eta, \eta'}} F\left(\frac{R_0}{t}\right) \quad \left(\text{so da\ss } R_0 < \left|\frac{R_0}{t}\right| < 1\right)$$

gesetzt, so erhält man schließlich die Umsetzungsformel

$$(20) \quad \Xi(\tau; R, T A; F) = \frac{v(A)}{v(T A)} e^{-\pi i \frac{\tau}{2} \operatorname{sgn} A} R_0^{-f_{\eta, \eta'}} \Xi(\tau; R, A; F_1).$$

§ 2.

1. Konvergenzbeweise.

Es sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe, $r > 2$. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen G_{-r} und Ξ folgt, wie weiter unten gezeigt werden soll, unmittelbar aus der Konvergenz der Reihen

$$(21) \quad \sum_{L \in \mathfrak{S}(I, \Gamma)} \frac{1}{|\gamma \tau + \delta|^r} \quad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$$

für ein festes τ , wenn in (21) Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe mit der Spitze ∞ ($A = I$, Fall 1.) bzw. mit den hyperbolischen Fixpunkten 0 und ∞ ($A = I$, Fall 2.) bezeichnet; im Fall 2. muß das System $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$ geeignet bestimmt werden. Der Konvergenzbeweis für die Reihen (21) beruht auf dem von Poincaré ausgebildeten Verfahren, welches den Flächeninhalt der hyperbolischen Geometrie verwendet.

Sind zwei Punkte im Innern des Einheitskreises gegeben, so bestimme man die Fußpunkte der nichteuklidischen Geraden durch diese Punkte auf dem Einheitskreis. Bei geeigneter Anordnung der vier Punkte ist der Logarithmus ihres Doppelverhältnisses eine positive Zahl, die man die nicht-euklidische Entfernung der beiden Punkte (in bezug auf den Einheitskreis) nennt⁷⁾. Diese Entfernung ist gegenüber linearen Transformationen invariant, als Funktion der beiden Punkte stetig, sie hat den Grenzwert 0, wenn die beiden Punkte zusammenrücken, sie ist symmetrisch und genügt der Dreiecksungleichung. Die im weiteren Text auftretenden Begriffe der euklidischen Geometrie sollen durch den vorgesetzten Buchstaben E, die der hyperbolischen Geometrie von $\mathfrak{H}$ in bezug auf die reelle τ -Achse durch den vorgesetzten Buchstaben H gekennzeichnet werden (also z. B. E-Abstand, H-Kreis, E-Radius, H-Mittelpunkt und andere mehr).

⁷⁾ H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner 1913, S. 154.

Ein H-Kreis mit dem H-Mittelpunkt $a_0 + ib_0$ (a_0 reell, $b_0 > 0$) und dem H-Radius $\varrho > 0$ ist ein E-Kreis mit dem E-Mittelpunkt $a_0 + ib_0 \cdot \operatorname{ch} \varrho$ und dem E-Radius $b_0 \cdot \operatorname{sh} \varrho$. Die E-Höhe des unteren bzw. oberen Kulminationspunktes des H-Kreises beträgt $b_0 e^{-\varrho}$ bzw. $b_0 e^{\varrho}$, der E-Maximalabstand der H-Kreisperipherie vom H-Mittelpunkt beträgt $b_0 (e^{\varrho} - 1)$ (ch und sh bedeuten Kosinus und Sinus hyperbolicus). Im folgenden wird die H-Entfernung zweier Punkte τ, τ' in $\mathfrak{H}$ mit $|\tau' - \tau|_{\mathfrak{H}}$ bezeichnet.

Es sei $\tau_0 = x_0 + iy_0$ (x_0 reell, $y_0 > 0$) ein beliebiger fester Punkt in $\mathfrak{H}$,

$$0 < \varrho_0 < \frac{1}{2} \min_{\substack{L \subset \Gamma \\ L\tau_0 \neq \tau_0}} |L\tau_0 - \tau_0|_{\mathfrak{H}},$$

$\mathfrak{R}_0$ die abgeschlossene H-Kreisscheibe, gegeben durch

$$|\tau - \tau_0|_{\mathfrak{H}} \leq \varrho_0.$$

Die H-Kreisscheiben $L\mathfrak{R}_0$, $L'\mathfrak{R}_0$ ($L \subset \Gamma$, $L' \subset \Gamma$) sind entweder fremd oder miteinander identisch, letzteres dann und nur dann, wenn $L = L' L_0$. $L_0 \tau_0 = \tau_0$. Es sei $l_0 (\geq 2)$ die Anzahl der $L_0 \subset \Gamma$ mit $L_0 \tau_0 = \tau_0$.

Das System $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$ kann im Falle 1. ohne Beschränkung der Allgemeinheit so eingerichtet werden, daß

$$(22) \quad -\frac{N}{2} < \Re L\tau_0 \leq +\frac{N}{2} \quad (L \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma))$$

(U^N normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\infty}$); es soll im Falle 2. so bestimmt werden, daß

$$(23) \quad -\log \mu'_0 < \log |L\tau_0| \leq \log \mu'_0$$

($D_{\mu'_0}$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{0, \infty}$). Die größte E-Distanz P_L eines Punktes in $L\mathfrak{R}_0$ von $L\tau_0$ ist $\Im L\tau_0 \cdot (e^{\varrho_0} - 1)$; daher gilt im Falle 1.:

$$P_L \leq (e^{\varrho_0} - 1) \frac{y_0}{|\gamma\tau_0 + \delta|^2} \quad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma \right),$$

also

$$P_L \leq (e^{\varrho_0} - 1) y_0 \quad \text{oder} \quad P_L \leq (e^{\varrho_0} - 1) \frac{1}{\gamma^2 y_0},$$

je nachdem $\gamma = 0$ oder $\gamma \neq 0$, und $\frac{1}{\gamma^2}$ ist nach G I, § 1, Satz 2 beschränkt. Hieraus folgt die Existenz einer positiven Konstanten C_1 derart, daß im Falle 1.:

$$(24) \quad |\Re L\tau| \leq C_1 \text{ für alle } \tau \in \mathfrak{R}_0 \text{ und alle } L \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma).$$

Im Falle 2. schätzen wir zunächst den Maximalbetrag eines Punktes $L\tau$ von $L\mathfrak{R}_0$ durch

$$|L\tau| \leq |L\tau_0| + \Im L\tau_0 \cdot (e^{\varrho_0} - 1) \leq |L\tau_0| \cdot e^{\varrho_0}$$

ab. Der Minimalbetrag wird auf der Verbindungsstrecke von $\tau = 0$ mit dem E-Mittelpunkt $\tau'_{0,L} = \tau_1$ von $L\mathfrak{R}$ im Punkte $\lambda\tau_1$ angenommen, wo $0 < \lambda < 1$ und mit $b'_0 = \Im L\tau_0$:

$$|\lambda\tau_1| = |\tau_1| - b'_0 \operatorname{sh} \varrho_0 = \frac{|L\tau_0|^2}{|\tau_1| + b'_0 \operatorname{sh} \varrho_0} \geq |L\tau_0|e^{-\varrho_0},$$

da der Nenner im dritten Ausdruck gerade den Maximalbetrag darstellt. Also gilt mit $C_1 = \mu'_0 e^{\varrho_0}$ im Falle 2.:

$$(25) \quad |\log |L\tau|| \leq \log C_1 \text{ für alle } \tau \in \mathfrak{R}_0 \text{ und alle } L \in \mathfrak{S}(I, \Gamma).$$

Es sei $R > C_1, \mathfrak{R}_R$ die abgeschlossene H-Kreisscheibe, gegeben durch

$$|\tau - i|_{\mathfrak{H}} \leq R,$$

$\mathfrak{D}_R$ der Durchschnitt von $\mathfrak{R}_R$ mit dem Bereiche $|\Re \tau| \leq C_1$ im Falle 1., mit dem Bereiche $|\log |\tau|| \leq \log C_1$ im Falle 2. Der hyperbolische Flächeninhalt $\mathfrak{I}_H(\mathfrak{D}_R)$ von $\mathfrak{D}_R$ genügt der Ungleichung

$$\mathfrak{I}_H(\mathfrak{D}_R) < \int_{y=e^{-R}}^{\infty} \int_{|x| \leq C_1} \frac{dx dy}{y^3} = 2C_1 e^R.$$

Es liege τ in $\mathfrak{R}_0$ und L in $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$; wir schreiben

$$\tau = x + iy, \quad L\tau = x_L + iy_L \quad (x, y, x_L, y_L \text{ reell})$$

und haben

$$y_0 e^{-\varrho_0} \leq y \leq y_0 e^{\varrho_0}, \quad |x_L| \leq C_1,$$

ferner im Falle 1.:

$$y_L = \frac{y}{|\gamma\tau + \delta|^2} \leq \frac{1}{\gamma^2 y} \leq \frac{1}{\gamma^2 y_0} e^{\varrho_0} \quad (\gamma \neq 0),$$

wo $\frac{1}{\gamma^2}$ beschränkt;

$$y_L = y \leq y_0 e^{\varrho_0} \quad (\gamma = 0);$$

und im Falle 2.: $y_L \leq C_1$. Wird $z_L = \frac{L\tau - i}{L\tau + i}$ gesetzt, so ergibt sich aus der Definition der H-Entfernung:

$$e^{|L\tau - i|_{\mathfrak{H}}} = \frac{1 + |z_L|}{1 - |z_L|} = \frac{(|L\tau + i| + |L\tau - i|)^2}{|L\tau + i|^2 - |L\tau - i|^2}.$$

Hier ist der Nenner gleich $4y_L$, der Zähler mindestens $|L\tau + i|^2 > 1$ und kleiner als

$$4|L\tau + i|^2 \leq 4\{C_1^2 + (y_L + 1)^2\}.$$

Daher gilt mit gewissen positiven Konstanten C_2, C_3, C_4 :

$$\frac{1}{4y_L} < e^{|L\tau - i|_{\mathfrak{H}}} < \frac{C_2}{y_L},$$

$$C_3 e^{-|L\tau - i|_{\mathfrak{H}}} < \frac{y_L}{y} = \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^2} < C_4 e^{-|L\tau - i|_{\mathfrak{H}}}.$$

Es sei $R' > C_1$; $\mathfrak{S}_{R'}$ die Menge, $m_{R'}$ die Anzahl der $L \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ mit $L\tau_0 \subset \mathfrak{D}_{R'}$; J_0 der H-Inhalt von $\mathfrak{R}_0$. Man findet durch den Vergleich der H-Inhalte

$$m_{R'} \cdot J_0 \leq l_0 \cdot \mathfrak{J}_H(\mathfrak{D}_{R'} + \varrho_0) < l_0 2 C_1 e^{R' + \varrho_0}, \quad m_{R'} < C_5 e^{R'},$$

wo C_5 eine positive Konstante bezeichnet. Wir wählen $R > C_1$, $R > \varrho_0$, R fest, und setzen

$$\mathfrak{I}_n = \mathfrak{S}_{nR} - \mathfrak{S}_{(n-1)R} \text{ für natürliches } n \geq 2, \quad \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{S}_R.$$

Wenn $L \subset \mathfrak{I}_n$, $\tau \in \mathfrak{R}_0$, so gilt

$$|L\tau - i|_H > (n-1)R - \varrho_0 \quad (n \geq 2),$$

daher für alle $\tau \in \mathfrak{R}_0$ mit einem gewissen konstanten C_6 :

$$\sum_{L \subset \mathfrak{I}_n} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} < C_5 e^{nR} C_4^{\frac{r}{2}} e^{\frac{r}{2}\varrho_0 - \frac{r}{2}(n-1)R} = C_6 e^{\frac{2-r}{2}R \cdot n}.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{L \subset \mathfrak{S}_{R'}} \frac{1}{|\gamma\tau + \delta|^r} < C_6 \left(e^{\frac{r-2}{2}R} - 1 \right)^{-1}$$

für alle R' oberhalb einer Schranke, und der Konvergenzbeweis ist erbracht.

2. Konvergenz von G - und E -Reihen in beliebig vielen Variablen; analytisches Verhalten.

Es sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe, n eine feste natürliche Zahl. Zu jedem ganzen ν mit $1 \leq \nu \leq n$ sei ein positives r_ν und ein Multiplikator-system v_ν zu Γ und $-r_\nu$ vom Betrag 1 vorgelegt; ferner sei

$$\sum_{\nu=1}^n r_\nu = r > 2, \quad \tau_\nu \text{ komplex, } \Im \tau_\nu > 0 \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

und erstens

Fall A. A unimodular und reell, $s = A^{-1} \infty$ Spitze von Γ , $P = A^{-1} U^N A$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_s$, $v_\nu(P) = e^{2\pi i \kappa_\nu}$ ($0 \leq \kappa_\nu < 1$), die analytische Funktion $F_\nu(t)$ in $|t| < 1$ bis auf endlich viele Pole und auf $|t| = 1$ ohne Ausnahme regulär ($1 \leq \nu \leq n$). Man bilde unter der Voraussetzung, daß

$$F_\nu \left(e^{2\pi i \frac{M\tau_\nu}{N}} \right)$$

für alle $M \in A\Gamma$ regulär ist, die Reihe

$$\begin{aligned} G_{(-r)} &\equiv G_{(-r)}((\tau); (v); A, \Gamma; (F)) = \\ &= \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \prod_{\nu=1}^n e^{2\pi i \kappa_\nu \frac{M\tau_\nu}{N}} F_\nu \left(e^{2\pi i \frac{M\tau_\nu}{N}} \right) (v_\nu(M))^{-1} (m_1 \tau_\nu + m_2)^{-r_\nu}. \end{aligned}$$

Die formale Theorie dieser Reihen ist der in B für den Spezialfall $n = 1$ entwickelten Theorie analog.

Es sei zweitens

Fall B. $\mathbf{A}$ unimodular und reell, $\mathbf{A}' = -T \mathbf{A}$; $\eta = \mathbf{A}^{-1} 0$, $\eta' = \mathbf{A}^{-1} \infty$ ein Paar konjugierter hyperbolischer Fixpunkte von Γ , $H_0 = \mathbf{A}^{-1} D_{\mu'_0} \mathbf{A}$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$,

$$v_\nu(H_0) = e^{2\pi i f_\nu}, \quad 0 \leq f_\nu < 1,$$

die analytische Funktion $F_\nu(t)$ in $R_0 < |t| < 1$ bis auf endlich viele Pole regulär, auf $|t| = 1$ und auf $|t| = R_0$ ohne Ausnahme regulär;

$$(1 \leq \nu \leq n, \quad R_0 = e^{-\frac{2\pi^2}{\log \mu'_0}}).$$

Man bilde unter der Voraussetzung, daß

$$F_\nu \left(e^{\frac{2\pi i \log \mathbf{B} \tau_\nu}{\log \mu'_0}} \right)$$

für alle $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ Γ regulär ist, die Reihe

$$\begin{aligned} \Xi &\equiv \Xi((\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F)) = \\ &= \sum_{\mathbf{B} \subset \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \Gamma)} \prod_{\nu=1}^n e^{\frac{2\pi i f_\nu \log \mathbf{B} \tau_\nu}{\log \mu'_0}} F_\nu \left(e^{\frac{2\pi i \log \mathbf{B} \tau_\nu}{\log \mu'_0}} \right) (\psi(\mathfrak{R}_\nu, \mathbf{B}; \tau_\nu))^{-1}, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{R}_\nu$ die Argumente Γ , $-r_\nu$, v_ν zusammenfaßt. Die formale Theorie dieser Reihen ist der in § 1 für den Spezialfall $n = 1$ entwickelten Theorie analog.

Um die Konvergenz und das analytische Verhalten dieser verallgemeinerten Reihen in den Variablen τ_ν ($1 \leq \nu \leq n$) zu untersuchen, benutzen wir den folgenden

Hilfssatz 3. Es seien λ_1, λ_2 reell, $C > 0$, $\xi > 0$; es sei

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1, \quad \tau = x + iy \quad (x, y \text{ reell}), \quad |x| \leq C, \quad y \geq \xi.$$

Dann gilt $|\lambda_1 \tau + \lambda_2|^2 \geq C'$, wo C' eine nur von C und ξ abhängige positive Zahl angibt.

Beweis. Wenn $|\lambda_1 \tau + \lambda_2|^2 < 1$, so gilt $\lambda_1^2 < \frac{1}{y^2}$ und

$$|\lambda_1 \tau + \lambda_2| \geq |\lambda_1 x + \lambda_2| \geq \sqrt{1 - \lambda_1^2} - |\lambda_1 x| > \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} - \frac{C}{y} \geq \frac{1}{2},$$

für $y \geq y_0$; im Rechteck $|x| \leq C$, $\xi \leq y \leq y_0$ hat $|\lambda_1 \tau + \lambda_2|^2$ ein positives Minimum.

Die zu den Transformationsformeln (17), (18) analogen Formeln für die verallgemeinerten Reihen

$$G_{(-r)}((\tau); (v); \mathbf{A}, \Gamma; (F)) \quad \text{und} \quad \Xi((\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F))$$

gestatten, ohne daß die Allgemeinheit der Resultate beeinträchtigt würde, die Annahme, daß ∞ parabolische Spitze zu Γ sei, wenn Γ eine solche besitzt,

was im Falle A. vorausgesetzt wurde. Wenn also ∞ parabolische Spitze von Γ ist, werde jedes $\tau_v = x_v + iy_v$ (x_v, y_v reell) auf den Vertikalhalbstreifen $\mathfrak{B}$, gegeben durch $|x_v| \leq C, y_v \geq \xi$ eingeschränkt. Ist ∞ nicht parabolische Spitze von Γ , so werde jedes τ_v auf das Rechteck $\mathfrak{B}$, gegeben durch $|x_v| \leq C, \xi \leq y_v \leq \xi'$ eingeschränkt. Hier bedeuten $C > 0, \xi' > \xi > 0$ beliebig vorgebbare Konstanten.

Man erkennt, daß die in den genannten Reihen auftretenden Produkte

$$(26) \quad \prod_{v=1}^n e^{2\pi i x_v \frac{M\tau_v}{N}} F_v \left(e^{2\pi i \frac{M\tau_v}{N}} \right),$$

$$(26_1) \quad \prod_{v=1}^n e^{2\pi i f_v \frac{\log \mathfrak{B} \tau_v}{\log \mu_0^{\frac{1}{2}}}} F_v \left(e^{2\pi i \frac{\log \mathfrak{B} \tau_v}{\log \mu_0^{\frac{1}{2}}}} \right).$$

für alle M bzw. $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ (Fall A.) bzw. in $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ (Fall B.), abgesehen von einer endlichen Ausnahmемenge $\mathfrak{E}$, und für τ_v auf $\mathfrak{B}$ ($1 \leq v \leq n$) beschränkt sind. Der Beweis soll nachgetragen werden.

Ich beweise zunächst die gleichmäßige Konvergenz der Reihen

$$(27) \quad \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \prod_{v=1}^n |m_1 \tau_v + m_2|^{-r_v},$$

$$(28) \quad \sum_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \prod_{v=1}^n |\beta_1 \tau_v + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta'_1 \tau'_v + \beta'_2|^{-\frac{r_v}{2}},$$

wenn τ_v, τ'_v sämtlich in $\mathfrak{B}$ liegen. Hierzu sei C' die Konstante des Satzes 3 für die Schranken C, ξ von $\mathfrak{B}$. Es ist ($M = AL \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)$):

$$(29) \quad \prod_{v=1}^n |m_1 \tau_v + m_2|^{-r_v} \leq |m_1 i + m_2|^{-r} C'^{-\frac{r}{2}} = C'^{-\frac{r}{2}} |\gamma' w + \delta'|^{-r} |\alpha_1 w - \alpha_0|^r,$$

wenn

$$w = A i, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = M A^{-1} = A L A^{-1}$$

gesetzt wird. Durchläuft $M = AL$ ein System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$, so durchläuft $MA^{-1} = L'$ ein hierdurch eindeutig bestimmtes System $\mathfrak{S}(L, A\Gamma A^{-1})$ und umgekehrt. Bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ sind die Voraussetzungen des Konvergenzbeweises für $\tau = \tau_0 = w$ und $A\Gamma A^{-1}$ an Stelle von Γ erfüllt; die gleichmäßige Konvergenz der Summe (27) ist damit bewiesen.

Das allgemeine Glied der Summe (28) kann durch

$$(30) \quad \prod_{v=1}^n |\beta_1 \tau_v + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta'_1 \tau'_v + \beta'_2|^{-\frac{r_v}{2}} \leq |\beta_1 i + \beta_2|^{-\frac{r}{2}} |\beta'_1 i + \beta'_2|^{-\frac{r}{2}} C'^{-\frac{r}{2}} \leq \\ \leq \frac{1}{2} C'^{-\frac{r}{2}} \{ |\beta_1 i + \beta_2|^{-r} + |\beta'_1 i + \beta'_2|^{-r} \} = \\ = \frac{1}{2} C'^{-\frac{r}{2}} \{ |\gamma_1 w + \delta_1|^{-r} |\alpha_1 w + \alpha'_1|^r + |\gamma_2 w' + \delta_2|^{-r} |\alpha'_1 w' - \alpha_1|^r \}$$

abgeschätzt werden, wenn

$$i = A'^{-1} w = A^{-1} w', \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{pmatrix}, \quad A' = -T A = \begin{pmatrix} -\alpha_1' & -\alpha_2' \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = B' A'^{-1} = A' L A'^{-1}, \quad L_2 = B A^{-1} = A L A^{-1},$$

$$\underline{L}_1 = \{\gamma_1, \delta_1\}, \quad \underline{L}_2 = \{\gamma_2, \delta_2\}$$

gesetzt wird. Durchläuft B ein System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$, so durchläuft L_2 ein System $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$, welches elementweise eineindeutig auf $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ bezogen ist und umgekehrt. Man bestimme nun $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ so, daß das entstehende

$$\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1}) = \mathfrak{S}(A, \Gamma) A^{-1}$$

der Abschätzung

$$|\log |L_2 w'| \leq \log \mu'_0$$

genügt. Die Matrizen $L_1 = B' A'^{-1}$ bilden ein System $\mathfrak{S}(I, A' \Gamma A'^{-1})$, welches durch die letzte Gleichung ebenfalls eineindeutig auf $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ bezogen ist. Man hat unter diesen Umständen

$$L_1 w = A' L A'^{-1} A' i = (-T) A L i = (-T) L_2 w',$$

$$\log |L_1 w| = -\log |L_2 w'|, \quad |\log |L_1 w|| \leq \log \mu'_0.$$

Daher sind die Voraussetzungen des Konvergenzbeweises für die beiden Reihen

$$L_1 \subset \mathfrak{S}(I, A' \Gamma A'^{-1}), \quad L_2 \subset \mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$$

mit $A' \Gamma A'^{-1}$ an Stelle von Γ , $\tau = \tau_0 = w$ bzw. mit $A \Gamma A^{-1}$ an Stelle von Γ , $\tau = \tau_0 = w'$ erfüllt, und somit ist die gleichmäßige Konvergenz der Summe (28) bewiesen.

Der nachzutragende Beweis dafür, daß zunächst das erste Produkt (26) für alle M von $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$, abgesehen von einer endlichen Ausnahmemenge beschränkt ist, wenn die τ_v unabhängig voneinander auf $\mathfrak{B}$ variieren, erfordert nach den Voraussetzungen über die F_v nur den Nachweis, daß

$$\Im M \tau = \frac{y}{|m_1 \tau + m_2|^2} \quad \text{für } \tau = x + i y \ (x, y \text{ reell}) \text{ auf } \mathfrak{B}$$

gleichmäßig gegen Null strebt, wenn M das System $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ durchläuft. Ist $\varrho_0(A)$ (G I, Satz 2) die untere Grenze der $|m_1|$ mit $m_1 \neq 0$,

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \subset A \Gamma$$

im Falle, daß Γ eine parabolische Matrix (und zwar mit dem Fixpunkt $A^{-1}\infty$) enthält, so gilt für gegebenes $\varepsilon > 0$, wenn $m_1 \neq 0$:

$$\Im M \tau \leq \frac{1}{m_1^2 y} \leq \frac{1}{(\varrho_0(A))^2 y} < \varepsilon \quad \text{falls } y > \frac{1}{\varepsilon (\varrho_0(A))^2};$$

für $y \leq \frac{1}{\varepsilon (\varrho_0(A))^2}$ aber wird

$$\Im M \tau \leq \frac{1}{\varepsilon (\varrho_0(A))^2} \sqrt{|m_1 \tau + m_2|^{-4}}.$$

Damit ist die Behauptung über das erste Produkt (26) bewiesen.

Den Beweis dafür, daß das zweite Produkt (26₁) für alle B aus $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$, abgesehen von einer endlichen Ausnahmемenge beschränkt ist, wenn die τ_v ($1 \leq v \leq n$) unabhängig voneinander auf $\mathfrak{B}$ variieren, führen wir unter Berücksichtigung der Möglichkeit, daß ∞ parabolische Spitze von Γ , daß also $\mathfrak{B}$ ein ins Unendliche reichender Vertikalhalbstreifen ist, durch. (Wir bezeichnen im folgenden zwei unimodulare reelle Matrizen, die sich um den Faktor $-I$ unterscheiden, als ein Paar.) Zunächst erkennt man nach G V, § 1,

Abschnitt 1, daß in diesem Falle sowohl β_1 als auch β'_1 für alle $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$

aus $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ ungleich Null ausfallen, während, wenn ∞ nicht parabolischer Fixpunkt von Γ ist, für höchstens zwei Paare der B aus $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ eine der Zahlen β_1, β'_1 verschwinden kann. Zum Beweise der Behauptung über das Produkt (26₁) genügt es, zu zeigen, daß $\arg B \tau$ für B in $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ und für τ auf $\mathfrak{B}$ die einzigen Häufungspunkte 0 und π hat; d. h.: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Ausnahmемenge $\mathfrak{S}_\varepsilon \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma)$, derart daß

$$(31) \quad 0 < \arg B \tau < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \pi - \varepsilon < \arg B \tau < \pi$$

für τ in $\mathfrak{B}$, $B \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)$, B nicht in $\mathfrak{S}_\varepsilon$.

Um diese Aussage zu erhärten, bemerke man zunächst, daß, im Falle ∞ parabolischer Fixpunkt von Γ ist,

$$\arg B \tau \equiv \arg (\beta_1 \tau + \beta_2) - \arg (\beta'_1 \tau + \beta'_2) \pmod{2\pi},$$

$$\arg B \tau \equiv \arg (\tau - L^{-1} \eta) - \arg (\tau - L^{-1} \eta') \pmod{\pi} \quad (B = AL \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)).$$

Setzt man

$$H_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}, \quad H_0^* = L^{-1} H_0 L = \begin{pmatrix} \alpha_0^* & \beta_0^* \\ \gamma_0^* & \delta_0^* \end{pmatrix},$$

so gilt nach (1)

$$|L^{-1} \eta - L^{-1} \eta'| = \frac{\sqrt{(\alpha_0^* + \delta_0^*)^2 - 4}}{|\gamma_0^*|} = \frac{\sqrt{(\alpha_0 + \delta_0)^2 - 4}}{|\gamma_0^*|}$$

und außerdem $|\gamma_0^*| \geq \varrho_0(I)$. Daher ist $|L^{-1} \eta - L^{-1} \eta'|$ gleichmäßig in L beschränkt, und die Ungleichungen (31) bestehen für $\tau \in \mathfrak{B}$, $\Im \tau > \xi'$ und alle $B = AL$ von $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$, wenn ξ' eine hinreichend große positive Konstante bezeichnet.

Hiernach kann der Fall einer allgemeinen Gruppe Γ unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ ein Rechteck darstellt, behandelt werden. Wird $\tau = A^{-1} \tau'$ gesetzt, so genügt es, folgendes zu zeigen: Es sei $\mathfrak{R}'$ die abgeschlossene H -Kreis-

scheibe mit dem H-Radius $\varrho' > 0$ um $\tau' = i$ als H-Mittelpunkt in der hyperbolischen τ' -Ebene. Dann gilt, wenn L' ein geeignetes System $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$ durchläuft, und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine geeignete endliche Ausnahmemenge $\mathfrak{S}'_\varepsilon$ von $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$ bestimmt wird,

$$0 < \arg L' \tau < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \pi - \varepsilon < \arg L' \tau < \pi$$

für $\tau' \in \mathfrak{R}'$, $L' \in \mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$, L' nicht in $\mathfrak{S}'_\varepsilon$.

Man bestimme nämlich $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$ durch

$$-\log \mu'_0 < \log |L' i| \leq \log \mu'_0;$$

dann ergibt sich für $\tau' \in \mathfrak{R}'$ und alle L' in $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$, wenn $\underline{L}' = \{\gamma', \delta'\}$ (vgl. (25)):

$$\frac{1}{\mu'_0} e^{-\varrho'} \leq |L' \tau'| \leq \mu'_0 e^{\varrho'}, \quad \Im L' \tau' \leq C_7$$

mit einer gewissen Konstanten $C_7 > 0$, ferner mit geeignetem konstantem $C_8 > 0$ nach Hilfssatz 3.:

$$\Im L' \tau' \leq \frac{C_7}{|\gamma' \tau' + \delta'|^2} \leq \frac{C_8}{|\gamma' i + \delta'|^2}.$$

Nach dem Konvergenzbeweis (§ 2, Abschnitt 1) existiert zu jedem positiven

$h \leq \frac{e^{-\varrho'}}{2\mu'_0}$ eine endliche Ausnahmemenge $\mathfrak{S}'_h$ in $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$, so daß

$$\Im L' \tau' < h, \quad |\Re L' \tau'| > \sqrt{\frac{e^{-2\varrho'}}{\mu'^2_0} - h^2}$$

für $\tau' \in \mathfrak{R}'$ und alle B in $\mathfrak{S}(I, A \Gamma A^{-1})$, welche nicht in $\mathfrak{S}'_h$ liegen. Wird diese Aussage mit der im Falle, daß ∞ parabolische Spitze von Γ ist, oben bewiesenen Abschätzung kombiniert, so ergibt sich unmittelbar die Behauptung über das Produkt (26₁).

Es erübrigt, das Verhalten der verallgemeinerten Reihen $G_{(-r)}$ und $\mathcal{E}$ zu bestimmen, wenn einer der Punkte τ_v (bzw. τ'_v) ($1 \leq v \leq n$) innerhalb $\mathfrak{B}$ ins Unendliche rückt. Sei also ∞ parabolische Spitze von Γ ; $\mathfrak{E}$ bezeichne eine endliche Ausnahmemenge von $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ derart, daß m_1 für

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}^*(A, \Gamma) = \mathfrak{S}(A, \Gamma) - \mathfrak{E}$$

von Null verschieden ist, und daß für diese M das Produkt (26) dem Betrage nach unter einer festen Schranke liegt, wenn die τ_v auf $\mathfrak{B}$ variieren. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert nach (29) eine endliche Ausnahmemenge $\mathfrak{E}_\varepsilon$ in $\mathfrak{S}^*(A, \Gamma)$ derart, daß mit $\mathfrak{S}^*_\varepsilon = \mathfrak{S}^*(A, \Gamma) - \mathfrak{E}_\varepsilon$:

$$\sum_{M \in \mathfrak{S}^*_\varepsilon} \prod_{v=1}^n |m_1 \tau_v + m_2|^{-r_v} < \varepsilon \quad (\tau_v \in \mathfrak{B}).$$

Andererseits ist

$$\sum_{M \subset \mathfrak{E}_\varepsilon} \prod_{v=1}^n |m_1 \tau_v + m_2|^{-r_v} \leq \sum_{M \subset \mathfrak{E}_\varepsilon} |m_1 \tau_1 + m_2|^{-r_1} \prod_{v=2}^n C'^{-\frac{r_v}{2}} |m_1 i + m_2|^{-r_v} < \varepsilon$$

für $\tau_v \in \mathfrak{B}$ und hinreichend großes $y_1 = \Im m \tau_1$. Daher strebt

$$\sum_{M \subset \mathfrak{E}^*(A, \Gamma)} \prod_{v=1}^n |m_1 \tau_v + m_2|^{-r_v}$$

gleichmäßig für $\tau_v \in \mathfrak{B}$ ($1 \leq v \leq n$) gegen Null, wenn eine der Zahlen $y_v = \Im m \tau_v \rightarrow +\infty$ strebt. Diese Aussage besteht im übrigen für diejenige Menge $\mathfrak{E}^*(A, \Gamma)$, die aus $\mathfrak{E}(A, \Gamma)$ durch Tilgen des höchstens einen Paares der Matrizen M mit $m_1 = 0$ erhalten wird.

Für die verallgemeinerte Reihe $\mathcal{E}$ sei $\mathfrak{E}$ eine endliche Ausnahmемenge in $\mathfrak{E}(A, \Gamma)$ derart, daß das Produkt (26₁) auf

$$\mathfrak{E}^*(A, \Gamma) = \mathfrak{E}(A, \Gamma) - \mathfrak{E}$$

unterhalb einer festen Schranke liegt. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert nach (30) eine endliche Ausnahmемenge $\mathfrak{E}_\varepsilon$ in $\mathfrak{E}^*(A, \Gamma)$ derart, daß mit $\mathfrak{E}_\varepsilon^* = \mathfrak{E}^*(A, \Gamma) - \mathfrak{E}_\varepsilon$:

$$\sum_{B \subset \mathfrak{E}_\varepsilon^*} \prod_{v=1}^n |\beta_1 \tau_v + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta_1' \tau_v' + \beta_2'|^{-\frac{r_v}{2}} < \varepsilon \quad (\tau_v \in \mathfrak{B}, \tau_v' \in \mathfrak{B}).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} & \sum_{B \subset \mathfrak{E}_\varepsilon} \prod_{v=1}^n |\beta_1 \tau_v + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta_1' \tau_v' + \beta_2'|^{-\frac{r_v}{2}} \leq \\ & \leq \sum_{B \subset \mathfrak{E}_\varepsilon} |\beta_1 \tau_1 + \beta_2|^{-\frac{r_1}{2}} |\beta_1' \tau_1' + \beta_2'|^{-\frac{r_1}{2}} \prod_{v=2}^n C'^{-\frac{r_v}{2}} |\beta_1 i + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta_1' i + \beta_2'|^{-\frac{r_v}{2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

wenn τ_v, τ_v' ($1 \leq v \leq n$) auf $\mathfrak{B}$ variieren und $y_1 = \Im m \tau_1$ oder $y_1' = \Im m \tau_1'$ hinreichend groß ist. Damit ist gezeigt, daß

$$\sum_{B \subset \mathfrak{E}^*(A, \Gamma)} \prod_{v=1}^n |\beta_1 \tau_v + \beta_2|^{-\frac{r_v}{2}} |\beta_1' \tau_v' + \beta_2'|^{-\frac{r_v}{2}}$$

gleichmäßig in allen τ_v, τ_v' ($1 \leq v \leq n$) gegen Null strebt, wenn eine dieser $2n$ Variablen innerhalb $\mathfrak{B}$ ins Unendliche rückt. Diese letzte Aussage besteht im übrigen auch dann, wenn über das volle System $\mathfrak{E}(A, \Gamma)$ summiert wird.

Betrachtet man die Summen Σ^* derjenigen Glieder der verallgemeinerten Reihen $G_{(-r)}$ bzw. $\mathcal{E}$, die mit

$$M \subset \mathfrak{E}^*(A, \Gamma) \quad \text{bzw.} \quad B \subset \mathfrak{E}^*(A, \Gamma)$$

gebildet sind, so strebt nach diesen Ausführungen Σ^* gleichmäßig in allen τ_v ($1 \leq v \leq n$) gegen Null, wenn eine dieser n Variablen ins Unendliche rückt und alle übrigen frei auf $\mathfrak{B}$ variieren.

Insgesamt hat sich also ergeben:

Satz 27. *Die verallgemeinerten Reihen*

$$G_{(-r)}((\tau); (v); A, \Gamma; (F)), \Xi((\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F))$$

sind analytische Funktionen von den τ_v im Gebiete $\Im \tau_v > 0$ ($1 \leq v \leq n$). Werden alle τ_v eingeschränkt: erstens auf einen abgeschlossenen Bereich im Innern der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$; oder zweitens auf einen abgeschlossenen Bereich, der bis auf eine Spitze s von Γ ganz in $\mathfrak{H}$ liegt, und der sich dem Rande von $\mathfrak{H}$ nur im Zwischenraum zwischen zwei hyperbolischen Geraden durch s annähert; oder drittens auf einen Bereich dieser zweiten Kategorie, der sich aber, gemessen in den Ortsvariablen der Riemannschen τ -Kugel, von der Spitze s nicht zu weit entfernt, so gilt für alle drei Arten von Bereichen: Die beiden Reihen $G_{(-r)}$ und Ξ unterscheiden sich von gewissen endlich vielen ihrer Glieder um eine in allen τ_v ($1 \leq v \leq n$) reguläre Funktion (Zusatzfunktion).

Die nachstehenden Aussagen über das Verhalten der weiter unten genannten Funktionen Φ von den τ_v bei Annäherung eines oder mehrerer der τ_v an die Spitze s sind im folgenden Sinne zu verstehen: Es sei $s = -\frac{d}{c}$ (also $s = \infty$ für $c = 0$); wenn gesagt wird, Φ strebe (gleichmäßig) gegen Null, so ist gemeint, daß für den betreffenden Grenzübergang (gleichmäßig)

$$\lim_{v=1}^n \Phi \cdot \prod |c\tau_v + d|^{-r_v} = 0$$

zutrifft (vgl. hierzu den Fall $n = 1$).

(Fortsetzung.) Liegt ein Bereich der zweiten Art vor, und streben eines oder mehrere der τ_v gegen s , so strebt die Zusatzfunktion gleichmäßig im Bereich gegen Null; daher ist das Regularitätsverhalten der vollständigen Reihen, wenn ein τ_v in diese Spitze s hineinrückt, im Falle $n = 1$ also der Hauptteil einschließlich des konstanten Gliedes in der Entwicklung nach der Ortsvariablen zu s , durch das Verhalten der genannten endlich vielen Reihenglieder eindeutig bestimmt. Liegt ein Bereich der dritten Art vor, so strebt darin stets Ξ und, falls nicht $s \sim A^{-1} \infty$ (Γ), auch $G_{(-r)}$ gleichmäßig gegen Null, wenn eines oder mehrere der τ_v in s hineinrücken. Ist dagegen $s \sim A^{-1} \infty$ (Γ), so umfaßt die Zusatzfunktion von $G_{(-r)}$ für diesen Bereich sämtliche Glieder von $G_{(-r)}$ mit Ausnahme von zweien, die sich überdies um einen konstanten Faktor unterscheiden; die Zusatzfunktion strebt gleichmäßig im Bereich gegen Null, wenn eines oder mehrere der τ_v in s hineinrücken.

Die genannten Reihen erfüllen die Transformationsgleichungen

$$G_{(-r)}((L\tau); (v); A, \Gamma; (F)) = \left(\prod_{v=1}^n v_v(L) (\gamma \tau_v + \delta)^{r_v} \right) G_{(-r)}((\tau); (v); A, \Gamma; (F)),$$

$$\Xi((L\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F)) = \left(\prod_{v=1}^n v_v(L) (\gamma \tau_v + \delta)^{r_v} \right) \Xi((\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F)),$$

$$G_{(-r)}((S\tau); (v); A, \Gamma; (F)) = \left(\prod_{v=1}^n V_v(S) (c \tau_v + d)^{r_v} \right) \times \\ \times G_{(-r)}((\tau); (v_1); A S, S^{-1} \Gamma S; (F)),$$

$$\Xi((S\tau); (\mathfrak{R}), \mathbf{A}; (F)) = \left(\prod_{v=1}^n W_v(S) (c \tau_v + d)^{r_v} \right) \Xi((\tau); (\mathfrak{R}_1), \mathbf{A} S; (F)).$$

Hier ist $L \subset \Gamma$, S unimodular und reell,

$$\underline{L} = \{\gamma, \delta\}, \quad \underline{S} = \{c, d\};$$

$(L\tau)$, $(S\tau)$ sind Zusammenfassungen der Argumentsysteme

$$L\tau_v \quad (1 \leq v \leq n) \quad \text{bzw.} \quad S\tau_v \quad (1 \leq v \leq n).$$

Wird $v_{v,1} = v_v$ ($1 \leq v \leq n$) gesetzt, so ist (v_1) eine Zusammenfassung der Multiplikatorsysteme

$$v_{v,1} \quad (1 \leq v \leq n),$$

$(\mathfrak{R}_1)$ eine Zusammenfassung der Klassen

$$S^{-1} \Gamma S, \quad -r_v, \quad v_{v,1} \quad (1 \leq v \leq n).$$

Zur Erklärung der $V_v(S)$, $W_v(S)$ sollen die Faktorensysteme

$$\sigma^{(r_v)} \quad \text{mit} \quad \sigma_v, \quad \sigma^{\left(\frac{r_v}{2}\right)} \quad \text{mit} \quad \sigma_v^*$$

bezeichnet werden. Dann ist

$$V_v(S) = \frac{v_{v,1}(AS)}{v_v(A) \sigma_v(AS)} \quad (1 \leq v \leq n),$$

$$W_v(S) = \frac{v_{v,1}(AS)}{v_v(A) \sigma_v^*(AS) \sigma_v^*(A', S)} \quad (1 \leq v \leq n),$$

mit willkürlichen aber festen und von Null verschiedenen

$$v_{v,1}(AS), \quad v_{v,1}(AS) \quad (1 \leq v \leq n).$$

Nach diesem Satz sind im Falle $n = 1$ diese Reihen G_{-r} und Ξ automorphe Formen $\{\Gamma, -r, v\}$. Für $n > 1$ sind die automorphen Formen zu der Gruppe der simultanen Substitutionen von Γ , angewendet auf die sämtlichen τ_v ($1 \leq v \leq n$) noch nicht definiert. Man wird aber nach Satz 27

diese Definition so einrichten, daß die verallgemeinerten Reihen $G_{(-r)}$ und Ξ unter den Begriff der automorphen Form zu einer solchen simultanen Substitutionsgruppe fallen. In der vorliegenden Arbeit soll auf diese Frage indessen nicht näher eingegangen werden.

Im Spezialfall $n = 1$ ergibt sich über das analytische Verhalten der Reihen G_{-r} und Ξ folgende Aussage:

Satz 28. *Sind in einem kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{R}_0$ von Γ endlich viele Punkte gegeben, ist zu jedem Punkt ein bestimmter Hauptteil in der zugehörigen Ortsvariablen bezüglich Γ für eine zunächst hypothetische Form $\{ \Gamma, -r, v \}$ (d. h. mit Exponenten in den vorgeschriebenen Restklassen mod 1) gegeben ($r > 2$, $|v| \equiv 1$), so existiert, wenn Γ parabolische Fixpunkte besitzt, stets eine Reihe $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ mit willkürlichem A (wo A unimodular und reell, $A^{-1} \infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ) und geeignetem rationalem R , welche in den genannten Punkten Pole mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt und sonst regulär ist bzw. in den Spitzen verschwindet; der Hauptteil in einer Spitze umfaßt nach der üblichen Definition das konstante Glied, falls die zugehörige Zahl $\kappa = 0$ ist. Ferner existiert stets eine Reihe $\Xi(\tau; \mathfrak{R}, A; R)$ mit willkürlichem A (wo A unimodular und reell, $A^{-1} \infty$ und $A^{-1} 0$ ein Paar konjugierter hyperbolischer Fixpunkte von Γ sind) und geeignetem rationalem R , welche in den genannten Punkten, soweit sie keine Spitzen von Γ sind, Pole mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt, sonst regulär ist und überdies in allen Spitzen verschwindet. Der Existenzsatz über die Reihen $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma; R)$ gilt nach B für beliebige Grenzkreisgruppen mit parabolischen Matrizen. Der Existenzsatz über die Reihen $\Xi(\tau; \mathfrak{R}, A; R)$ gilt für ganz beliebige Grenzkreisgruppen, also insbesondere auch für Grenzkreisgruppen ohne parabolische Matrizen.*

(Eingegangen am 28. Dezember 1937.)

Über die *B*-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande.

Von

Jovan Karamata in Belgrad.

Die Potenzreihe

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

sei für $|x| < 1$ konvergent.

Aus der Borelschen Transformation¹⁾

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1-x}{x} \int_0^{\infty} e^{-t \frac{1-x}{x}} b(t) dt$$

mit

$$b(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}$$

folgt unmittelbar, daß die *B*-Limitierbarkeit von s_n die *A*-Limitierbarkeit nach sich zieht, sofern nur die Potenzreihe (1) für $|x| < 1$ konvergiert.

Hier möchte ich umgekehrt die Fragestellung behandeln, welche in der Richtung einiger Sätze von Avakumovic²⁾ liegt, nämlich die Frage, aus welchen Eigenschaften der Funktion $f(z)$ in der Umgebung der Stelle $z = 1$ die *B*-Limitierbarkeit der Potenzreihe an dieser Stelle gefolgert werden kann. Es ergibt sich dabei (vgl. Formel (5)) in Ergänzung des oben erwähnten Satzes, daß aus der *B*-Limitierbarkeit nicht nur die *A*-Limitierbarkeit sondern sogar die Konvergenz der zugehörigen Fourier-Reihe der Funktion $f(z)$ auf dem Kreis

$$\Re : z = \frac{1}{1+it} \quad (-\infty < t < \infty),$$

in $z = 1$ d. h. für $t = 0$ folgt, wenn nur $f(z)$ in $\Re$ beschränkt bleibt.

Satz 1. *Es sei die Potenzreihe*

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

1) Siehe Gustav Doetsch, Über den Zusammenhang zwischen Abelscher und Borelscher Summabilität, Math. Annalen 104 (1931), S. 403–414, insbesondere S. 404.

2) V. G. Avakumović, Théorèmes relatifs aux intégrales de Laplace sur leur frontière de convergence, Comptes Rendus Acad. des Sciences Paris 204 (1937), S. 224–226.

in $|z| < 1$ konvergent und die Funktion $f(z)$ in $\mathfrak{R}: |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ beschränkt. Damit die Potenzreihe (1) in $z = 1$ zum Wert s B -limitierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Fourier-Reihe von $f(z)$ auf diesem Kreise $\mathfrak{R}$ im Punkte $z = 1$ zum Wert s konvergiert, d. h.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{t} f\left(\frac{1}{1+it}\right) dt \rightarrow s, \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

strebt.

Satz 2. Ist die Funktion

$$(1-z)^k f(z) \quad (k > 0, \text{ beliebig reell})$$

in $\mathfrak{R}$ stetig und strebt etwa

$$(2) \quad (1-z)^k f(z) \rightarrow A, \quad \text{falls } z \rightarrow 1 \text{ in } \mathfrak{R},$$

so ist

$$e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!} \sim \frac{A \omega^k}{\Gamma(k+1)}, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Satz 3. Ist die Funktion $f(z)$ im Kreise $\mathfrak{R}$ stetig, so sind die Cesàro-Mittel k -ter Ordnung ($k > 0$) der Potenzreihe in $z = 1$ B -limitierbar.

Aus diesen Sätzen erkennt man, daß die Voraussetzungen über $f(z)$ in $\mathfrak{R}$ eng mit der B -Limitierbarkeit verknüpft sind. Es folgt unter anderem durch Kombination mit den Hardy-Littlewoodschen Sätzen, daß z. B. unter den Bedingungen des Satzes 1 die Potenzreihe im Punkt $z = 1$ schon dann konvergiert, falls $u_n = O(1/\sqrt{n})$ ist³).

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich ganz natürlich und in einfachster Weise aus der folgenden bereits von Laplace und Poisson herrührenden Formel⁴).

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\omega t t}}{(a+it)^{\alpha+1}} dt = \begin{cases} e^{-a\omega} \frac{\omega^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0, \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \omega < 0 \end{cases}$$

$(a > 0).$

³) In losem Zusammenhang hiermit steht auch ein Satz von K. Knopp (Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II, Berlin und Leipzig 1928, S. 32, Aufg. 6), der aus der näheren Angabe über die Stärke der Konvergenz der Teilsummen s_n , d. h.

(I) $s_n = s + o(1/\sqrt{n})$
auf die Stetigkeit der Funktion $f(z)$ für $z \rightarrow 1$ im Kreise $\mathfrak{R}$ zu schließen gestattet. Übrigens kann leicht die Voraussetzung (I) zu

$$c_n^{(k)} = s + o(n^{-(k+1/2)}), \quad (k \geq 0)$$

verallgemeinert werden, wobei $c_n^{(k)}$ die Cesàroschen Mittel k -ter Ordnung bedeuten.

⁴) Vgl. Laplace, Théorie analytique des probabilités, Paris 1814, S. 471 und Poisson, Journal de l'école polytechn. 1823, S. 481.

Beweis des Satzes 1. Man nehme z auf dem Kreis

$$\mathfrak{R}_\varepsilon : z = \frac{1}{1 + \varepsilon + it}, \quad (\varepsilon > 0), \quad -\infty < t < +\infty$$

liegend an, multipliziere

$$\frac{z}{1-z} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1}$$

mit

$$\frac{i}{\pi} \sin \omega t$$

und integriere über t von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Formel (3) liefert dann die Beziehung

$$(4) \quad \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\varepsilon + it} f\left(\frac{1}{1 + \varepsilon + it}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{(1 + \varepsilon + it)^{n+1}} dt$$

$$= e^{-\varepsilon \omega} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!}.$$

Da $f(z)$ in $\mathfrak{R}: |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ beschränkt ist und $\mathfrak{R}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{R}$, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$ strebt, kann in (4) der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchgeführt werden; dies ergibt

$$(5) \quad e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} f\left(\frac{1}{1 + it}\right) dt,$$

woraus die Behauptung folgt.

Beweis des Satzes 2. Es werde für beliebiges reelles $k > 0$

$$(6) \quad \varphi(t) = e^t (1 - e^{-t})^{k+1} = e^t + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{k+1}{r} e^{-(r-1)t}$$

und

$$\varphi(t) = t^{k+1} e^t \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)^{k+1} = t^{k+1} \psi(t)$$

gesetzt, wo also

$$\psi(t) \rightarrow 1, \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

strebt.

Wählt man nun in

$$(7) \quad \frac{z}{1-z} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^{n+1}$$

z auf dem Kreis $\mathfrak{R}_t: z = \frac{1}{1 + \varepsilon + it}$ (wobei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_0 = u_0 = 0$ gesetzt wird, damit die Formel (3) auch für $\omega = 0$ anwendbar sei) und multipliziert man (7) mit $\frac{\varphi(it\omega)}{2\pi}$ ($\omega > 0$),

so folgt durch Anwendung der Formeln (3) wegen der absoluten Konvergenz der Reihe (6)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(it\omega)}{\varepsilon + it} f\left(\frac{1}{1 + \varepsilon + it}\right) dt = e^{-\varepsilon\omega} e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!},$$

d. h.

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\omega} - 1}{\varepsilon + it} \left(\frac{1 - e^{-it\omega}}{it\omega} \right)^k (it)^k f\left(\frac{1}{1 + \varepsilon + it}\right) dt = e^{-\varepsilon\omega} \omega^{-k} e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!}.$$

Wegen der Voraussetzung der Stetigkeit von $(1 - z)^k f(z)$ in $\Re$ bleibt

$$(it)^k f\left(\frac{1}{1 + \varepsilon + it}\right) = (1 + \varepsilon + it)^k \left(\frac{it}{\varepsilon + it}\right)^k (1 - z)^k f(z)$$

bei $\varepsilon \rightarrow 0$ beschränkt, so daß man diesen Grenzübergang auch in (8) ausführen kann:

$$\frac{1}{2\pi} \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \left(\frac{1 - e^{-it\omega}}{it\omega} \right)^{k+1} (it)^k f\left(\frac{1}{1 + it}\right) dt = \omega^{-k} e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!}.$$

Hieraus folgt wegen (2) bei $\omega \rightarrow \infty$,

$$\omega^{-k} e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{\omega^n}{n!} \rightarrow \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} \left(\frac{1 - e^{-it}}{it} \right)^{k+1} dt = C_k A,$$

wo sich durch die Spezialisierung $f(z) = (1 - z)^{-k}$ gerade $C_k = \frac{1}{\Gamma(k+1)}$ ergibt, was die Behauptung liefert.

Der Beweis des Satzes 3 kann aus Satz 2 hergeleitet werden, wenn man ihn auf die Funktion $\frac{f(z)}{(1 - z)^k}$ statt auf $f(z)$ anwendet.

Man kann ihn aber auch in der folgenden Weise direkt führen.

Für die Cesàroschen Mittel k -ter Ordnung (k beliebig > 0)

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}} = \frac{n! \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} S_n^{(k)}$$

gilt definitionsgemäß die Beziehung

$$(9) \quad \frac{f(z)}{(1 - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} z^n.$$

Wird hier z auf dem Kreis $\Re_\varepsilon$ angenommen und beiderseits mit

$$\Gamma(k+1) \frac{z^{k+1}}{2\pi} \varphi(it\omega)$$

multipliziert und über t von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so wird wegen

$$\frac{z}{1-z} = \frac{1}{\varepsilon + it}$$

$$(10) \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(it\omega)}{(\varepsilon + it)^{k+1}} f(z) dt = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(it\omega)}{(1 + \varepsilon + it)^{n+k+1}} dt.$$

Wegen (6) und (3) ist hier aber die rechte Seite

$$= e^{-\varepsilon\omega} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} \frac{\omega^{n+k}}{n!} \frac{n! \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} = e^{-\varepsilon\omega} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} \frac{\omega^{n+k}}{n!},$$

und wegen der Beschränktheit von $f(z)$ im Kreise $\mathfrak{R}$, die ja aus der vorausgesetzten Stetigkeit folgt, kann man in (10) den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ unter dem Integralzeichen vornehmen und erhält dann

$$e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} \frac{\omega^n}{n!} = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \varphi(it\omega) f\left(\frac{1}{1+it}\right) dt,$$

woraus für $\omega \rightarrow \infty$ die Behauptung folgt.

Tübingen, den 13. Februar 1938.

(Eingegangen am 13. Februar 1938.)

Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n .

(Teil II).

Von

Karl Heinrich Weise in Jena.

Einleitung.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit [Math. Zeitschr. **43** (1937), S. 469] wurden für zwei Flächen die bei genügend oft stetig differenzierbaren topologischen Raumtransformationen invarianten Berührungstensoren bzw. Berührungsdifferentialformen eingeführt. Im zweiten Teil soll es sich um eine Anwendung dieser Begriffsbildung auf die Affingeometrie der F_p im A_n handeln. Dabei lösen wir zuerst das Einspannungsproblem. Jedem Flächenpunkt ordnen wir die im allgemeinen von zweiter Ordnung berührenden p -dimensionalen Schmiegeparaboloide zu und können nun mit Hilfe der zu diesen und der F_p gehörigen Berührungstensoren dritter Ordnung eindeutig ein Schmiegeparaboloid auszeichnen, da verschiedene Schmiegeparaboloide im allgemeinen auch zu verschiedenen Berührungstensoren führen. (Die analytische Formulierung dieser Auszeichnung führt für Hyperflächen auf die Apolarität einer quadratischen und kubischen Form.) Der in dem Berührungspunkt mit der Fläche affinvariant verknüpfte Durchmesserraum des Paraboloids läßt sich als Affinnormalenraum der Fläche verwenden. Die Möglichkeit dieser Einspannung hängt unter anderem von dem Nichtverschwinden einer relativen Invariante T ab.

In den §§ 2, 3 wird der notwendige algebraische Kalkül entwickelt. Die durch diese Einspannung induzierte Übertragung in der Fläche wird in § 5 abgeleitet.

Für die spezielle inhaltstreue affine Gruppe läßt sich mit Hilfe von T eine Normierung des von den Tangential- und Normalvektoren aufgespannten Parallelepipeds und eine „Affinoberfläche“ für ein Flächenstück der F_p angeben. Durch die Einspannung wird ebenfalls eine Übertragung des Affinnormalenraumes gegeben mit den Torsionskoeffizienten als Übertragungsgrößen („Torsion“ im Sinne von H. Weyl [10]). Die Frage, inwieweit die gewonnenen Formen die differentialgeometrischen Eigenschaften der Fläche vollständig beschreiben, wird im § 7 beantwortet: Durch Vorgabe einer $(n - p)$ -gliedrigen Schar von quadratischen Differentialformen (mit gewissen

nicht verschwindenden Invarianten) und einer $(n - p)$ -gliedrigen Schar von kubischen Differentialformen, die durch eine verallgemeinerte Apolaritätsbedingung miteinander verknüpft sind, läßt sich bei gegebener Affinnormalraumübertragung, falls gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, eine Fläche bis auf Affinitäten eindeutig bestimmen.

Diese Ergebnisse stehen in voller Analogie zu denjenigen für p -dimensionale Flächen im n -dimensionalen euklidischen Raum. Die Differentialformenscharen übernehmen die Rolle der metrischen Fundamentalform und der Einbettungs- bzw. Krümmungsformen und in der Affinnormalraumübertragung spiegeln sich die affinen Torsionseigenschaften der Fläche wieder. Im Falle der Hyperflächen ist die Affinnormalraumübertragung integrabel, die Koeffizienten können daher bei raumtreuen Affinitäten durch geeignete Normierung zu Null gemacht werden und man erhält die bekannten Resultate von Berwald [1].

Von der induzierten Übertragung kann man zu einem weiteren kovarianten Differentiationsprozeß auf der Fläche gelangen, der von der kubischen Formenschar nicht abhängt. So sind genügend Hilfsmittel bereitgestellt, aus den Formen Invarianten abzuleiten und eine Krümmungstheorie zu entwickeln. Die wichtigsten Krümmungsinvarianten werden angegeben.

Die Eliminationsprobleme im § 3 führen auf die Betrachtung mehrdimensionaler Matrizen. Um den Gedankengang nicht unnötig zu komplizieren, sind die benötigten Hilfssätze aus dieser Theorie in einem Anhang zusammengestellt und bewiesen.

Teil II.

Anwendung des Berührungstensors auf die Affingeometrie der F_p im A_n .

§ 1. Schmiegparaboloid und Berührungstensor 3. Ordnung	162
§ 2. Die komplementären Berührungstensoren 2. Ordnung	164
§ 3. Elimination der Parameterzuordnung beider Flächen	169
§ 4. Einspannung der F_p in den A_n	171
§ 5. Die induzierte Übertragung	172
§ 6. Die Determinante T und die Normierung bei raumtreuen Affinitäten	174
§ 7. Die Grundgleichungen der F_p	176
Anhang: Hilfssätze über mehrdimensionale Matrizen	181

§ 1.

Schmiegparaboloid und Berührungstensor 3. Ordnung.

In einem n -dimensionalen affinen Raum A_n mit den Koordinaten x^i , $i = 1, \dots, n$ sei eine p -dimensionale Fläche F_p ($p \leq n - 1$) durch ihren Ortsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^p)$ $\alpha = 1, \dots, p$ gegeben. Wir setzen voraus,

daß die Fläche in der Umgebung des Punktes P_0 , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(0, 0, \dots, 0) = \mathbf{x}^0$ von der Klasse C_4 ist ¹⁾. Der p -dimensionale Tangentialraum in P_0 $\eta = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}_\alpha^0 v^\alpha$ ²⁾ und die Fläche F_p berühren sich in P_0 von mindestens 1. Ordnung. Beiden Flächen ist daher in P_0 eine Schar von Berührungstensenoren 2. Ordnung zugeordnet mit den Komponenten $B_{\alpha_1 \alpha_2}^e$ ³⁾:

$$\varrho = 1, \dots, r \quad (r = n - p).$$

Nach I (2, 8) ist

$$B_{\alpha_1 \alpha_2}^e = (\mathbf{x}_{\alpha_1}^0 - \eta_{\alpha_1 \alpha_2}^0) \circ \mathfrak{N}^e \quad 4)$$

mit $\mathfrak{N}^e \circ \mathbf{x}_\alpha^0 = 0$ oder wegen $\eta_{\alpha_1 \alpha_2}^0 = 0$:

$$\text{II (1, 1)} \quad B_{\alpha_1 \alpha_2}^e = \mathbf{x}_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \circ \mathfrak{N}^e.$$

In P_0 heften wir einen linearen r -dimensionalen Raum D_r an, $r = n - p$, welcher mit dem Tangentialraum nur den Punkt P_0 gemeinsam hat.

Die D_r aufspannenden Vektoren seien $\mathfrak{d}_\varrho$. Wegen $\mathbf{x}_1^0 \times \mathbf{x}_2^0 \times \dots \times \mathbf{x}_p^0 \times \mathfrak{d}_1 \times \dots \times \mathfrak{d}_r \neq 0$ ⁵⁾ und $\mathbf{x}_\alpha^0 \circ \mathfrak{N}^e = 0$ ist $(\mathfrak{d}_1 \times \dots \times \mathfrak{d}_r) \circ (\mathfrak{N}^1 \times \dots \times \mathfrak{N}^r) \neq 0$ und damit lassen sich die $\mathfrak{d}_\varrho$ stets so wählen, daß $\mathfrak{d}_\varrho \circ \mathfrak{N}^\sigma = \delta_\varrho^\sigma$ ist. ($\delta_\varrho^\sigma = 0$ für $\varrho \neq \sigma$; $\delta_\varrho^\sigma = 1$ für $\varrho = \sigma$). Die Fläche

II (1, 2)

$$\eta = \mathbf{x}^0 + \mathbf{x}_\alpha^0 v^\alpha + \frac{1}{2!} B_{\alpha_1 \alpha_2}^e v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \mathfrak{d}_e$$

berührt wegen $\eta_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \circ \mathfrak{N}^e = B_{\alpha_1 \alpha_2}^e$ unsere Ausgangsfläche $\mathbf{x}(u^1, \dots, u^p)$ in P_2 von *mindestens 2. Ordnung*. Ist $B_{\alpha_2 \alpha_2}^e \neq 0$, so stellt II (1, 2) ein Schmiegeparaboloid dar mit D_r als affinvariantem Durchmesser Raum.

Einem Schmiegeparaboloid und der Fläche läßt sich eine Schar von Berührungstensenoren 3. Ordnung zuordnen mit den Komponenten $B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^e$. Während nun alle Schmiegeparaboloid mit der Fläche die Berührung mindestens 2. Ordnung als gemeinsame Eigenschaft haben, unterscheiden sie sich hinsichtlich der Berührungstensenoren 3. Ordnung. Es liegt daher nahe zu versuchen, durch geeignete Zusatzforderungen an den Berührungstensor 3. Ordnung ein Schmiegeparaboloid auszuzeichnen. Der mit der Fläche affinvariant verknüpfte Durchmesser Raum dieses Paraboloides läßt sich dann als Affin-

¹⁾ Vgl. I, § 1, S. 470. Dabei bedeute I hier und im folgenden den Teil I dieser Arbeit, Math. Zeitschr. 43 (1937), S. 469.

²⁾ Über gleiche Indizes ist zu summieren. $\mathbf{x}_\alpha^0 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \Big|_{P_0}$.

³⁾ I, § 4, S. 479.

⁴⁾ Das Symbol $\circ$ bedeutet: skalares Produkt [vgl. ⁴⁾].

⁵⁾ $\mathbf{x}_1^0 \times \dots \times \mathfrak{d}_r$ bedeutet ein äußeres Produkt der Vektoren $\mathbf{x}_\alpha^0$, $\mathfrak{d}_\varrho$. Bezüglich der Schreibweise dieser und anderer Vektorprodukte schließe ich mich den Arbeiten R. König u. E. Peschl [4], R. König u. K. H. Weise [5]; und I an.

normalenraum der Fläche einführen. Die Durchführung dieses Gedankens erfordert die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen D_r und $B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^e$.

Aus I (2, 8) folgt:

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^e = (\mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 - \mathfrak{y}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0) \circ \mathfrak{N}^e + \frac{1}{2!} \mathfrak{x}_{\alpha_1' \alpha_2'}^0 \circ \mathfrak{N}^e a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\alpha_1' \alpha_2'}$$

und nach I (2, 2), (2, 5) ist:

$$\begin{aligned} a_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2} &= \frac{1}{2} [S(a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_2}) + S(a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1} a_{\beta_3}^{\alpha_2})] \\ &= \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_2} + \delta_{\beta_2}^{\alpha_1} a_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_2} + \delta_{\beta_3}^{\alpha_1} a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_2} + \delta_{\beta_1}^{\alpha_2} a_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_1} + \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} a_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} + \delta_{\beta_3}^{\alpha_2} a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1}, \\ a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha} &= (\mathfrak{y}_{\beta_1 \beta_2}^0 - \mathfrak{x}_{\beta_1 \beta_2}^0) \circ \mathfrak{I}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Aus II (1, 2) folgt $\mathfrak{y}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 = 0$ und wegen $B_{\alpha_1 \alpha_2}^e = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \circ \mathfrak{N}^e$ ergibt sich unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften der Ableitungsvektoren $\mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2}^0, \mathfrak{y}_{\alpha_1 \alpha_2}^0$ damit für den Berührungstensor:

$$\text{II (1, 3)} \quad \boxed{B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^e = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 \circ \mathfrak{N}^e + B_{\alpha_1 \lambda}^e a_{\alpha_2 \alpha_3}^{\lambda} + B_{\alpha_2 \lambda}^e a_{\alpha_1 \alpha_3}^{\lambda} + B_{\alpha_3 \lambda}^e a_{\alpha_1 \alpha_2}^{\lambda}}.$$

Für jedes Schmiegeparaboloid ist ferner die Bedingungsgleichung für die Berührung 2. Ordnung erfüllt.

Sie lautet nach I (2, 3):

$$\mathfrak{x}_{\alpha}^0 a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha} + \mathfrak{x}_{\beta_1 \beta_2}^0 - \mathfrak{y}_{\beta_1 \beta_2}^0 = 0,$$

oder mit II (1, 2):

$$\text{II (1, 4)} \quad \boxed{B_{\beta_1 \beta_2}^e \mathfrak{d}_e = \mathfrak{x}_{\beta_1 \beta_2}^0 + a_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha} \mathfrak{x}_{\alpha}^0}.$$

Um geometrisch verwertbare Resultate zu erhalten, ist es notwendig, auf das Verhalten bei folgenden Transformationen zu achten:

- a) Gruppe der affinen Raumtransformationen,
- b) Gruppe der Parametertransformationen,
- c) Gruppe der Normalraumtransformationen,

d. h. Übergang von einem Fundamentallösungssystem $\mathfrak{N}^e$ der Gleichungen $\mathfrak{x}_{\alpha}^0 \circ \mathfrak{N}^e = 0$ zu einem anderen.

Wir wollen die Gleichungen II (1, 4) nun sinnvoll gegenüber a), b), c) nach den Durchmesservektoren $\mathfrak{d}_e$ auflösen. Die hierzu notwendigen Hilfsmittel werden in § 2 entwickelt.

§ 2.

Die komplementären Berührungstensoren 2. Ordnung.

Da die Komponenten der Berührungstensoren $B_{\alpha_1 \alpha_2}^e$ invariant bei Raumtransformationen sind, haben wir nur die Parametergruppe und Normalraumgruppe zu beachten. Um den Übergang zu komplementären Größen

durchführen zu können, müssen wir zunächst den Einfluß einer dieser beiden Gruppen ausschalten bzw. durch Determinantenbildung relative Invarianten gegenüber *einer* Gruppe herstellen.

Da, wie hier nicht gezeigt werden soll, die Verwendung der Normalraumgruppe zu einer geometrisch nicht gerechtfertigten Einschränkung der mit dieser Methode erfaßbaren Flächen führt, ist die Auswahl zugunsten der Parametergruppe festgelegt.

Die Determinanten

$$\text{II (2, 1)} \quad \Delta^{q_1 \dots q_p} = \begin{vmatrix} B_{11}^{q_1} \dots B_{p1}^{q_p} \\ \vdots \\ B_{1p}^{q_1} \dots B_{pp}^{q_p} \end{vmatrix}$$

sind hinsichtlich der Normalraumgruppe Komponenten eines Tensors p -ten Grades. Ist $q_1 = q_2 = \dots = q_p$, so transformiert sich $\Delta^{q_1 \dots q_p}$ bei *Parametertransformationen* mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante. Für verschiedene Indizes ist dagegen dieses relativ invariante Verhalten *nicht* vorhanden und wir sind genötigt, durch Symmetriebildung zu Größen

$$\text{II (2, 2)} \quad \underbrace{S_{1 \dots p}^{q_1 \dots q_p}}_{1 \dots p} = \frac{1}{p!} \sum_{r=1}^{p!} S_r (\Delta^{q_1 \dots q_p})^6$$

überzugehen, denen diese Eigenschaft wieder zukommt. (Die geordnete Indexgruppe $\underbrace{1 \dots p}_{1 \dots p}$ gibt dieses Verhalten an.) Die Größen $\underbrace{S_{1 \dots p}^{q_1 \dots q_p}}_{1 \dots p}$ können wir wegen $q_\alpha = 1, \dots, r$ als Elemente einer r -reihigen p -dimensionalen Matrix auffassen. Die aus der Theorie dieser Matrizen verwendeten Sätze werden zweckmäßig in einem gesonderten Abschnitt (Anhang) bewiesen, um den Gedankengang an dieser Stelle nicht unnötig zu komplizieren.

Wir stellen zunächst diese Sätze zusammen:

Entsprechend dem quadratischen Schema einer zweidimensionalen Matrix denken wir uns die Elemente $A^{J_1 \dots J_p}$ einer p -dimensionalen Matrix $\mathfrak{A}$ in einem p -dimensionalen Würfelschema angeordnet. Für $J_v = 1, \dots, r$ stehen r Elemente in einer Kantenrichtung. Der Zeile einer quadratischen Matrix entspricht ein $(p-1)$ -dimensionales Würfelschema. Unter „Determinante“ von $\mathfrak{A}$ wollen wir den Ausdruck:

$$\text{II (2, 3)} \quad A = \delta_{\underbrace{J_1 \dots J_r}_{1 \dots r}}^{1 \dots r} \delta_{\underbrace{J_{2r} \dots J_{2r}}_{1 \dots r}}^{1 \dots r} \dots \delta_{\underbrace{J_{p-1} \dots J_{p-1}}_{1 \dots r}}^{1 \dots r} A^{1J_1 J_{21} \dots J_{p-1} 1} A^{2J_{12} \dots J_{p-1} 2} \dots A^{rJ_{1r} \dots J_{p-1} r}$$

⁶⁾ S_r bedeutet eine Permutation der Indizes $q_1, \dots, q_p$.

verstehen. ($\delta_{j_1 \dots j_r}^{1 \dots r}$ verallgemeinertes Kronecker-Symbol⁷⁾). Jedem Element $A^{j_1 \dots j_p}$ von $\mathfrak{A}$ läßt sich eine Unterdeterminante zuordnen, die aus $\mathfrak{A}$ durch Streichen derjenigen $(p-1)$ -dimensionalen Schemata herausgeschnitten wird, die dieses Element enthalten. Mit dem Vorzeichen $(-1)^{\varepsilon_{j_p}}$ multipliziert, erhalten wir das „algebraische Komplement“ und für $A \neq 0$ durch Division mit A das „komplementäre Element“ $\check{A}_{j_1 \dots j_p}$.

Satz I. Bei einer Vertauschung zweier $(p-1)$ -dimensionaler „Zeilen“ wird die Determinante A mit $(-1)^{p-1}$ multipliziert, d. h. bei ungerader Dimension wird ihr Wert nicht geändert! Für gerades p ist A eine relative Invariante

$$A = A^{(1 \dots r)^p}.$$

Satz II. Bei einer Transformation der Elemente

$$A^{j_1 \dots j_p} = A^{*K_1 \dots K_p} C_{K_1}^{j_1} \dots C_{K_p}^{j_p},$$

transformieren sich die komplementären Elemente komplementär

$$\check{A}_{j_1 \dots j_p} = \check{A}_{K_1 \dots K_p}^* \check{C}_{j_1}^{K_1} \dots \check{C}_{j_p}^{K_p}$$

dann und nur dann, wenn p eine gerade Zahl ist.

Satz III. Für gerade Dimension gilt der Entwicklungssatz:

$$A^{j_{j_2} \dots j_p} \check{A}_{K_{j_2} \dots j_p} = \delta_K^j.$$

Die Größen $S_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_p}}$ sind infolge der Sätze I, II, III für den Übergang zu komplementären Größen noch nicht geeignet; wir erhalten aber durch Produktbildung und nachfolgende Symmetrisierung:

$$\text{II (2, 4)} \quad T_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_2} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_3} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_4}}^{\varrho_1 \dots \varrho_2 p} = \frac{1}{(2p)!} \sum_{v=1}^{(2p)!} S_v (S_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_2}}^{\varrho_1 \dots \varrho_2 p} S_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_3} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_4}}^{\varrho_3 \dots \varrho_4 p})$$

Elemente einer $2p$ -dimensionalen r -reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{T}$, zu denen wir für eine nichtverschwindende Determinante $T \neq 0$ sinnvoll komplementäre Elemente

$$\check{T}_{\underbrace{\varrho_1 \dots \varrho_2 p}_{1 \dots p} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_3} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_4}}^{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_2}} = \check{T}_{\underbrace{\varrho_1 \dots \varrho_2 p}_{1 \dots p}}^{(1 \dots p)^4}$$

bilden können. Durch skalare Multiplikation mit $S_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_2}}^{\varrho_1 \dots \varrho_2 p}$ wird schließlich die Anzahl der Indizes ϱ_a wieder auf p reduziert:

$$\text{II (2, 5)} \quad \check{S}_{\underbrace{\varrho_1 \dots \varrho_p}_{1 \dots p}}^{(1 \dots p)^2} = \check{T}_{\underbrace{\varrho_1 \dots \varrho_p}_{1 \dots p}}^{(1 \dots p)^4} S_{\underbrace{1 \dots p}_{\varrho_1} \underbrace{1 \dots p}_{\varrho_2}}^{\varrho_1 \dots \varrho_2 p}.$$

⁷⁾ Vgl. R. König u. E. Peschl [4], § 10, S. 140.

Ergibt sich das Transformationsverhalten dieser Größen bei der Normalraumgruppe aus Satz III, so wird für Parametertransformationen infolge der relativen Invarianz der Matrixelemente das Verhalten durch Stellung der Indexgruppen $1 \dots p$ richtig wiedergegeben.

Die gesuchten komplementären Berührungsgrößen lassen sich jetzt wie folgt definieren:

II (2, 6)
$$\widetilde{B}_\varrho^{\alpha\beta} = \delta_{\underbrace{1\dots p}}^{\alpha\alpha_2\dots\alpha_p} \delta_{\underbrace{1\dots p}}^{\beta\beta_2\dots\beta_p} B_{\alpha_2\beta_2\dots\alpha_p\beta_p}^{\varrho_2} B_{\alpha_p\beta_p}^{\varrho_p} \widetilde{S}_{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}^{(1\dots p)^2}.$$

Die Bildung der $\widetilde{B}_\varrho^{\alpha\beta}$ und ihre Bezeichnung „komplementär“ wird durch folgende Eigenschaften gerechtfertigt:

- a) Die Stellung der Indizes entspricht genau dem Transformationsverhalten; d. h. aber $\widetilde{B}_\varrho^{\alpha\beta}$ transformiert sich komplementär zu $B_{\alpha\beta}^\varrho$ hinsichtlich der Parameter- und Normalraumgruppe.
- b) Für Hyperflächen $p = n - 1$; $r = 1$ geht $\widetilde{B}_1^{\alpha\beta}$ in die zu $B_{\alpha\beta}^1$ komplementäre Matrix über.
- c) Es gelten die fundamentalen Relationen:

II (2, 7)
$$B_{\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_\varrho^{\alpha'\beta} = r \cdot \delta_\alpha^{\alpha'},$$

II (2, 8)
$$B_{\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_{\varrho'}^{\alpha\beta} = p \cdot \delta_\varrho^{\varrho'},$$

und damit auch $B_{\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_\varrho^{\alpha\beta} = p \cdot r$.
Beweis von II (2, 7), II (2, 8):

$$B_{\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_\varrho^{\alpha'\beta} = B_{\alpha\beta}^\varrho \delta_{\underbrace{1\dots p}}^{\alpha'\alpha_2\dots\alpha_p} \delta_{\underbrace{1\dots p}}^{\beta\beta_2\dots\beta_p} B_{\alpha_2\beta_2\dots\alpha_p\beta_p}^{\varrho_2} \dots B_{\alpha_p\beta_p}^{\varrho_p} \widetilde{S}_{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}^{(1\dots p)^2},$$
$$\delta_{\underbrace{1\dots p}}^{\beta\beta_2\dots\beta_p} B_{\alpha\beta}^\varrho B_{\alpha_2\beta_2\dots\alpha_p\beta_p}^{\varrho_2} \dots B_{\alpha_p\beta_p}^{\varrho_p} = \begin{vmatrix} B_{\alpha_1}^\varrho & B_{\alpha_2 1}^{\varrho_2} & \dots & B_{\alpha_p 1}^{\varrho_p} \\ \vdots & & & \\ B_{\alpha_p}^\varrho & \dots & \dots & B_{\alpha_p p}^{\varrho_p} \end{vmatrix}.$$

Ist z. B. $\alpha = \alpha_2$, dann verschwindet bei Summation über ϱ, ϱ_2 diese Determinante für $\varrho = \varrho_2$ und ändert ihr Vorzeichen bei Vertauschung von ϱ mit ϱ_2 . Infolge der Symmetrie von $\widetilde{S}_{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}^{(1\dots p)^2}$ ergibt die Summation über ϱ, ϱ_2 daher stets Null und entsprechend gilt für $\alpha = \alpha_3$, usw.; allgemein für $\alpha \neq \alpha'$. Für $\alpha \neq \alpha_2, \dots, \alpha_p$ oder $\alpha = \alpha'$ kann man die Determinante auch durch $\delta_{\alpha\alpha_2\dots\alpha_p}^{1\dots p} \Delta^{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}$ beschreiben und damit gilt allgemein:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_\varrho^{\alpha'\beta} &= \delta_\alpha^{\alpha'} \Delta^{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p} \widetilde{S}_{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}^{(1\dots p)^2} \\ &= \delta_\alpha^{\alpha'} \widetilde{S}_{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}^{(1\dots p)^2} \Delta^{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta}^{\varrho} B_{\varrho}^{\alpha'\beta} &= \delta_{\alpha}^{\alpha'} \widetilde{T}_{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_2p}^{(1\ldots p)^4} S_{(1\ldots p)}^{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_p} S_{(1\ldots p)^2}^{\varrho_p+1\ldots\varrho_2p} \\
 &= \delta_{\alpha}^{\alpha'} \widetilde{T}_{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_2p}^{(1\ldots p)^4} T_{(1\ldots p)^4}^{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_2p}
 \end{aligned}$$

und schließlich nach Satz III, S. 166:

$$B_{\alpha\beta}^{\varrho} B_{\varrho}^{\alpha'\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\varrho}^{\varrho} = r \delta_{\alpha}^{\alpha'}.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha\beta}^{\varrho} \widetilde{B}_{\varrho}^{\alpha\beta} &= \delta_{1\ldots p}^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p} \delta_{1\ldots p}^{\beta\beta_2\ldots\beta_p} B_{\alpha\beta}^{\varrho} B_{\alpha_2\beta_2}^{\varrho_2} \ldots B_{\alpha_p\beta_p}^{\varrho_p} \widetilde{S}_{\varrho'\varrho_2\ldots\varrho_p}^{(1\ldots p)^2} \\
 &= (\Delta^{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_p} + \Delta^{\varrho_2\varrho\varrho_3\ldots\varrho_p} + \ldots + \Delta^{\varrho_2\ldots\varrho_p\varrho}) \widetilde{S}_{\varrho'\varrho_2\ldots\varrho_p}^{(1\ldots p)^2} \\
 &= p S_{(1\ldots p)^2}^{\varrho\varrho_2\ldots\varrho_p} \widetilde{S}_{\varrho'\varrho_2\ldots\varrho_p}^{(1\ldots p)^2} = p \delta_{\varrho'}^{\varrho}.
 \end{aligned}$$

Die Determinante T der r -reihigen $2p$ -dimensionalen Matrix $\mathfrak{T}$ ist nach Satz I, S. 166 eine relative Invariante, und zwar ist in unserem Fall genauer:

$$\text{II (2, 9)} \quad T = T_{(1\ldots p)^4}^{(1\ldots r)^2p}.$$

Bei Parameter- und Normalraumtransformationen wird T nur mit einem Faktor multipliziert.

Das Verschwinden von T ist daher eine geometrische Eigenschaft des Flächenpunktes.

Unter Verallgemeinerung des Begriffes für Hyperflächen definiere ich daher:

Flächenpunkte, in denen die Determinante $T = 0$ ist, sollen parabolisch heißen.

In nichtparabolischen Punkten existieren komplementäre Berührungstensoren. Wir wollen für das Folgende voraussetzen, daß in $U(P_0)$ stets $T \neq 0$ ist.

Die Auflösung der Gleichungen II (1, 4) erfolgt durch Multiplikation mit $\widetilde{B}_{\varrho}^{\beta_1\beta_2}$ und Summation:

$$\text{II (2, 10)} \quad \mathfrak{d}_{\sigma} = \frac{1}{p} \{ \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta_1\beta_2} x_{\beta_1\beta_2}^0 + a_{\beta_1\beta_2}^{\alpha} \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta_1\beta_2} x_{\alpha}^0 \} \quad (\sigma = 1, \ldots, r).$$

In II (2, 10) sind alle Größen der rechten Seite mit Ausnahme der $a_{\beta_1\beta_2}^{\alpha}$ nur allein von der gegebenen Fläche abhängig. Da diesen als Größen der Parameterzuordnung beider Flächen keinerlei geometrische Bedeutung zukommt, wollen wir sie eliminieren und durch Ausdrücke in den $B_{\alpha\beta\gamma}^{\varrho}$ ersetzen.

§ 3.

Elimination der Parameterzuordnung beider Flächen.

Die bisher entwickelten Gleichungen reichen für die Lösung dieses Problems noch nicht aus. Wir wollen in einem zu P_0 benachbarten Punkt $P_1(u_1^\alpha)$ ebenfalls ein Schmiegeparaboloid konstruieren. Es gelten dann entsprechende Gleichungen II (1, 4):

$$B_{\alpha_1 \alpha_2}^0(u_1^\alpha) \mathfrak{d}_0(u_1^\alpha) = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2}^1 + a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha(u_1^\alpha) \mathfrak{x}_\alpha^1.$$

Da nach Voraussetzung die Fläche von der Klasse C_4 ist, lassen sich die Komponenten der Normalraumvektoren $\mathfrak{N}^0(u_1^\alpha)$ mit $\mathfrak{x}_\alpha^1 \circ \mathfrak{N}^0 = 0$ in Abhängigkeit von P_1 als stetig differenzierbare Funktionen wählen.

Damit sind aber auch $a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha$, $\mathfrak{d}_0$, $B_{\alpha_1 \alpha_2}^0$ von P_1 stetig differenzierbar abhängig und Gleichung II (1, 4) kann nach $u_1^\gamma = u^\gamma$ differenziert werden:

$$\frac{\partial B_{\alpha_1 \alpha_2}^0}{\partial u^\gamma} \mathfrak{d}_0 + B_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \frac{\partial \mathfrak{d}_0}{\partial u^\gamma} = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \gamma}^1 + \frac{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha}{\partial u^\gamma} \mathfrak{x}_\alpha^1 + a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha \mathfrak{x}_{\alpha \gamma}^1.$$

Für den Punkt P_0 folgt daraus durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{N}^0$:

$$\text{II (3, 1)} \quad \left. \frac{\partial B_{\alpha_1 \alpha_2}^0}{\partial u^\gamma} \right|_{P_0} \delta_\sigma^\gamma + B_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \mathfrak{N}_0^\sigma \frac{\partial \mathfrak{d}_0}{\partial u^\gamma} = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^\sigma + a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha B_{\alpha \gamma}^\sigma.$$

Multiplikation mit $\tilde{B}_\sigma^{\lambda \gamma}$ und Summation über σ, γ ergibt:

$$\text{II (3, 2)} \quad r \cdot a_{\alpha_1 \alpha_2}^\lambda = \left(- \left. \frac{\partial B_{\alpha_1 \alpha_2}^0}{\partial u^\gamma} \right|_{P_0} - \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^\sigma \right) \tilde{B}_0^{\lambda \gamma} + B_{\alpha_1 \alpha_2}^0 \iota_\sigma^\lambda$$

mit

$$\text{II (3, 3)} \quad \iota_\sigma^\lambda = \mathfrak{N}^\sigma \circ \frac{\partial \mathfrak{d}_0}{\partial u^\gamma} \tilde{B}_\sigma^{\lambda \gamma}.$$

Gleichung II (3, 2) eingesetzt in II (1, 3) ergibt Relationen für ι_σ^λ :

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 \circ \mathfrak{N}^0 + \frac{1}{r} \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} B_{\alpha_1 \lambda}^0 \left(\frac{\partial B_{\alpha_2 \alpha_3}^0}{\partial u^\gamma} - \mathfrak{x}_{\alpha_2 \alpha_3 \gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^\sigma \right) \tilde{B}_0^{\lambda \gamma} \\ + \frac{1}{r} \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} B_{\alpha_1 \lambda}^0 B_{\alpha_2 \alpha_3}^0 \iota_\sigma^\lambda; \quad \left[\sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \text{ sei die zyklische Summe} \right. \\ \left. \text{der Indizes } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \right]$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\text{II (3, 4)} \quad \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 = \mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 \circ \mathfrak{N}^0 + \frac{1}{r} \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} B_{\alpha_1 \lambda}^0 \left(\frac{\partial B_{\alpha_2 \alpha_3}^0}{\partial u^\gamma} - \mathfrak{x}_{\alpha_2 \alpha_3 \gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^\sigma \right) \tilde{B}_0^{\lambda \gamma}.$$

dann folgt nach Multiplikation mit $\tilde{B}_0^{\alpha \alpha_1}$, $\tilde{B}_\tau^{\alpha \alpha_2}$ ($\tau = 1, \dots, r$) und Summation:

$$\text{II (3, 5)} \quad \frac{1}{r} \{ p r \delta_\lambda^\alpha \delta_\tau^\sigma + 2 \tilde{B}_\tau^{\alpha \alpha_2} B_{\alpha_2 \lambda}^0 B_{\alpha_3 \alpha_1}^\sigma \tilde{B}_0^{\alpha_1 \alpha} \} \iota_\sigma^\lambda \\ = (B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 - \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^0) \tilde{B}_0^{\alpha \alpha_1} \tilde{B}_\tau^{\alpha \alpha_2}.$$

Die Größen

$$E_{\tau\lambda}^{\alpha\sigma} = \left\{ \delta_{\lambda}^{\sigma} \delta_{\tau}^{\alpha} + \frac{2}{pr} \tilde{B}_{\tau}^{\alpha_2\alpha_3} B_{\alpha_2\lambda}^{\sigma} B_{\alpha_3\alpha_1}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha_1\alpha} \right\}$$

haben in allen Indizes Tensorcharakter. Wir ordnen nun den Indexpaaren $(\sigma\lambda)$ einen neuen Index J zu:

$$\begin{aligned} (\sigma\lambda) &\rightarrow J = p(\sigma - 1) + \lambda, \\ (\tau\alpha) &\rightarrow K = p(\tau - 1) + \alpha, & E_{\tau\lambda}^{\alpha\sigma} &\rightarrow E_K^J, \\ J, K &= 1, \dots, rp, \end{aligned}$$

Von der Matrix (E_K^J) können wir bei nicht verschwindender Determinante $E \neq 0$ zur komplementären Matrix $(\tilde{E}_J^K)$ übergehen:

$$\text{II (3, 6)} \quad E_K^J \tilde{E}_J^{K'} = \delta_K^{K'} \rightarrow E_{\tau\lambda}^{\alpha\sigma} \tilde{E}_{\sigma\alpha'}^{\lambda\tau'} = \delta_{\sigma}^{\alpha'} \delta_{\tau'}^{\sigma}.$$

Wie verhalten sich nun aber die $\tilde{E}_{\sigma\alpha'}^{\lambda\tau'}$ bei Parameter- und Normalraumtransformationen? Es sei:

$$\begin{aligned} E_{\tau\lambda}^{\alpha\sigma} &= E_{\tau'\lambda'}^{\alpha'\sigma'} c_{\alpha'}^{\alpha} \check{c}_{\lambda'}^{\lambda} \check{d}_{\sigma'}^{\sigma} d_{\tau'}^{\tau}, \\ c_{\alpha'}^{\alpha} d_{\tau'}^{\tau} &= e_{K'}^K. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\check{c}_{\alpha'}^{\alpha'} \check{d}_{\tau'}^{\tau} = \check{e}_{K'}^{K'}$$

und damit

$$\begin{aligned} E_K^{*J} &= E_{K'}^{J'} e_{J'}^J \check{e}_{K'}^{K'}, \\ \tilde{E}_J^{*K} &= \tilde{E}_{J'}^{K'} \check{e}_{J'}^{J'} e_{K'}^K, \\ \tilde{E}_{\sigma\alpha'}^{*\lambda\tau} &= \tilde{E}_{\sigma'\alpha'}^{\lambda'\tau'} \check{c}_{\alpha'}^{\alpha'} c_{\lambda'}^{\lambda} d_{\sigma'}^{\sigma} \check{d}_{\tau'}^{\tau}, \end{aligned}$$

d. h. aber $\tilde{E}_{\sigma\alpha'}^{\lambda\tau}$ hat ebenfalls in allen Indizes Tensorcharakter.

Wir können das System II (3, 5) auflösen:

$$\text{II (3, 7)} \quad t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{p} (B_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\sigma} - \omega_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\sigma}) \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\alpha_1} \tilde{B}_{\tau}^{\alpha_2\alpha_3} \tilde{E}_{\sigma\alpha}^{\lambda\tau}.$$

Aus II (3, 2) folgt:

$$\begin{aligned} \text{II (3, 8)} \quad r \cdot a_{\alpha_1\alpha_2}^{\lambda} &= \left(\frac{\partial B_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} - x_{\alpha_1\alpha_2\gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^{\sigma} \right) \tilde{B}_{\sigma}^{\lambda\gamma} \\ &+ \frac{1}{p} (B_{\alpha_1\alpha_2'\alpha_3}^{\sigma} - \omega_{\alpha_1\alpha_2'\alpha_3}^{\sigma}) \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\alpha_1} \tilde{B}_{\tau}^{\alpha_2'\alpha_3} \tilde{E}_{\sigma\alpha}^{\lambda\tau} B_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma}. \end{aligned}$$

In

$$\begin{aligned} \text{II (3, 9)} \quad Z_{\alpha_1\alpha_2}^{\lambda} &= \frac{1}{r} \left(x_{\alpha_1\alpha_2\gamma}^0 \circ \mathfrak{N}^{\sigma} - \frac{\partial B_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} \right) \tilde{B}_{\sigma}^{\lambda\gamma} \\ &+ \frac{1}{rp} \omega_{\alpha_1\alpha_2'\alpha_3}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\alpha_1} \tilde{B}_{\tau}^{\alpha_2'\alpha_3} \tilde{E}_{\sigma\alpha}^{\lambda\tau} B_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma} \end{aligned}$$

fassen wir alle diejenigen Größen aus II (3, 8) zusammen, welche *nur* von der gegebenen Fläche F_p und *nicht* von dem willkürlichen Schmiegeparaboloid abhängen.

Aus II (3, 8), (3, 9) und (2, 10) folgt damit schließlich die gewünschte Darstellung:

$$\text{II (3, 10)} \quad \mathfrak{d}_\sigma = \frac{1}{p} \tilde{B}_{\sigma}^{\beta_1 \beta_2} (\mathfrak{x}_{\beta_1 \beta_2}^0 - Z_{\beta_1 \beta_2}^\lambda \mathfrak{x}_\lambda^0) + \frac{\mathfrak{x}_\lambda^0}{r p} B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\sigma'} \tilde{B}_{\sigma'}^{\alpha \alpha_1} \tilde{B}_{\tau^2 \alpha_3}^{\alpha_2} \tilde{E}_{\sigma \alpha}^{\lambda \tau}.$$

§ 4.

Einspannung der F_p in den A_n .

Da die gegebene Fläche F_p von der Klasse C_4 in jedem ihrer Punkte P des betrachteten Flächenstückes einen Tangentialraum trägt, können wir die Berührungsdifferentialformen 2. Ordnung $B_{\alpha \beta}^{\sigma} du^{\alpha} dv^{\beta}$, die Fläche und Tangentialraum zugeordnet sind, bis auf Normalraumtransformationen aus der gegebenen Parameterdarstellung der Fläche eindeutig in Abhängigkeit von P erhalten. Unter der Voraussetzung $T \neq 0$, $E \neq 0$ sind dann ebenfalls die Größen $\omega_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\sigma}$, $\Gamma_{\alpha \beta}^{\lambda}$ und damit auch die in Gleichung II (3, 10) vorkommenden Vektoren

$$\text{II (4, 1)} \quad \mathfrak{n}_\sigma = \frac{1}{p} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha_1 \alpha_2} (\mathfrak{x}_{\alpha_1 \alpha_2}^0 - Z_{\alpha_1 \alpha_2}^\lambda \mathfrak{x}_\lambda^0)$$

durch die Parameterdarstellung der F_p bei fest gewählten Vektoren $\mathfrak{N}^{\sigma}$ bestimmt.

Die Vektoren $\mathfrak{n}_\sigma$ haben noch folgende Eigenschaften:

- a) Invarianz bei Parametertransformationen,
- b) Bei Normalraumtransformationen $\mathfrak{N}^{\sigma} = d_{\sigma}^{\sigma'} \mathfrak{N}^{*\sigma'}$ ist

$$\text{II (4, 2)} \quad \mathfrak{n}_\sigma = d_{\sigma}^{\sigma'} \mathfrak{n}_{\sigma'}^*,$$

$$\text{c) } \mathfrak{n}_\sigma \circ \mathfrak{N}^{\sigma} = \frac{1}{p} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha_1 \alpha_2} B_{\alpha_1 \alpha_2}^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\sigma},$$

$$\text{d) } \mathfrak{x}_1^0 \times \dots \times \mathfrak{x}_p^0 \times \mathfrak{n}_1 \times \dots \times \mathfrak{n}_r \neq 0.$$

Die Beweise folgen unmittelbar aus Gleichung II (3, 10):

$$\text{II (4, 3)} \quad \mathfrak{n}_\sigma = \mathfrak{d}_\sigma - \frac{1}{r p} \mathfrak{x}_\lambda^0 B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\sigma} \tilde{B}_{\tau^2 \alpha_3}^{\alpha_2} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha \alpha_1} \tilde{E}_{\sigma \alpha}^{\lambda \tau}.$$

Der durch die Vektoren $\mathfrak{n}_\sigma$ aufgespannte $(n - p)$ -dimensionale lineare Raum N ist somit affin- und parameterinvariant mit der Fläche in P_0 verbunden. Nehmen wir N als Durchmesser eines Schmiegeparaboloides, so läßt sich wegen II (4, 2d) $\mathfrak{n}_\sigma = \mathfrak{d}_\sigma$ setzen und aus II (4, 3) folgt:

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\sigma} \tilde{B}_{\tau^2 \alpha_3}^{\alpha_2} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha \alpha_1} \tilde{E}_{\sigma \alpha}^{\lambda \tau} = 0$$

oder nach Multiplikation mit $E_{\tau' \lambda}^{\sigma' \sigma}$ und Summation:

$$\text{II (4, 4)} \quad B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha' \alpha_1} \tilde{B}_{\tau^2 \alpha_3}^{\alpha_2} = 0.$$

Umgekehrt erfüllen die einem Schmiegeparaboloid mit dem Durchmesser-raum D und der Fläche in P_0 zugeordneten Berührungstensoren 3. Ordnung die Relationen II (4, 4), so ist nach II (4, 3) $n_\sigma = \mathfrak{d}_\sigma$ und damit

$$N = D.$$

Für Hyperflächen $r = 1$ geht II (4, 4) über in:

$$B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^1 \tilde{B}_1^{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{B}_1^{\alpha_2 \alpha_3} = 0 \quad \text{oder} \quad B_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^1 \tilde{B}_1^{\alpha_2 \alpha_3} = 0,$$

d. h. die Berührungstensoren 2. und 3. Ordnung sind apolar. Die algebraischen Bedingungsgleichungen II (4, 4) sind daher „verallgemeinerte Apolaritätsbedingungen“.

Ergebnis. Jedem nichtparabolischen Flächenpunkt des betrachteten Flächenstückes läßt sich, falls die Determinante E nicht verschwindet, eindeutig ein ausgezeichnetes Schmiegeparaboloid zuordnen durch die Forderung der verallgemeinerten Apolarität der Berührungstensoren 2. und 3. Ordnung.

Mit Hilfe des ausgezeichneten Schmiegeparaboloides kann man nun die Fläche F_p in den A_n einspannen: Wir nehmen in P_0 den Durchmesser-raum dieses Paraboloides als Affinnormalenraum der Fläche.

§ 5.

Die induzierte Übertragung.

Nachdem so das *Einspannungsproblem* gelöst ist, fragen wir nun nach dem durch die Einspannung induzierten affinen Zusammenhang der Fläche.

Die Ableitungsgleichungen der Fläche seien:

$$\begin{aligned} \text{II (5, 1)} \quad x_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda x_\lambda + \omega_{\alpha\beta}^e n_e, \\ \frac{\partial n_e}{\partial u^\alpha} &= \Omega_{\alpha e}^\lambda x_\lambda + t_{e\alpha}^u n_u \end{aligned}$$

mit den Affinnormalen II (4, 1):

$$n_e = \frac{1}{p} \tilde{B}_e^{\alpha\beta} (x_{\alpha\beta} - Z_{\alpha\beta}^\lambda x_\lambda).$$

Wegen $n_e = \mathfrak{d}_e$ und nach II (1, 4), $B_{\alpha_1 \alpha_2}^e \mathfrak{d}_e = x_{\alpha_1 \alpha_2} + a_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha x_\alpha$, ist

$$\text{II (5, 2)} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = -a_{\alpha\beta}^\lambda,$$

$$\text{II (5, 3)} \quad B_{\alpha\beta}^e = \omega_{\alpha\beta}^e$$

und aus II (3, 8) und II (3, 9) folgt schließlich:

$$\text{II (5, 4)} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = Z_{\alpha\beta}^\lambda.$$

Die in II (3, 9) eingeführten Größen $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ sind somit die Komponenten des induzierten affinen Zusammenhanges.

Bei gegebener Parameterdarstellung der Fläche lassen sich die Zusammenhangsgrößen unmittelbar nach II (3, 9) berechnen, da, wie aus den bisherigen Betrachtungen hervorgeht, $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ unabhängig von der Wahl der Vektoren $\mathfrak{N}^e$ ist. Wir können nun diese Tatsache auch als Ausgangspunkt nehmen:

Durch die Größen $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ wird die gegebene Fläche F_p mit einem „natürlichen“ Zusammenhang ausgestattet. Wir ordnen dann jedem Flächenpunkt als Affinnormalenraum einen solchen zu, der umgekehrt diesen natürlichen Zusammenhang induziert.

Diese Lösung des Einspannungsproblems führt zu dem gleichen Ergebnis.

Es läßt sich die Frage aufwerfen, ob ein gegebener natürlicher Zusammenhang realisierbar ist, d. h. ob zu gegebenen Funktionen $Z_{\alpha\beta}^\lambda(u^1, \dots, u^p)$ eine Fläche F_p gefunden werden kann, welche $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ als Komponenten des induzierten Zusammenhangs besitzt. Da für Hyperflächen Relationen zwischen den $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ bestehen, wird so eine Forderung an die Dimension des einbettenden Raumes A_n gestellt, für den gegebenen Zusammenhang also ein *Einbettungsklassenproblem* formuliert.

Wir wollen noch eine Gleichung für $Z_{\alpha\beta}^\lambda$ aufstellen, welche nur die Größen $B_{\alpha\beta}^e$, $B_{\alpha\beta\gamma}^e$ und die „Torsionskoeffizienten“ $t_{\sigma\alpha}^e$ enthält⁸⁾. Nach II (1, 3) und II (5, 4) ist

$$B_{\alpha\beta\gamma}^e = \mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma} \circ \mathfrak{N}^e - (B_{\alpha\lambda}^e Z_{\beta\gamma}^\lambda + B_{\beta\lambda}^e Z_{\alpha\gamma}^\lambda + B_{\gamma\lambda}^e Z_{\alpha\beta}^\lambda).$$

Aus II (3, 1), II (5, 4) und $n_e = d_e$ folgt wegen $\mathfrak{N}^e \circ \frac{\partial n_\sigma}{\partial u^\gamma} = t_{\sigma\gamma}^e$:

$$\mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma} \circ \mathfrak{N}^e = Z_{\alpha\beta}^\lambda B_{\lambda\gamma}^e + \frac{\partial B_{\alpha\beta}^e}{\partial u^\gamma} + B_{\alpha\beta}^\sigma t_{\sigma\gamma}^e.$$

Zyklisch vertauscht und eingesetzt ergibt sich:

$$B_{\alpha\beta\gamma}^e = -2 B_{\alpha\lambda}^e Z_{\beta\gamma}^\lambda + \left(\frac{\partial B_{\alpha\gamma}^e}{\partial u^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\alpha}^e}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial B_{\beta\gamma}^e}{\partial u^\alpha} \right) + B_{\alpha\gamma}^\sigma t_{\sigma\beta}^e + B_{\beta\alpha}^\sigma t_{\sigma\gamma}^e - B_{\beta\gamma}^\sigma t_{\sigma\alpha}^e,$$

oder aufgelöst nach $Z_{\beta\gamma}^\lambda$:

$$\text{II (5, 5)} \quad Z_{\beta\gamma}^\lambda = -\frac{1}{2r} \tilde{B}_e^{\alpha\lambda} B_{\alpha\beta\gamma}^e + \frac{1}{2r} \tilde{B}_e^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial B_{\alpha\gamma}^e}{\partial u^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\alpha}^e}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial B_{\beta\gamma}^e}{\partial u^\alpha} \right) + \frac{1}{2r} \tilde{B}_e^{\alpha\lambda} \{ B_{\alpha\beta}^\sigma t_{\sigma\gamma}^e + B_{\alpha\gamma}^\sigma t_{\sigma\beta}^e - B_{\beta\gamma}^\sigma t_{\sigma\alpha}^e \}.$$

Man sieht hier, in welcher Weise die aus den quadratischen Differentialformen $B_{\alpha\beta}^e du^\alpha du^\beta$ auf Christoffelsche Art gebildeten Übertragungsgrößen

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{B}_e^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial B_{\alpha\gamma}^e}{\partial u^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\alpha}^e}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial B_{\beta\gamma}^e}{\partial u^\alpha} \right)$$

⁸⁾ Hinsichtlich der Bezeichnung „Torsion“ vgl. H. Weyl [10].

zu den induzierten Zusammenhangsgrößen zu erweitern sind. Dabei hängt $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta \gamma \end{smallmatrix} \right\}$ von der Aufspannung des Normalenraumes ab, so daß eine kovariante Differentiation auf der Fläche mit diesen Größen *nicht* geometrisch sinnvoll erklärt werden kann, ausgenommen $p = n - 1$ bei raumtreuer affiner Gruppe und geeigneter Normierung (vgl. § 6).

§ 6.

Die Determinante T und die Normierung bei raumtreuen Affinitäten.

Als wichtigste relative Invariante haben wir II (2, 9) die Determinante T einer r -reihigen $2p$ -dimensionalen Matrix $\mathfrak{T}$ kennengelernt. Ihr Nichtverschwinden war die notwendige Bedingung für die Konstruktion der komplementären Berührungstensoren und in Anlehnung an die Bezeichnung bei Hyperflächen nannten wir Punkte mit $T = 0$ parabolisch. Wann können nun parabolische Punkte auftreten?

Sind die r Berührungsdifferentialformen $B_{\alpha\beta}^a du^\alpha du^\beta$ linear abhängig, so folgt für die Matrix $\mathfrak{T}$ die lineare Abhängigkeit gewisser „Zeilen“ und damit $T = 0$.

Notwendig für $T \neq 0$ ist daher die lineare Unabhängigkeit der r Berührungstensoren 2. Ordnung.

Dies hat eine Ungleichung für die zugrunde liegenden Dimensionszahlen p, n zur Folge. Da jeder Tensor $\mathfrak{B}^a \left(\begin{smallmatrix} p+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$ verschiedene Komponenten aufweist, können höchstens $\left(\begin{smallmatrix} p+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$ von ihnen unabhängig sein, d. h. aber:

$$\text{II (6, 1)} \quad r \leq \left(\begin{smallmatrix} p+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right); \quad n \leq p + \left(\begin{smallmatrix} p+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right).$$

Diese Ungleichung läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Mit Hilfe der komplementären Berührungstensoren konnten wir die Vektoren $\mathfrak{d}_0$ durch die ersten und zweiten Ableitungsvektoren der Fläche ausdrücken: II (3, 10). Offenbar wird dieses immer dann nicht möglich sein, wenn diese Flächenvektoren nicht den gesamten Raum A_n in P_0 aufspannen, d. h. der höchstens $\left[p + \left(\begin{smallmatrix} p+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right]$ -dimensionale *zweite Schmiegraum* der F_p also nicht mit A_n *identisch* ist. Für Flächen dieser Art, deren geometrisches Verhalten in stärkerem Maße dem einer Raumkurve nahekommt, ist das in § 1 verwendete Schmiegeparaboloid als Vergleichsfläche nicht geeignet. Es sei z. B. der 2. Schmiegraum einer $F_p(p + r')$ -dimensional, der 3. Schmiegraum $(p + r' + r'')$ -dimensional und $p + r' + r'' = n$. Dann hat man in P_0 der F_p ein „kubisches“ Schmiegeparaboloid:

$$\eta = x^0 + x_\alpha^0 v^\alpha + \frac{1}{2!} B_{\alpha\beta}^{a'} v^\alpha v^\beta \mathfrak{d}_{a'}^{(1)} + \frac{1}{3!} B_{\alpha\beta\gamma}^{a''} v^\alpha v^\beta v^\gamma \mathfrak{d}_{a''}^{(2)},$$

$$\varrho' = 1, \dots, r'; \quad \varrho'' = 1, \dots, r''$$

zuzuordnen, wobei die Vektoren

$$\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_p^0, \mathbf{d}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{d}_{r'}^{(1)}$$

den 2. Schmiegraum, die Vektoren

$$\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_p^0, \mathbf{d}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{d}_{r'}^{(1)}, \mathbf{d}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{d}_{r''}^{(2)}$$

den 3. Schmiegraum aufzuspannen haben und die quadratischen und kubischen Formen durch die Forderung der Berührung 3. Ordnung festzulegen sind. Die Einspannung hat dann durch eine Auszeichnung des beiden Flächen zugeordneten Berührungstensors 4. Ordnung zu erfolgen. Entsprechendes gilt im allgemeinen Fall einer F_p mit mehreren höheren verschiedenen Schmiegräumen.

Sind die r Berührungstensoren 2. Ordnung linear unabhängig, so kann trotzdem $T = 0$ sein. Diese Flächen stellen eine Verallgemeinerung der Torsen dar und es bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten, ihre Abwickelbarkeitseigenschaften zu untersuchen.

Liegt als Gruppe der Raumtransformationen die spezielle affine inhalts-treue Gruppe zugrunde, so kann man die Normalvektoren $\mathbf{n}_\sigma$ mit Hilfe von

$T \neq 0$ normieren. Nach II (2, 9) ist $|T|^{\frac{1}{4r}}$ hinsichtlich Parametertransformationen eine Größe p -ter Stufe und die Forderung, das von den Tangential- und Normalvektoren aufgespannte Parallelepiped soll den Inhalt $|T|^{\frac{1}{4r}}$ haben;

$$\text{II (6, 2)} \quad |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_p \times \mathbf{n}_1 \times \dots \times \mathbf{n}_r| = \pm |T|^{\frac{1}{4r}}$$

wird bei Einführung neuer gleichsinniger Parameter und bei Normalraumtransformationen mit der Determinante $+1$ nicht zerstört.

Durch Differentiation folgt aus II (6, 2):

$$\text{II (6, 3)} \quad Z_{\alpha\gamma}^\alpha + t_{\sigma\gamma}^\sigma = \frac{1}{4r} \frac{\partial \lg |T|}{\partial u^\gamma}.$$

Ferner ist aus II (1, 3), II (5, 2), II (5, 4):

$$\tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta\gamma}^\sigma = \tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} \circ \mathfrak{N}^\sigma - 2r Z_{\alpha\gamma}^\alpha - B_{\gamma\lambda}^\sigma Z_{\alpha\beta}^\lambda B_\sigma^{\alpha\beta}$$

und ebenso aus II (3, 1) wegen $\mathfrak{N}^\sigma \circ \frac{\partial \mathbf{n}_\sigma}{\partial u_\gamma} = t_{\sigma\gamma}^\sigma$:

$$\tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} \circ \mathfrak{N}^\sigma = \tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}^\lambda B_{\gamma\lambda}^\sigma + \tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial B_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\gamma} + p t_{\sigma\gamma}^\sigma.$$

Durch Addition erhält man:

$$-2r Z_{\alpha\gamma}^\alpha + p t_{\sigma\gamma}^\sigma = \tilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} \left(B_{\alpha\beta\gamma}^\sigma - \frac{\partial B_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\gamma} \right).$$

Schließlich ergibt sich mit II (6, 3):

$$\text{II (6, 4)} \quad \begin{aligned} Z_{\alpha\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{p+2r} \left[\frac{p}{4r} \frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}} - \tilde{B}_{\alpha}^{\alpha\beta} \left(B_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{\partial B_{\alpha\beta}^{\alpha}}{\partial u^{\gamma}} \right) \right], \\ t_{\alpha\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{p+2r} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}} + \tilde{B}_{\alpha}^{\alpha\beta} \left(B_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{\partial B_{\alpha\beta}^{\alpha}}{\partial u^{\gamma}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Größen $t_{\alpha\gamma}^{\alpha}$, $Z_{\alpha\gamma}^{\alpha}$ sind bei der Normierung II (6, 2) durch die Berührungstensoren 2. und 3. Ordnung bestimmt.

Für Hyperflächen ist:

$$r = 1, \quad T = |B_{\alpha\beta}^1|^2; \quad \tilde{B}_1^{\alpha\beta} \frac{\partial B_{\alpha\beta}^1}{\partial u^{\gamma}} = \frac{\partial \lg |B_{\alpha\beta}^1|}{\partial u^{\gamma}}; \quad \tilde{B}_1^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta\gamma}^1 = 0$$

und damit aus II (6, 4):

$$\text{II (6, 5)} \quad \begin{aligned} Z_{\alpha\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lg |B_{\alpha\beta}^1|}{\partial u^{\gamma}}, \\ t_{\gamma}^1 &= 0. \end{aligned}$$

Infolge der Normierung wird das Oberflächenintegral

$$O = \int_F |\mathfrak{x}_1 \times \dots \times \mathfrak{x}_p \times \mathfrak{n}_1 \times \dots \times \mathfrak{n}_r| du^{\overbrace{1 \dots p}^p}$$

invariant. Wir haben hier ein Gegenstück zu der bei Hyperflächen eingeführten Affinoberfläche (vgl. W. Blaschke [2]). Mit Gleichung II (6, 2) erhalten wir so für die „Affinoberfläche“ einer F_p :

$$\text{II (6, 6)} \quad O = \int_F |T|^{\frac{1}{4r}} du^{\overbrace{1 \dots p}^p}.$$

O hängt nur von den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung ab.

§ 7.

Die Grundgleichungen der F_p .

Ist die Parameterdarstellung einer Fläche von der Klasse C_4 gegeben, so können wir nach § 1 bis 4 in nicht parabolischen Flächenpunkten und für $E \neq 0$ die Affinnormalen herstellen und damit die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen II (5, 1) bestimmen. Zusammen mit den kubischen Formen $B_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha} du^{\alpha} du^{\beta} du^{\gamma}$ haben wir in dem System dieser Koeffizienten Größen, aus denen durch Invariantenbildung alle differentialgeometrischen Eigenschaften (im kleinen) der Fläche hergeleitet werden können. Im Falle der F_p im euklidischen n -dimensionalen Raum, d. h. bei der orthogonalen Raumtransformationsgruppe, lassen sich nun alle Größen aus einer metrischen Fundamentalform, aus r quadratischen Einbettungsformen und aus den Torsionskoeffizienten ⁸⁾ oder $\binom{r}{2}$ Torsions-Linearformen bestimmen, wobei

diese noch gewissen Integrabilitätsbedingungen zu genügen haben. Wir wollen nun ein entsprechendes Resultat für die allgemeine affine Gruppe herleiten. Dazu stellen wir zunächst einmal die *Grundformeln* zusammen:

Mit der gegebenen Einspannung sind die Ableitungsgleichungen der F_p nach II (5, 1), II (5, 2), II (5, 4):

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\beta}^{\lambda} \mathbf{x}_{\lambda} + B_{\alpha\beta}^{\sigma} \mathbf{n}_{\sigma},$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} = \Omega_{\sigma\gamma}^{\lambda} \mathbf{x}_{\lambda} + t_{\sigma\gamma}^{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha},$$

$$\mathbf{n}_{\sigma} = \frac{1}{p} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta} (\mathbf{x}_{\alpha\beta} - Z_{\alpha\beta}^{\lambda} \mathbf{x}_{\lambda}).$$

Ihre Integrabilitätsbedingungen lauten:

$$\text{II (7, 3)} \quad R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} + B_{\alpha\beta}^{\sigma} \Omega_{\sigma\gamma}^{\lambda} - B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \Omega_{\sigma\beta}^{\lambda} = 0,$$

$$\text{II (7, 4)} \quad \frac{\partial B_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial B_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + Z_{\alpha\beta}^{\lambda} B_{\lambda\gamma}^{\sigma} - Z_{\alpha\gamma}^{\lambda} B_{\lambda\beta}^{\sigma} + B_{\alpha\beta}^{\nu} t_{\nu\gamma}^{\sigma} - B_{\alpha\gamma}^{\nu} t_{\nu\beta}^{\sigma} = 0,$$

$$\text{II (7, 5)} \quad \frac{\partial \Omega_{\sigma\alpha}^{\lambda}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial \Omega_{\sigma\beta}^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}} + \Omega_{\sigma\alpha}^{\lambda} Z_{\gamma\beta}^{\lambda} - \Omega_{\sigma\beta}^{\lambda} Z_{\gamma\alpha}^{\lambda} + t_{\sigma\alpha}^{\nu} \Omega_{\nu\beta}^{\lambda} - t_{\sigma\beta}^{\nu} \Omega_{\nu\alpha}^{\lambda} = 0,$$

$$\text{II (7, 6)} \quad \frac{\partial t_{\sigma\alpha}^{\nu}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial t_{\sigma\beta}^{\nu}}{\partial u^{\alpha}} + t_{\sigma\alpha}^{\tau} t_{\tau\beta}^{\nu} - t_{\sigma\beta}^{\tau} t_{\tau\alpha}^{\nu} + \Omega_{\sigma\alpha}^{\lambda} B_{\lambda\beta}^{\nu} - \Omega_{\sigma\beta}^{\lambda} B_{\lambda\alpha}^{\nu} = 0.$$

Für den Berührungstensor 3. Ordnung folgt aus II (1, 3), II (3, 1) und II (5, 4):

$$\text{II (7, 7)} \quad B_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = -B_{\alpha\lambda}^{\sigma} Z_{\beta\gamma}^{\lambda} - B_{\beta\lambda}^{\sigma} Z_{\alpha\gamma}^{\lambda} + \frac{\partial B_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} + B_{\alpha\beta}^{\sigma} t_{\sigma\gamma}^{\nu}.$$

Aus II (7, 3) folgt:

$$p \Omega_{\sigma\gamma}^{\lambda} - B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta} \Omega_{\lambda\beta}^{\lambda} = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta},$$

$$\Omega_{\sigma\beta}^{\lambda} [p \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta} - B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta}] = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta},$$

Es sei

$$F_{\sigma\gamma}^{\alpha\beta} = \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta} - \frac{1}{p} B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta}.$$

Fassen wir ähnlich wie in § 3 $\varrho\beta$ zu einem Indexpaar J zusammen $F_{\sigma\gamma}^{\alpha\beta} \rightarrow F_{K}^J$, so können wir bei nichtverschwindender Determinante $F = |F_K^J|$ das obige Gleichungssystem auflösen und erhalten:

$$\text{II (7, 8)} \quad \Omega_{\sigma\beta}^{\lambda} = -\frac{1}{p} R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} \tilde{B}_{\sigma}^{\alpha\beta'} \tilde{F}_{\sigma\beta}^{\sigma\gamma}.$$

Für Hyperflächen ist $F = \frac{p-1}{1} \neq 0$. Hat das hinsichtlich der rp^2 Größen $\Omega_{\sigma\alpha}^{\lambda}$ als Unbekannte lineare Gleichungssystem II (7, 3), II (7, 6)

$$\text{II (7, 9)} \quad \Omega_{\sigma\alpha}^{\lambda} [B_{\alpha\beta}^{\sigma} \delta_{\gamma}^{\alpha} - B_{\alpha\gamma}^{\sigma} \delta_{\beta}^{\alpha}] = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda},$$

$$\Omega_{\sigma\mu}^{\lambda} [B_{\lambda\beta}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\mu} - B_{\lambda\alpha}^{\sigma} \delta_{\beta}^{\mu}] = -t_{\sigma\alpha\beta}^{\sigma}$$

[wobei $t_{\alpha\beta}^{\sigma}$ aus den Torsionskoeffizienten t_{α}^{σ} in gleicher Weise wie $R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}$ aus $Z_{\alpha\beta}^{\lambda}$ gebildet ist (insgesamt $\binom{p}{2} \cdot (p^2 + r^2)$ Gleichungen)], den Rang rp^2 , so läßt es sich auch bei verschwindendem F nach den $\Omega_{\alpha}^{\lambda}$ auflösen, doch kann dann eine allgemeine Formel nicht angegeben werden.

Unter Verwendung von II (5, 5) haben wir somit das Ergebnis:

Ist für eine Fläche in $U(P_0)$ der Rang des Systems II (7, 9) gleich rp^2 , so lassen sich die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen II (7, 1) durch die Komponenten der Berührungstensoren und die Torsionskoeffizienten ausdrücken.

Bedeutet $\bar{d}v$ den Normalbestandteil der Änderung eines Vektors v beim Fortschreiten auf der Fläche F_p , so ist nach II (7, 1):

$$\text{II (7, 10)} \quad \bar{d}n_{\alpha} = t_{\alpha}^{\sigma} n_{\sigma} du^{\alpha}.$$

Die Torsionskoeffizienten sind daher Größen einer Übertragung des Affinormalenraumes längs der Fläche, und transformieren sich bei Abänderung der Aufspannung des Normalenraumes:

$$n_{\alpha}^* = A_{\alpha}^{\sigma} n_{\sigma} \quad \text{mit} \quad |A_{\alpha}^{\sigma}| \neq 0:$$

$$t_{\alpha}^{*\sigma} = t_{\tau}^{\tau'} A_{\alpha}^{\tau} \tilde{A}_{\tau'}^{\sigma} + \tilde{A}_{\tau}^{\sigma} \frac{\partial A_{\alpha}^{\tau}}{\partial u^{\alpha}}.$$

Es wurde in § 1 bis 4 gezeigt, daß man einer Fläche F_p unter gewissen Voraussetzungen eine Schar von Berührungsdifferentialformen 2. Grades

$$B^{(2)} = (B_{\alpha\beta}^{\sigma} du^{\alpha} du^{\beta})$$

und eine Schar von Berührungsdifferentialformen 3. Grades

$$B^{(3)} = (B_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} du^{\alpha} du^{\beta} du^{\gamma})$$

eindeutig zuordnen kann. Dabei sind die Koeffizienten nicht nur bei affinen, sondern sogar bei dreimal stetig differenzierbaren topologischen Raumtransformationen invariant (siehe I, S. 479). Lineartransformationen innerhalb der Schar entsprechen Änderungen der Aufspannung des Affinormalenraumes. $B^{(2)}$ beschreibt in gewisser Weise die „Abweichung“ der F_p von ihrem Tangentialraum, $B^{(3)}$ diejenige vom zugeordneten Schmiegeparaboloid. Man könnte diese Formen daher als „Krümmungsformen“ bezeichnen. Es ist nicht zu erwarten, daß für $r = n - p > 1$ $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ zur vollständigen differentialgeometrischen Charakterisierung der F_p ausreichen, da ja z. B. auch im Falle der Bewegungsgruppe Torsionseigenschaften mit herangezogen werden müssen. Diese finden aber ihren Ausdruck in der Übertragung des Normalenraumes längs der Fläche.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes lassen sich nun in folgendem *Umkehrsatz der Flächentheorie* zusammenfassen:

Es sei vorgegeben:

- a) eine r -gliedrige Schar quadratischer Differentialformen $B^{(2)}$,
- b) eine r -gliedrige Schar kubischer Differentialformen $B^{(3)}$,
- c) eine lineare Vektorübertragung eines r -Beines $de_\sigma = t_{\sigma\alpha}^\alpha du^\alpha e_\sigma$

mit folgenden Eigenschaften:

- a') die Koeffizienten von a), c) sollen zweimal, diejenigen von b) einmal stetig differenzierbare Funktionen der Variablen $u^1, \dots, u^p$ sein,
- b') die den Formen a) zugeordneten relativen Invarianten T, E (siehe II (2, 9), II (3, 6)) sollen im betrachteten Bereich von Null verschieden und das lineare Gleichungssystem II (7, 9) vom Rang rp^2 sein,
- c') die Formen a), b) sollen den verallgemeinerten Apolaritätsbedingungen II (4, 4) genügen,

d') die Koeffizienten von a), b), c) und die daraus mittels II (5, 5), II (7, 8) bzw. II (7, 9) erhaltenen Größen $Z_{\alpha\beta}^\lambda, \Omega_{\sigma\alpha}^\lambda$ sollen den Integrabilitätsbedingungen II (7, 3), (7, 4), (7,5), (7,6) genügen,

dann ist in einem gewissen Bereich der Variablen u^α eindeutig bis auf Affinitäten im $(r + p)$ -dimensionalen Raum eine p -dimensionale Fläche F_p bestimmt, welche a) und b) als Berührungsdifferentialformen und c) als Übertragung des Affinnormalenraumes längs der Fläche besitzt.

Für Hyperflächen ist die Übertragung des Affinnormalenraumes stets integrabel. Durch geeignete Normierung bei raumtreuen Affinitäten läßt sich daher $t_\alpha = t_{1\alpha} = 0$ erreichen (siehe II (6, 5)), ferner ist $E \neq 0$, der Rang von II (7, 9) gleich p^2 und $|T|^{1/2}$ bis auf einen Faktor die Determinante der quadratischen Formen.

Ist ein Parameternetz einer F_2 im A_3 konjugiert, so erscheint die quadratische Form $B_{\alpha\beta}^\lambda du^\alpha du^\beta$ in Diagonalgestalt: $B_{12}^1 = 0$. Wir wollen daher bei einer allgemeinen Fläche von einem „konjugierten Parameternetz“ sprechen, wenn in diesen Parametern die Schar der quadratischen Formen $B^{(2)} = (B_{\alpha\beta}^\sigma du^\alpha du^\beta)$ auf Summen von Quadraten gebracht sind, d. h. $B_{\alpha\beta}^\sigma = 0$ für $\alpha \neq \beta$. Für Flächen F_p , in denen sich konjugierte Parameternetze einführen lassen, kann man E in einfacher Weise berechnen und findet:

$$E = \left(1 + \frac{2r}{p}\right)^p \neq 0.$$

Dieses Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als E nur von den Dimensionszahlen p, r und nicht von der speziellen Gestalt der Fläche abhängt. Spezielle Untersuchungen über Flächen, in denen sich solche Parameternetze nicht einführen lassen, haben bisher stets zu entsprechenden Resultaten geführt. Z. B. ist für jede F_2 im A_4 mit $T \neq 0$: $E = 9$; für jede F_2 im A_5 mit $T \neq 0$: $E = \frac{40000}{729}$; für jede F_p mit $T = 0$ und $r = \binom{p+1}{2}$: $E \neq 0$. Es wird

demnach zu vermuten sein, daß ganz allgemein E nur von p, r abhängig ist und dann die Forderung $E \neq 0$ in Wegfall kommt. Ein allgemein gültiger Beweis für diese Tatsache steht indessen noch aus.

Gegenüber der affinen Theorie der Hyperflächen hat sich als ein wesentlicher, allerdings formaler, Unterschied ergeben, daß man mit der Formenschar $B^{(2)}$ allein durch Christoffel-Symbolbildung nicht zu einer normalraum-invarianten kovarianten Flächenableitung gelangen kann. Nimmt man indessen die Affinnormalraumübertragung II (7, 10) zu Hilfe, und dieses liegt in der Natur der Sache, so folgt aus II (5, 5), daß die Größen:

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2r} \bar{B}_{\epsilon}^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial B_{\alpha\gamma}^{\epsilon}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial B_{\beta\alpha}^{\epsilon}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial B_{\beta\gamma}^{\epsilon}}{\partial u^{\alpha}} \right) + \frac{1}{2r} \bar{B}_{\epsilon}^{\alpha\lambda} (B_{\alpha\beta}^{\sigma} t_{\sigma\gamma}^{\epsilon} + B_{\alpha\gamma}^{\sigma} t_{\sigma\beta}^{\epsilon} - B_{\beta\gamma}^{\sigma} t_{\sigma\alpha}^{\epsilon})$$

die Transformationseigenschaften von Übertragungsgrößen haben und sich daher zur Definition einer kovarianten Ableitung auf der Fläche verwenden lassen. Von den induzierten Übertragungsgrößen unterscheiden sich diese um einen additiven Tensor.

Es sind nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, aus den betrachteten Größen durch algebraische und differentielle Prozesse Invarianten der Fläche herzuleiten.

Eine solche Krümmungstheorie, die erst durch geometrische Resultate reizvoll wird, geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, die zum Ziel hat zu zeigen, inwieweit der Begriff des Berührungstensors zum Aufbau einer Affingeometrie der F_p geeignet ist.

Im Falle raumtreuer Affinität mit der Normierung II (6, 2) seien die wichtigsten Invarianten angegeben:

Es sei

$$B_{\alpha\beta}^{\epsilon} \Omega_{\epsilon}^{\lambda} = \bar{B}_{\alpha\beta},$$

dann ist

$$K_1 = \frac{|\bar{B}_{\alpha\beta}|}{|T|^{1/2}} = \frac{\delta_{1\dots p}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \delta_{1\dots p}^{\beta_1\dots\beta_p} \bar{B}_{\alpha_1\beta_1} \dots \bar{B}_{\alpha_p\beta_p}}{p! |T|^{1/2}}$$

eine Invariante, die für Hyperflächen (bis auf einen Zahlfaktor) mit der mittleren Affinkrümmung übereinstimmt.

Entsprechend gilt für die weiteren „Krümmungen“ K_j :

$$B_{\alpha_1\beta_1}^{\epsilon_1} \dots B_{\alpha_j\beta_j}^{\epsilon_j} \Omega_{\epsilon_1}^{\lambda_1} \lambda_j \Omega_{\epsilon_2}^{\lambda_2} \lambda_1 \dots \Omega_{\epsilon_j}^{\lambda_j} \lambda_{j-1} = \bar{B}_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_j\beta_j},$$

$$K_j = \frac{|\bar{B}_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_j\beta_j}|}{|T|^{j/2}} = \frac{1}{p!} \frac{\delta_{1\dots p}^{\alpha_{11}\dots\alpha_{1p}} \dots \delta_{1\dots p}^{\beta_{j1}\dots\beta_{jp}} \bar{B}_{\alpha_{11}\beta_{11}} \dots \alpha_{j1}\beta_{j1} \dots \bar{B}_{\alpha_{jp}\beta_{jp}} \alpha_{jp}\beta_{jp}}{|T|^{1/2}}.$$

Es sei ferner:

$$\overline{\overline{B}}_{\alpha\beta} = B_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{q_1} B_{\beta_1\beta_2\beta_3}^{q_2} \check{B}_{q_1}^{\alpha_1\beta_1} \check{B}_{q_2}^{\alpha_2\beta_2} \check{B}_\tau^{\alpha_3\beta_3} \cdot B_{\alpha\beta}^\tau,$$

dann stimmt

$$J = \frac{|\overline{\overline{B}}_{\alpha\beta}|}{|T|^{1/2}} = \frac{\delta_{1\dots p}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \delta_{1\dots p}^{\beta_1\dots\beta_p} \overline{\overline{B}}_{\alpha_1\beta_1\dots} \overline{\overline{B}}_{\alpha_p\beta_p}}{p! |T|^{1/2}}$$

für Hyperflächen (bis auf einen Zahlfaktor) mit der Pickschen Invariante überein.

Zum Abschluß sei bemerkt, daß die Gedankengänge und die im Teil I bereitgestellten Hilfsmittel keineswegs auf die affine Gruppe beschränkt sind. Der Berührungstensor ist bei beliebigen, genügend oft stetig differenzierbaren topologischen Raumtransformationen invariant und es bedarf nur geeigneter Normalflächen als Vergleichsflächen, um einen entsprechenden Aufbau der Flächentheorie bei der genannten Transformationsgruppe zu erhalten.

Anhang.

Hilfssätze über mehrdimensionale Matrizen.

Wir denken uns die Elemente $A^{i_1\dots i_p}$ einer p -dimensionalen Matrix $\mathfrak{A}$ in einem p -dimensionalen Würfelschema angeordnet, $i_r = 1, \dots, n$ und wollen unter „ α -Spalte“ dieser Matrix alle Elemente verstehen, welche in einer $(p - 1)$ -dimensionalen Hyperebene senkrecht zur α -ten Kantenrichtung des Würfels stehen. [Spalten und Zeilen einer quadratischen Matrix sind also 1-Spalten und 2-Spalten.]

Es werden nun Produkte von Elementen aus je einer α -Spalte gebildet und wir wollen unter Determinante A dieser Matrix $\mathfrak{A}$ die Summe über alle Permutationen von Produkten dieser Art verstehen, wobei diese jeweils mit dem Vorzeichen der Permutation zu multiplizieren sind. Bei Benutzung der verallgemeinerten Kronecker-Symbole ⁹⁾ ergibt sich:

(8, 1)
$$A = \delta_{i_{12}\dots i_{n2}}^{1\dots n} \dots \delta_{i_{1n}\dots i_{nn}}^{1\dots n} A^{i_{12}\dots i_{1n}} \dots A^{i_{n2}\dots i_{nn}}$$

(vgl. II (2, 3)). Durch Vertauschen der ersten und zweiten 1-Spalte erhält man:

$$A' = \delta_{i_{n2}\dots i_{n2}}^{1\dots n} \dots \delta_{i_{1n}\dots i_{nn}}^{1\dots n} A^{i_{21}\dots i_{1n}} A^{i_{12}\dots i_{2n}} \dots A^{i_{n2}\dots i_{nn}}$$

und durch Abänderung gewisser Summationsbuchstaben:

$$A' = \delta_{i_{22}\dots i_{22}}^{1\dots n} \delta_{i_{32}\dots i_{32}}^{1\dots n} \dots \delta_{i_{2n}\dots i_{2n}}^{1\dots n} A^{i_{12}\dots i_{1n}} \dots A^{i_{n2}\dots i_{nn}}.$$

⁹⁾ R. König u. E. Peschl [4], S. 140.

Schließlich läßt sich durch eine Permutation in jedem δ -Symbol bis auf das Vorzeichen die Determinante A erhalten:

$$(8, 2) \quad A' = (-1)^{n-1} A.$$

Entsprechendes gilt für Vertauschung irgend zweier α -Spalten.

Die Transformationseigenschaften der Determinante A bei Übergang von $A^{i_1 \dots i_n}$ zu $A^{*k_1 \dots k_n}$:

$$(8, 3) \quad A^{i_1 \dots i_n} = \varrho_{k_1}^{i_1} \dots \varrho_{k_n}^{i_n} A^{*k_1 \dots k_n}$$

lassen sich wegen (8, 2) für geradzahliges n am einfachsten übersehen, wenn man in (8, 1) auch noch die 1-Spalte permutiert, d. h. von (8, 1) übergeht zu:

$$(8, 11) \quad A = \frac{1}{n!} \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} \dots \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} A^{i_{11} \dots i_{1n}} A^{i_{21} \dots i_{2n}} \dots A^{i_{n1} \dots i_{nn}}.$$

Für ungerades n verschwindet diese Bildung wegen (8, 2) identisch!

Es gelten somit die Sätze (vgl. § 2):

I. Bei einer Vertauschung zweier α -Spalten multipliziert sich die Determinante mit $(-1)^{n-1}$.

II. Bei einer Transformation (8, 3) multipliziert sich für gerades n die Determinante mit $|\varrho_k|^n$, ist also eine relative Invariante.

Da für ungerades n das Vorzeichen von A bei Spaltenwechsel erhalten bleibt, transformiert sich A in diesem Fall nicht relativ invariant.

Jedem Element $A^{i_1 \dots i_n}$ von $\mathfrak{A}$ ordnen wir eine Unterdeterminante zu, die aus $\mathfrak{A}$ durch Streichen derjenigen α -Spalten entsteht, welche dieses Element enthalten, und wir wollen unter $A_{i_1 \dots i_n}$, dem „algebraischen Komplement“, diese mit dem Vorzeichen $(-1)^{\varepsilon_{i_v}}$ versehene Unterdeterminante verstehen.

Streicht man in (8, 1) für eine feste Indexgruppe $k_{i_2} \dots i_{kn}$ das Element $A^{k_{i_2} \dots i_{kn}}$, so ergibt sich das algebraische Komplement:

$$A_{k_{i_2} \dots i_{kn}} = \delta_{i_2 \dots i_{n2}}^{1 \dots n} \dots \delta_{i_1 \dots i_{nn}}^{1 \dots n} A^{1 i_{12} \dots i_{1n}} \dots [A^{k_{i_2} \dots i_{kn}}] \dots A^{n i_{n2} \dots i_{nn}}^{10}.$$

Offenbar gilt der Entwicklungssatz:

III.

$$(8, 4) \quad A_{\underline{k}_{i_2} \dots i_{kn}} A^{k_{i_2} \dots i_{kn}} = A$$

und

$$A_{\underline{k}_{i_2} \dots i_{kn}} A^{i_{k_2} \dots i_{kn}} = 0$$

für gerades n (über die unterstrichenen Indizes $\underline{k}, j$ ist nicht zu summieren!).

¹⁰⁾ Das in Klammern stehende Element soll fehlen.

Für *geradzahliges* n schreiben wir das algebraische Komplement wieder übersichtlicher:

$$\begin{aligned} A_{k i_{k_2} \dots i_{k n}} &= \frac{1}{(n-1)!} \delta_{j_1 \dots [j_k] \dots j_n}^{1 \dots [k] \dots n} \delta_{i_1 2 \dots i_{n 2}}^{1 \dots n} \dots A^{j_1 i_1 2 \dots i_{1 n}} \dots A^{j_n i_1 n \dots i_{n n}} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \delta_{j_1 \dots k \dots j}^{1 \dots n} \delta_{i_1 2 \dots i_{n 2}}^{1 \dots n} \dots A^{j_1 i_1 2 \dots i_{1 n}} \dots A^{j_n i_1 n \dots i_{n n}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel läßt sich das Transformationsverhalten der algebraischen Komplemente unmittelbar ablesen:

$$A_{j_1 \dots j_n}^* = A_{k i_{k_2} \dots i_{k n}} \tilde{\varrho}_{j_1}^k \dots \tilde{\varrho}_{j_n}^{i_{k n}} | \varrho_k^i |^n,$$

und damit wird für $A \neq 0$:

$$\frac{A_{j_1 \dots j_n}^*}{A^*} = \frac{A_{k i_{k_2} \dots i_{k n}}}{A} \tilde{\varrho}_{j_1}^k \dots \tilde{\varrho}_{j_n}^{i_{k n}}.$$

Bezeichnet man $\frac{A_{j_1 \dots j_n}}{A} = \check{A}_{j_1 \dots j_n}$ als komplementäres Element von $A_{j_1 \dots j_n}$, so gilt also:

IV. Für *gerades* n transformieren sich die komplementären Elemente der Matrix $\mathfrak{A}$ komplementär, für *ungerades* n haben sie diese Eigenschaften nicht.

Literaturverzeichnis.

L. Berwald.

- [1] Die Grundgleichungen der Hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten, Monatshefte f. Math. **32** (1922), S. 89–106.

W. Blaschke.

- [2] Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Berlin, Julius Springer, 1923.

V. Hlaváty.

- [3] Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen, Math. Zeitschr. **38** (1934).

R. König u. E. Peschl.

- [4] Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. 1. bis 3. Mitteilung, Leipziger Berichte (1934).

R. König u. K. H. Weise.

- [5] Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. 4. Mitteilung, Leipziger Berichte (1935).

E. Peschl u. K. H. Weise.

- [6] Über das Berührungsmaß von Kurven, Math. Zeitschr. **42** (1936).

J. Radon.

[7] Leipziger Berichte **70** (1918), S. 99.

J. A. Schouten.

[8] Der Ricci-Kalkül. Berlin, Julius Springer, 1924.

K. H. Weise.

[9] Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n
(Teil I), Math. Zeitschr. **43** (1937).

H. Weyl.

[10] Zur Infinitesimalgeometrie: p -dimensionale Fläche im n -dimensionalen Raum,
Math. Zeitschr. **12** (1922).

(Eingegangen am 26. Januar 1938.)

On a principle of duality in circle sphere and line geometries.

By

A. Narasinga Rao, Annamalai University, Annamalaiagar (Indien).

("There is no actual solving of problems, but a referring back, from the more to the less complex, or *vice versa*, according to the trend of our thoughts". W. H. Young:
The Mathematical method and its limitations.)

1.

There is a whole series of geometrical disciplines whose fundamental group (in the sense of Klein's Erlanger Programm) may, by a suitable choice of space element and the introduction of an appropriate coordinate system, be made isomorphic with linear transformations in a projective space of a suitably chosen dimension n which carry a particular quadric $(M_{n-1}^2)\Omega$ into itself. In every such case, we have a representation of the space element in the geometry G by a point in S_n , the quadric Ω corresponding to elements of a specialised type, while point pairs P, P' conjugate with respect to Ω correspond to space elements subject to a symmetric invariant relation in the geometry G . Any point transformation in S_n which preserves such conjugacies in a certain configuration carries it over into a dual configuration having essentially the same structure in G . Obviously the collineations which carry Ω into itself belong to this category, since they conserve every conjugacy. For a particular configuration, however, there may exist more general transformations which preserve all the conjugacies therein, *thus providing a more general principle of duality*. It is the object of this paper to discuss such a general principle of duality and to give some striking applications to circle, sphere and line geometries.

2.

Consider a projective space S_n with $n + 1$ homogeneous coordinates x^i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) and a quadric $\Omega = a_{ij} x^i x^j = 0$ ¹⁾ ($a_{ij} = a_{ji}$) immersed in it. Suppose we have two sets of points x and y and that there exist conjugacy relations between some point pairs one belonging to each set. We subject all the points of the x -set to the transformation

$$(2.1) \quad x^i = c_i^j \bar{x}^j \quad |c_i^j| \neq 0$$

¹⁾ In this paragraph we use the usual tensor summation convention for repeated indices.

and the points of the y -set to the associated transformation

$$(2.2) \quad y^j = a^{jl} \gamma_l^m a_{mn} \bar{y}^n$$

where the γ 's and a^{ij} 's are defined by

$$(2.3) \quad c_i^j \gamma_j^k = \delta_i^k = \begin{matrix} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{matrix}; \quad a^{ij} a_{jk} = \delta_k^i.$$

The conjugacy relations $a_{ij} x^i y^j = 0$ are carried over into

$$\begin{aligned} 0 &= a_{ij} c_i^l a^{jl} \gamma_l^m a_{mn} \bar{x}^t \bar{y}^n \\ &= c_i^l \gamma_l^m a_{mn} \bar{x}^t \bar{y}^n \\ &= a_{in} \bar{x}^t \bar{y}^n \end{aligned}$$

(2.4) so that the points $\bar{x}^i, \bar{y}^i$ which are the transforms of x^i, y^i are still conjugate with respect to Ω .

If C denotes the collineation (2.1) and P the polar correlation of Ω , the two sets x and y are subject to the collineations C and PCP . The points on the quadric Ω are carried over into points on a quadric Ω_1 or Ω_2 according as they are conceived as points belonging to the x -set or the y -set. It is easy to see that:

(2.5) (i) the quadrics Ω_1 and Ω_2 are polar reciprocals each of the other with respect to Ω ;

(2.6) (ii) by a proper choice of C it is possible to carry points on Ω into points on an arbitrary non-singular quadric Ω_1 ²⁾.

We shall now give some concrete applications of these results to circle-, sphere- and line-geometries.

3. Applications to Circle Geometry.

It is known that the Geometry G of coplanar circles under the inversion group is isomorphic with the non-euclidean Geometry of S_3 with an absolute quadric Ω which corresponds to point circles on the plane. Two points in S_3 which are conjugate with respect to Ω correspond to two orthogonal circles on the plane π .

If we are given on π any configuration consisting of points and circles between which there are certain incidence relations, we first represent them in S_3 , the point-circles corresponding to points on Ω and the incidences being replaced by corresponding conjugacy relations with respect to Ω . We may now treat all the points of the configuration lying on Ω as belonging to the x -set and the others as belonging to the y -set and apply the transformations

²⁾ In order that C may be a real transformation it is necessary that Ω and Ω_1 should have not only the same rank but also the same signature.

of para 2. Since the totality of circles on π having a given radius a correspond to a non-singular quadric having the same signature as Ω , we have on using (2. 6) the following

Principle of duality in circle geometry:

(3. 1) *Given any configuration of points and circles in a plane between which there exist certain incidence relationships, there exists a dual configuration consisting of circles in which*

- (i) *to the points in the first configuration correspond circles of the same radius in the second;*
- (ii) *to every incidence relation between a point and a circle in the first configuration corresponds an orthogonality relation between the corresponding circles in the second.*

A classical example of incidence relations between points and circles is given by the series of theorems associated with the names of Miquel and Clifford. If these results are subjected to the inversion transformation so as to replace the n straight lines generating the configuration by concurrent circles, we obtain a symmetric configuration of 2^{n-1} circles and 2^{n-1} points of which n circles pass through each point and n points lie on each circle³). Applying the principle of duality enunciated above to the resulting configuration for $n = 2, 3, 4$ etc. we have the following series of

Generalised Miquel-Clifford Theorems.

(3. 2) *Given two circles C_1, C_2 cutting orthogonally a circle of given radius (say $\underline{a}$), there exists another circle C_{12} of radius $\underline{a}$ cutting them both orthogonally.*

(3. 3) *Given three circles C_1, C_2, C_3 cutting orthogonally a circle of radius $\underline{a}$, the three circles C_{12}, C_{23}, C_{31} each of radius $\underline{a}$ constructed according to (3. 2) have a common orthogonal circle C_{123} .*

(3. 4) *Given four circles C_1, C_2, C_3, C_4 if we construct the four circles $C_{123}, C_{234}, C_{341}, C_{412}$ by taking them three at a time, then these four circles have a common orthogonal circle of radius $\underline{a}$. We name this circle C_{1234} . and generally,*

(3. $\underline{n}$) *Given $\underline{n}$ circles all orthogonal to a circle of radius $\underline{a}$, we associate with them a circle of radius $\underline{a}$ when $\underline{n}$ is even and a circle (of a different radius) when $\underline{n}$ is odd. Omitting the circles one at a time, we have $\underline{n}$ configurations each generated by $\underline{n} - 1$ circles, and the $\underline{n} - 1$ circles associated with these configurations are orthogonal to the circle associated with the $\underline{n}$ -circle configuration.*

³) Grace, Circles Spheres and Linear Complexes, *Trans. of the Cambridge Phil. Soc.*, Vol. XVI, p. 31. Neville, The inverse of the Miquel Clifford Configuration, *Jour. Indian Math. Soc.* (1926), p. 241.

The classical Miquel-Clifford theorems constitute a special case corresponding to $a = 0$.

It is also obvious that in place of circles of constant radius a , we may have circles belonging to any proper quadratic circle complex in the result (3. 1) provided, however, that it does not correspond to a singular quadric in S_3 . We should not take for instance the totality of circles touching a given circle.

4.

The extension of the principle to Sphere Geometry in S_3 (Niedere Kugelgeometrie of Klein) and more generally, to the geometry of the non-oriented hypersphere in S_n offers no essential difficulties. For, it is known⁴⁾ that the geometry of S_n with the sphere as space element under the inversion group is identical in structure with the projective Geometry of S_{n+1} with a Cayley metric determined by an absolute quadric corresponding to null-spheres in S_n . The principle of duality associates with any theorem relating to the incidences of a set of points and a set of hyper-spheres a dual theorem in which the points are replaced by spheres of constant radius (or more generally, by those belonging to a quadratic complex) and the incidence relations are replaced by orthogonality relations. Other incidences such as a circle in space lying on a sphere, can be brought into the scheme by expressing them in terms of the incidence relationships between spheres and a suitably chosen set of points on the sub-manifolds.

5. Applications to Line Geometry.

It is well known that the projective geometry of S_3 with the line as space element is isomorphic with the projective geometry in S_5 under a collineation group which leaves a quadric Ω invariant. With Plucker's coordinates p_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) the equation of the quadric may be taken to be

$$(5.1) \quad \Omega = \sum p_i p_{i+3} = 0$$

and every line in S_3 corresponds to a point on Ω . A primal section of Ω by $\sum_{i=1}^6 a_i p_{i+3}$ corresponds to the lines of a linear complex; hence a complex may be represented by a point — the pole of the prime with respect to Ω . Under the metrical group of S_3 the complex possesses an absolute invariant called the *pitch* given by

$$(5.2) \quad p = \sum_{i=1}^3 a_i a_{i+3} / (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

⁴⁾ *Encyclopädie der Math. Wiss.* III, 1, i. p. 315.

The kinematical interpretation of the pitch is that it is the "pitch" (ratio of the translation to the angle of rotation) in a screw motion which carries every point in space along a helical path whose normals are all lines belonging to the complex. If the direction of translation be reversed (without changing the sense of rotation) we have another screw and hence also another linear complex whose pitch has the same magnitude but is opposite in sign.

It is obvious from (5. 2) that complexes of the same pitch form a quadratic system and correspond to points on a quadric Ω_1 . It is also easy to verify that

(5. 3) *if the points of Ω_1 correspond to complexes of constant pitch p , the points of Ω_2 the polar reciprocal of Ω_1 with respect to Ω correspond to complexes of pitch $-p$.*

Lastly we use the result that two complexes in involution correspond to points which are conjugate with respect to Ω , and in particular two lines which intersect correspond to two points on Ω which are conjugate with respect to it, that is two points whose join is a generator of Ω .

We now use the results of para 1 and obtain the following

Principle of duality in line geometry.

(5. 4) *Given any configuration of straight lines in S_3 which consists of two sets with certain incidence (intersection) relations between pairs of members one belonging to each set, there exists a dual configuration of linear complexes such that*

- (i) *to every straight line in the one set corresponds a complex of pitch $\underline{p}$, and to every line of the other set a complex of pitch $-\underline{p}$;*
- (ii) *when two lines, belonging one to each set, intersect, the corresponding linear complexes are in involution.*

On applying the Principle to Schläfli's double six we have the following result:

(5. 5) *Given four linear complexes each of pitch $\underline{p}$, there exist in general two complexes each of pitch $-\underline{p}$ which are in involution with all of them;*

(5. 6) *Let A_r ($r = 1, 2, 3, 4, 5$) be five complexes each of pitch $\underline{p}$ in involution with a complex B_6 of pitch $-\underline{p}$. Then any four of them, say $A_1 A_2 A_3 A_4$ have in addition to B_6 , another complex of pitch $-\underline{p}$ in involution with them. Let it be called B_5 . The five complexes $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ thus obtained will all be in involution with a complex A_6 of pitch $\underline{p}$.*

Schläfli's double six is a particular case corresponding to $p = 0$.

6. Applications to Höhere Kugelgeometrie.

Let S_n be a Euclidean metrical manifold with rectangular co-ordinates x_i ($i = 1, \dots, n$). The equation of a hypersphere centre ξ_i and radius r is given by

$$(6.1) \quad \Sigma (x_i - \xi_i)^2 = r^2.$$

We orient each sphere by associating with its radius the positive or the negative sign, and take for the coordinates⁵⁾ of the sphere the $n+2$ numbers

$$(6.2) \quad \begin{cases} x_0 &= \frac{1}{2} \rho \left(1 + \sum_1^n \xi_i^2 - r^2 \right), \\ x_1 &= \frac{1}{2} \rho \left(1 - \sum_1^n \xi_i^2 + r^2 \right), \\ x_{i+1} &= \rho \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_{n+2} &= \rho r \end{cases}$$

so that they are all connected by the identical relation

$$(6.3) \quad \Omega = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0.$$

7.

We have represented all oriental spheres in S_n by points in a projective S_{n+2} with an invariant quadric Ω . To correspond to points not on the quadric we associate with each sphere a number w called its *weight* which modifies the coordinates of the representative point in S_{n+2} in a prescribed way dependent on the value of w . In general, the coordinates will be unaltered when w has a particular value w_0 so that Ω is the locus of weighted spheres corresponding to this value w_0 . Two weighted spheres are said to be *conjugate* when the corresponding points in S_{n+2} are conjugate with respect to Ω .

For two oriented spheres in S_n with coordinates x, y satisfying (6.3), the cosine of the angle of intersection (the angle between their oriented normals) and the proper tangential segment t (the distance between the points of contact of an oriented prime which has proper contact with each of them) are given by

$$(7.1) \quad -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2} \cos \theta = 0$$

$$(7.2) \quad -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2} + \frac{1}{2} t^2 (x_0 + x_1) (y_0 + y_1) = 0.$$

We shall use two systems of weightage. According to the first of these the weight w modifies the last coordinate x_{n+2} by multiplying it by w , so that a sphere of unit weight ($w_0 = 1$) is just an ordinary sphere and corre-

⁵⁾ Vide Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* Bd. III, S. 227.

sponds to a point on Ω . The totality of spheres of the same weight w corresponds to points on a quadric

$$(7.3) \quad -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2/w^2 = 0.$$

The conjugacy of the representative points of two spheres (x) and (y) of weights w and w' is given by the condition

$$(7.4) \quad -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+2}y_{n+2} = 0$$

so that if we write $w = \cos \alpha$ and $w' = \cos \alpha'$ and θ be the angle of intersection of the two spheres, conjugacy implies $\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha'$ as may be seen from (7.4) and (7.1) modified for weighted spheres. Taking one of the spheres as of unit weight we have the following:

(7.5) *A sphere with weightage $w = \cos \alpha$ may be identified with the sphere complex consisting of all the oriented spheres cutting that oriented sphere at the same angle α . Two weighted spheres of weights $w = \cos \alpha$ and $w' = \cos \alpha'$ cutting at an angle θ represent conjugate points with respect to Ω if $\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha'$.*

It is also easy to verify that:

(7.6) *All spheres of the same weight w correspond to points on a quadric Ω_1 ; the polar reciprocal of Ω_1 with respect to Ω is the quadric Ω_2 which corresponds to spheres of constant weight $1/w$.*

Now take any simplex inscribed in Ω and circumscribed to Ω_2 . Polarising with respect to Ω we obtain another simplex circumscribed to Ω and inscribed in Ω_1 . Representing the vertices of the two simplexes by A_r and B_r ($r = 0, 1, \dots, n+2$), we have $n+3$ ordinary spheres (of unit weight) and $n+3$ weighted spheres each of weight $w = \cos \alpha$ and A_r is conjugate to every sphere B except B_r . Interpreting this we have the following result:

(7.7) *It is possible to find in S_n two sets of $n+3$ oriented spheres with the property that every sphere of the first set cuts $n+2$ spheres of the other set at the same angle α .*

For $n = 4, 5$ it is known⁶⁾ that there exist in-circum simplexes of a quadric Ω . If the vertices of the simplex and the points of contact with the prime faces be interpreted as corresponding to oriented circles in a plane or spheres in S_3 , we have two sets of 5 oriented circles in a plane, and two sets of 6 oriented spheres in S_3 with the property that each member of one set has proper contact with all the members of the other set except the corresponding one. This shows that non trivial cases of (7.7) exist in a plane and in space even when the angle α vanishes. The existence of such non-trivial

⁶⁾ Vaidyanathaswami, On simplexes doubly incident with a quadric, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. XXII.

sets of tangential oriented spheres in S_n implies and is implied by the existence of in-circum simplexes of a quadric in S_{n+2} . When α is a right angle, $w = 0$ and the quadric degenerates into a repeated prime, so that the result no longer holds in this case.

8.

As a second system of weightage we associate with each oriented sphere y in S_n a weight $w = t^2$ which leaves all the coordinates unaltered except y_0 and y_1 and changes these into $y_0 - \frac{1}{2} t^2 (y_0 + y_1)$ and $y_1 + \frac{1}{2} t^2 (y_0 + y_1)$ respectively.

Obviously $w_0 = 0$ and the sphere of zero weight is just the ordinary sphere whose coordinates satisfy (6.4). It is also clear from (7.2) that a point corresponding to a sphere of weight t^2 and another to a sphere of weight zero are conjugate with respect to Ω if the common tangential segment of the two spheres is t . More generally from the relation (7.2) modified for weighted spheres and the conjugacy relation with respect to Ω it may be shown that:

(8.1) *Two spheres with weights $w = t_1^2$ and $w = t_2^2$ whose common tangential segment is $\underline{t}$ correspond to points conjugate with respect to Ω if $t^2 = t_1^2 + t_2^2$. Hence a sphere with weight $\underline{t}^2$ may be identified with the sphere complex consisting of all oriented spheres which have with that sphere a tangential segment of given length $\underline{t}$.*

It is also easy to verify that corresponding to (7.5) we have

All spheres of the same weight $w = t^2$ correspond to points on a quadric $\Omega_1 = -x_0^2 + x_1^2 + \dots x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 - t^2 (x_0 + x_1)^2 = 0$; the polar reciprocal of Ω_1 with respect to Ω is the quadric Ω_2 which corresponds to spheres of constant weight $w = -t^2$.

Now take a simplex inscribed in Ω_1 and circumscribed to Ω . If the vertices and the points of contact be A_r and B_r respectively ($r = 0, 1, \dots, n+2$), we have $n+3$ spheres of the same weight t^2 and also $n+3$ ordinary spheres (of weight zero), and B_r is conjugate to every A except A_r . Interpreting this by (8.1) we have the following result:

(8.2) *It is possible to find in S_n two sets of $n+3$ oriented spheres A_r, B_r with the property that every sphere of the first set has with every one of the other set except the corresponding member, the same tangential segment $\underline{t}$.*

The existence of proper in-circum simplexes of a quadric Ω in S_{n+3} implies and is implied by the existence of two sets of oriented spheres in S_n such that each touches all those of the other set except the corresponding member.

9.

The automorphic collineation group of the quadric given by (6. 3) is a $(n+2)(n+3)/2$ parameter group K which is pure or mixed according as n is even or odd. It is called the Lie Group and each of its collineations carries a sphere in S_n into another sphere and conserves proper contact.

The collineations of K which carry a given prime π into itself, and hence have its pole P with respect to Ω as a fixed point form an $(n+1)(n+2)/2$ parameter sub-group with an associated sphere geometry G . If we take the prime π to be any one of the pencil $\pi_k = x_{n+2} + k(x_0 + x_1) = 0$, we have a series of geometries G_k of which Möbius Geometry ($k=0$) and Laguerre Geometry ⁷⁾ ($k=\infty$) are special cases. The two systems of weightage in para 7 use the ideas relevant to these two geometries. Since by (6. 2) we have $x_{n+2}/(x_0 + x_1) = r$, the spheres of radii k play the same role in the geometry G_k that point spheres play in the Möbius Geometry G_0 ⁸⁾. We thus have a principle of duality carrying us from G_0 to G_k .

The Group common to all the geometries G_k is the group which carries $x_0 + x_1 = 0$, $x_{n+2} = 0$ and $\Omega = 0$ into themselves, and hence it is the automorphic group of

$$x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

i. e. the metrical group in S_n . Obviously every invariant of G_k is also a metrical invariant; but in addition there must be some invariants peculiar to it. For instance, two spheres in S_n have a common section whose radius R is a metrical invariant. If $R = 0$, so that the spheres touch, the join of the representative points on the Möbius Prime $x_{n+2} = 0$ touch the Möbius Quadric

$$(9.1) \quad -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0.$$

If $R \neq 0$, the join of the two points touches the quadric

$$(9.2) \quad -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - R^2(x_0 + x_1)^2.$$

Hence if we subject all the points in the Möbius space $x_{n+2} = 0$ to a linear transformation which carries (9. 1) into (9. 2), two points whose join touches (9. 1) will go over into two points whose join touches (9. 2). Interpreting this, we have a *Principle of Duality at the metrical level* which may be stated as follows:

⁷⁾ As the section of by $x_0 + x_1 = 0$ is singular, the Laguerre group has $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$ parameters. It has a sub-group with one parameter less for which the tangential segment is an absolute invariant.

⁸⁾ Blaschke, *Differentialgeometrie* Bd. III (1929), S. 209.

(9. 3) *Given any configuration of spheres and points, there exists a dual configuration in which,*

- (i) *to every point of the first configuration corresponds a sphere of radius R in the second;*
- (ii) *whenever two spheres in the first configuration touch or a sphere is incident with a point, the corresponding spheres in the dual configuration have for intersection a sphere (in a lower dimension) of radius R . (In the case of two circles, the common chord will be of length $2R$).*

In particular applying this principle to the configuration of two Hart tetrad of circles on a plane, we have the following generalisation:

(9. 4) *It is possible to find on a plane two sets of four circles such that each circle of one set has with each circle of the other set a chord of given length.*

10.

It will be noticed that the principles of duality we have discussed replace each theorem by a dual theorem involving a parameter, and that for a particular value of the parameter the dual theorem becomes identical with the original. Hence they are principles of duality when the parameter is fixed, and serve as principles of generalisation when the parameter is allowed to vary.

(Eingegangen am 21. Oktober 1937.)

(*Post script added on 23. 2. 38*). The weighted spheres of paras 7,8 may be given a geometrical significance by means of the concept of a *turbine* which is an aggregate of oriented surface elements defined as follows. Let each surface element of an oriented sphere c of radius say r (called the *inner sphere*) glide along the tangent prime in various directions through the same distance t . The points of the surface elements now lie on a concentric sphere C (called the *outer sphere*) and cut it at a constant angle α . Since $R^2 = r^2 + t^2$ and $\cos \alpha = r/R$, it will be seen that the turbine is imaged by our weighted sphere, the two systems of weightage corresponding to a specification of the turbine through its inner or its outer sphere, i. e. through (c, t) or (C, α) .

Determinative Sets of Points for Classes of Integral Functions.

Von

V. Ganapathy Iyer (Madras).

1. A polynomial of degree n is entirely determined by the values which it assumes at $(n + 1)$ given points. If we consider the class of *all* polynomials of degree not exceeding n , the class is determined by $(n + 1)$ given points in the sense that no two polynomials of the class can assume the same set of values at the $(n + 1)$ points without being identically the same. We might call the set of $(n + 1)$ points a *determinative set* for the class of polynomials. If we consider the class of *all* polynomials, *any* enumerable set (and nothing less) will form a determinative set for the class in question in the sense explained. *Any* enumerable set *with a finite limit point* will form a determinative set for the class of *all* integral functions but when the sole limit point of the point set is infinity the matter is not so simple. In this paper I consider the conditions under which a sequence of points with its sole limit point at infinity will form determinative sets for certain classes of integral functions.

1.1. Definition and notation. Let $z = re^{i\theta}$ and let $A(\alpha)$ denote the region $|\theta| \leq \alpha$ ($0 < \alpha \leq \pi$). Let $f(z)$ be a function regular in $A(\alpha)$ except may be at $z = 0$ where it is continuous as $z \rightarrow 0$ from within $A(\alpha)$. Let

$$M\{r, f, A(\alpha)\} = \max |f(z)|$$

as z varies in the sector common to $A(\alpha)$ and the circle $|z| \leq r$. The order ρ , the type $k\{f, A(\alpha)\}$ and the Lindelöf's function $h(\theta, f)$ of $f(z)$ in $A(\alpha)$ are defined by the relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M\{r, f, A(\alpha)\}}{\log r}, \\ k\{f, A(\alpha)\} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M\{r, f, A(\alpha)\}}{r^\rho}, \\ h(\theta, f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad |\theta| \leq \alpha. \end{array} \right.$$

When $f(z)$ is an integral function we write $M(r, f) = M\{r, f, A(\pi)\}$ and $k(f) = k\{f, A(\pi)\}$.

1. 2. Let $[z_n]$ be a sequence of distinct complex numbers with its sole limit point at infinity and arranged according to non-decreasing moduli. Let $n(r)$ denote the number of these z_n^* in $|z| \leq r$. If

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\varrho} = D,$$

we shall say that $[z_n]$ is measurable of order ϱ and density D . When z_n is real and positive we denote the sequence by $[\lambda_n]$. We shall speak of the exponent of convergence ϱ of $[z_n]$ as its order for shortness. When (2) holds the order is precisely ϱ .

1. 3. Definition. A sequence $[z_n]$ is said to form a *determinative set* or a *D-set* for a given class of integral functions when no two functions of the class assume the same set of values at $[z_n]$ without being identically the same.

1. 4. It may be noted that the definition of a *D-set* has no significance for individual integral functions. It is formulated only in terms of a class of integral functions. The idea here closely resembles the notion of quasi-analytic functions. Quasi-analyticity is a class property and not that of individual functions¹⁾.

1. 5. We denote by $c(\varrho)$ the class of all integral functions of order *not exceeding* ϱ and by $c(<\varrho)$ the class of functions where orders are *less than* ϱ . $c(\varrho, d)$ denotes the class of integral functions of order ϱ and type *not exceeding* d while $c(\varrho, <d)$ denotes the class of all functions of order ϱ and type *less than* d . Here ϱ and d are any two given positive numbers. We now proceed to discuss the necessary and sufficient conditions that a sequence $[z_n]$ should form a *D-set* for the classes defined above.

2. Theorem 1. *A necessary and sufficient condition that a sequence $[z_n]$ should form a D-set for $c(\varrho)$ [$c(<\varrho)$] is that the order of $[z_n]$ should be greater than ϱ [not be less than ϱ].*

Proof. We prove the theorem for $c(\varrho)$. The proof for $c(<\varrho)$ is similar. First, suppose $[z_n]$ forms a *D-set*. If possible let its order be less than or equal to ϱ . Let $\sigma(z)$ be the canonical product with simple zeroes at $[z_n]$. Then it is a function of order equal to that of $[z_n]$ and so cannot exceed ϱ . If $f(z)$ is any function of $c(\varrho)$, $f(z) + \sigma(z)$ is also a function of $c(\varrho)$ and takes the same values as $f(z)$ at $[z_n]$. Since $\sigma(z) \not\equiv 0$, this leads to a contradiction. Hence $[z_n]$ is of order greater than ϱ and so the necessity is proved. As to sufficiency, let $[z_n]$ be of order greater than ϱ . Let $f(z)$ and $g(z)$ be two functions of $c(\varrho)$ taking the same values at $[z_n]$. Then $f(z) - g(z)$ is a function of $c(\varrho)$ and vanishes at $[z_n]$ which is of order greater than ϱ . Hence,

¹⁾ See Carleman, „Fonctions Quasi-analytiques“, Borel Tracts.

by a classical theorem, $f(z) - g(z) \equiv 0$ or $f(z) \equiv g(z)$. So the theorem is proved.

3. Theorem 2. *A necessary and sufficient condition that a sequence $[z_n]$ should form a D -set for $c(\rho, d)$ [$c(\rho, < d)$] is that any function vanishing at $[z_n]$ should be of order ρ and type greater than d [not less than d] unless it is identically zero.*

Proof. We shall prove the theorem for $c(\rho, d)$. The proof for $c(\rho, < d)$ is similar. Firstly, we note that $c(\rho, d)$ is a linear class. For, if $f(z)$ belongs to $c(\rho, d)$ so does af where a is any constant. Next, let f_1 and f_2 belong to $c(\rho, d)$. Then given $\epsilon > 0$, we can find $r_0 = r_0(\epsilon)$ such that $M(r, f_1) \leq \exp[(d + \epsilon)r^\rho]$ and $M(r, f_2) < \exp[(d + \epsilon)r^\rho]$ for $r \geq r_0$. Hence $M(r, f_1 + f_2) \leq M(r, f_1) + M(r, f_2) \leq 2 \exp[(d + \epsilon)r^\rho]$ so that $f_1 + f_2$ belongs to $c(\rho, d)$. Let, now, $[z_n]$ be a D -set for $c(\rho, d)$. Suppose, if possible, that $\sigma(z)$ is a function vanishing at $[z_n]$ and of order ρ and type not exceeding d while it is not identically zero. Then, if $f(z)$ is a function of $c(\rho, d)$, so is $f(z) + \sigma(z)$ which also has the same values as $f(z)$ at $[z_n]$. This contradicts the hypothesis that $[z_n]$ is a D -set for $c(\rho, d)$. Hence the condition is necessary. Next, let $[z_n]$ be such that any function not identically zero and vanishing at these points has order ρ and type greater than d . If $f(z)$ and $g(z)$ were two functions of $c(\rho, d)$ taking the same values at $[z_n]$, then $f(z) - g(z)$ belongs to $c(\rho, d)$ since the class is linear while it vanishes at $[z_n]$. Hence it is identically zero since it is of order ρ and type not exceeding d . So the condition is sufficient.

4. The two preceding theorems give general criteria for a sequence $[z_n]$ to form D -sets for the classes considered therein. It now remains to effectively determine such sequences. For the classes $c(\rho)$ [$c(< \rho)$] this matter is quite simple; for we have only to take a set $[z_n]$ whose exponent of convergence is greater than ρ to obtain a D -set for $c(\rho)$ and is not less than ρ to obtain D -sets for $c(< \rho)$. In the latter case, sequences of order ρ are D -sets for $c(< \rho)$ which are, so to speak, the least numerous. But, for the classes $c(\rho, d)$ and $c(\rho, < d)$ this simple procedure is not enough. For, given a sequence $[z_n]$, functions which vanish at these points and have the same order ρ may have different types and they need not all be greater than the chosen number d . For instance, if we take the sequence $[n]$, $n = 1, 2, \dots$, the canonical product $\{\Gamma(-z + 1)\}^{-1}$ is a function of order one and type $k\{1/\Gamma\} = \infty$ while the function $\sin \pi z$ which also vanishes at $z = n$ is of order one and type π . We now proceed to give certain general types of sequences which are D -sets for $c(\rho, d)$ and $c(\rho, < d)$.

4.1. Theorem 3. *Let $[z_n]$ be a measurable sequence of order ρ and density D . Then $[z_n]$ is a D -set for $c(\rho, d)$ [$c(\rho, < d)$] if $D > \rho d$ [$D \geq \rho d$].*

Proof. We shall show that any function $g(z)$ not identically zero but vanishing at $[z_n]$ has type greater than d when $D > \varrho d$ and not less than d when $D \geq \varrho d$. Let $n_\sigma(r)$ denote the number of zeros of $g(z)$ in $|z| \leq r$ and $n(r)$ the number of $[z_n]$ in the same circle. Since $n(r) \leq n_\sigma(r)$, we have, by Jensen's formula,

$$(3) \quad \int_0^r \frac{n(r)}{r} dr \leq \int_0^r \frac{n_\sigma(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta + O(\log r).$$

Since, by hypothesis, $n(r) \sim Dr^c$, we get

$$\int_0^r \frac{n(r)}{r} dr \sim \frac{D}{c} r^c$$

so that (3) gives $k(g) \geq \frac{D}{c}$ from which the results required follow at once.

4. 2. Theorem 4. Let $[\lambda_n]$ be a real positive measurable sequence of order ϱ and density D . Then it will form a D -set for $c(\varrho, d)$ [$c(\varrho, < d)$] if $D > d\alpha(\varrho)$ [$D \geq d\alpha(\varrho)$] where $\alpha(\varrho)$ is a function of ϱ defined by $\alpha(\varrho) = \frac{\sin \pi \varrho}{\pi}$, $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ and $\alpha(\varrho) = \frac{1}{\pi}$, $\varrho \geq \frac{1}{2}$.

4. 3. To prove theorem 4, we require the two following lemmas²).

Lemma 1. Let $f(z)$ be regular, of order ϱ and finite type in $A\left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)$. If $h\left(\frac{\pi}{2\varrho}, f\right) + h\left(-\frac{\pi}{2\varrho}, f\right) < 0$, then $f(z) \equiv 0$.

Lemma 2. Let $[\lambda_n]$ be a measurable sequence of order one and density D . Let

$$(4) \quad \sigma(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Then

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\sigma(re^{i\theta})|}{r} = \pi D |\sin \theta|,$$

uniformly in any angle not containing $\theta = 0$ or π .

4. 4. Proof of theorem 4. We prove the theorem for $c(\varrho, d)$; the proof for $c(\varrho, < d)$ is similar. Case (i). Let $0 < \varrho < \frac{1}{2}$. Let $g(z)$ be a function vanishing at $[\lambda_n]$. Suppose it belongs to $c(\varrho, d)$. We shall show that $g(z) \equiv 0$ and then the theorem would follow from theorem 2. Let

$$\sigma_\varrho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

²) See my paper in the Quart. Journ. Math. (Oxford) 8 (1937), pp. 131—141, lemmas 1 and 2 and the references given there.

and $G_\rho(z) = \frac{g(z)}{\sigma_\rho(z)}$. Then $G_\rho(z)$ is an integral function. By using the method I have employed elsewhere³) we can show that $G_\rho(z)$ is of order ρ at most. Now⁴) $\sigma_\rho(-r) \sim (\pi D \operatorname{cosec} \pi \rho) r^\rho$ so that, in virtue of the hypothesis on $g(z)$, $G_\rho(-r) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ since $d < \pi D \operatorname{cosec} \pi \rho$. Hence, by a well-known theorem of Phragmen and Lindelöf⁵), $G_\rho(z) \equiv 0$. Therefore $g(z) \equiv 0$. Case (ii). Let $\rho \geq \frac{1}{2}$. Let $g(z)$ belong to $c(\rho, d)$ and vanish at $[\lambda_n]$. We shall show, as before, that $g(z) \equiv 0$. Since $g(z)$ is regular, of order ρ and type not exceeding d in $\Delta\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)$, it follows that $f(u) = g(z)$, $u = z^\rho$, is regular, of order one and type not exceeding d in $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Also $f(u)$ vanishes at $[\lambda_n^\rho] = [\mu_n]$ which is of order one and density D . Let

$$\sigma(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

and $F(u) = \frac{f(u)}{\sigma(u)}$. Then, as in case (i), we can show that $F(u)$ is of order one at most in $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Using (5) and the Phragmen-Lindelöf theorem used in case (i) we can show that $F(u)$ is of finite type in $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Again using (5) and the fact that $k\left\{F, \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = k\left\{g, \Delta\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)\right\} \leq d$ while $d < \pi D$, it follows that $h\left(\frac{\pi}{2}, F\right) < 0$, $h\left(-\frac{\pi}{2}, F\right) < 0$, so that by lemma 1, $F(u) \equiv 0$. Hence $f(u) \equiv 0$ and so $g(z) \equiv 0$. Therefore the theorem is proved.

5. I have defined elsewhere⁶) an effective set or E -set for an integral function $f(z)$ of order ρ to be a sequence $[z_n]$ such that

$$k(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z_n)|}{|z_n|^\rho}.$$

I have shown³) that there exist sequences $[z_n]$ which are E -sets for every function of the class $c(\rho, < d)$. Here we can state.

Theorem 5. *Every E -set for $c(\rho, < d)$ is also a D -set for the class but the converse is not true.*

Proof. Let $[z_n]$ be an E -set and $g(z)$ a function of $c(\rho, d)$ vanishing at $[z_n]$. Then, by definition,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |g(z_n)|}{|z_n|^\rho} = -\infty = k(g)$$

³) Journ. Ind. Math. Soc., New Series, 2 (1936/37), pp. 4—6 and 57—59.

⁴) Paley and Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, p. 79.

⁵) G. Valiron, Lectures on Integral Functions, p. 125.

⁶) "On effective sets of points in relation to integral functions", The Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 42 (1937), 358—365.

so that $g(z) \equiv 0$. Hence $[z_n]$ is an E -set for $c(\varrho, < d)$ by theorem 2. That the converse is not true is seen if we note that while a real positive sequence can be a D -set for $c(\varrho, < d)$ by theorem 4, the amplitudes of the points of an E -set for $c(\varrho, < d)$ must be everywhere dense⁷⁾ in $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

5. 1. When we drop the assumption that the sequences in theorem 3—4 are measurable, it is not possible to obtain such precise results. But we can state the following result.

Theorem 6. *Let $[z_n]$ be such that $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\varrho} = \alpha > 0$. Then there exists a positive $d = d(\alpha)$ such that $[z_n]$ forms a D -set for $c(\varrho, d)$.*

Proof. Let $g(z)$ be a function vanishing at $[z_n]$ and not identically zero. Then, by Jensen's formula,

$$\int_0^r \frac{n(r)}{r} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta + O(\log r)$$

so that

$$k(g) \geq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\varrho} \int_0^r \frac{n(r)}{r} \geq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\varrho} \int_{r/2}^r \frac{n(r)}{r} \geq \frac{\log 2}{2^\varrho} \alpha > 0$$

from which the result of the theorem follows from theorem 2.

5. 2. It may be noted that the results of theorems 3 and 4 are the best possible. So far as theorem 4 is concerned it is sufficient to note that $\sigma(z)$ given by (4) is of order one and type precisely equal to πD . To show that theorem 3 is a best possible result we consider the function

$$\sigma_\varrho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^n}{\frac{2n}{n^\varrho}} \right)$$

for which⁸⁾ $k(\sigma_\varrho) = \frac{1}{2^\varrho}$ while $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\varrho} = \frac{1}{2}$.

⁷⁾ See the paper last cited, theorem 1.

⁸⁾ Ibid., lemma 4.

Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome.

Von
Artur Erdélyi in Brünn.

In der Theorie der durch die erzeugende Funktion¹⁾

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n(x) = e^{hx - \frac{1}{2}h^2}$$

erklärten Hermiteschen Polynome spielt die Mehlersche Formel²⁾

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \left\{ \frac{t}{2(1-t^2)} [2xy - t(x^2 + y^2)] \right\}$$

eine wichtige Rolle, z. B. bei der Untersuchung der Abelschen Summierbarkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Polynomen. Wie Hille bemerkt hat, wurde diese grundlegende Formel wiederholt von verschiedenen Autoren entdeckt und bewiesen. Zuletzt noch hat Watson³⁾ für sie drei verschiedene Beweise mitgeteilt.

Alle mir bekannten Beweise stützen sich auf verschiedene weiterhin gewonnenen Sätze aus der Theorie der Hermiteschen Polynome, während es doch bei dem fundamentalen und verhältnismäßig einfachen Charakter von (2) erwünscht erscheint, (2) *unmittelbar* aus der Definitionsgleichung der Hermite-schen Polynome ohne weitere Umwege zu gewinnen. Ich habe zwei Beweise konstruiert, die diesem Wunsche Rechnung tragen und dabei gefunden, daß der eine von ihnen eine sehr leicht zu überblickende Verallgemeinerung auf n Dimensionen zuläßt. Dieser Beweis soll im folgenden mitgeteilt werden, da er neben der Eigenart seiner Methode, die an sich einiges Interesse beanspruchen darf und sich auf andere Orthogonalsysteme übertragen läßt, die Mehlersche Formel für n Dimensionen liefert. Bisher wurde von dieser allgemeinen Formel nur der Sonderfall $n = 2$, in dem sich aber das allgemeine Bildungs-

¹⁾ Vgl. z. B. P. Appell und J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes de Hermite*. Paris 1926 (im folgenden als A.-K. zitiert). Insbesondere S. 331, Gleichung (1).

²⁾ Wahrscheinlich von Mehler, Über die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung. *J. f. Math.* 66 (1866), S. 161—176 zuerst angegeben.

³⁾ G. N. Watson, Notes on generating functions of polynomials: (2) Hermite polynomials, *Journal London Math. Soc.* 8 (1933), S. 194—199.

gesetz noch nicht ohne weiteres überblicken läßt, von Koschmieder⁴⁾ in dieser Zeitschrift behandelt. Ein anderes Mal hoffe ich das entsprechende Problem in der Theorie der Laguerreschen Polynome und anderer verwandter Orthogonalsysteme behandeln zu können.

Bei der in folgenden Zeilen gegebenen Herleitung ist das Hauptinstrument eine gewisse Hilfsformel zur Komposition von Potenzreihen. Da diese Formel auch anderweitig mit Nutzen angewendet werden kann, so soll sie in viel allgemeinerer Form hergeleitet werden, als es zunächst für die Zwecke der vorliegenden Mitteilung notwendig wäre. Mit ihrer Hilfe kann der eigentliche Beweis sehr kurz erledigt werden. Nach einigen Bemerkungen, die quadratische Formen und gewisse mehrfache Integrale betreffen, wird dann der entsprechende Beweis für Hermitesche Polynome von mehreren Veränderlichen geführt und zum Schluß der Sonderfall von nur zwei Veränderlichen erörtert.

Herrn Prof. Dr. Rudolf Weyrich danke ich herzlich für seine Ratschläge, die er mir ebenso wie bei der Abfassung einiger früheren in dieser Zeitschrift erschienenen Noten auch bei dieser Note zuteil werden ließ.

§ 1.

Eine Hilfsformel.

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

seien zwei ganze Transzendente. Die Aufgabe, diejenige ganze Funktion zu bestimmen, deren Potenzreihe die Koeffizienten $a_n b_n$ aufweist, ist sehr leicht gelöst. Die gesuchte Funktion wird durch eine Art von Faltung in der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{z} e^{i\vartheta}) g(\sqrt{z} e^{-i\vartheta}) d\vartheta$$

bestimmt. Oft taucht aber auch die Frage auf, diejenige nicht notwendig ganze Funktion zu bestimmen, deren Potenzreihenentwicklung die Koeffizienten $p_n a_n b_n$ aufweist, wobei die p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) vorgegebene „Gewichte“ bedeuten. Diese Frage kann ebenfalls sehr leicht beantwortet werden, wenn die Lösung des Momentenproblems für die Gewichte bekannt ist, d. h. wenn eine Funktion $P(r)$ angegeben werden kann, so daß

$$(4) \quad p_n = \int_0^{\infty} P(r) r^n dr \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

⁴⁾ L. Koschmieder, Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist. Math. Zeitschr. 43 (1937), S. 248—254.

Dann ist nämlich für komplexes t

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n b_n t^n = \frac{1}{\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{u^2 + v^2}{t}\right) f(u + iv) g(u - iv) du dv,$$

vorausgesetzt, daß

1. $P(r)$ für alle positiven reellen r stetig ist, und
2. entweder

$$\sum_{n=0}^{\infty} [|a_n b_n t^n| \int_0^{\infty} |P(r)| r^n dr]$$

oder

$$\int_0^{\infty} |P(r)| \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n r^n t^n| \right] dr$$

konvergiert, und schließlich

3. das Doppelintegral auf der rechten Seite von Gleichung (5) absolut konvergiert.

Beweis. Für zunächst nur positiv reelle t kann das Doppelintegral auf Grund der Voraussetzung 3. nach Einführung neuer Integrationsveränderlicher r und ϑ mittels der Gleichungen

$$u = \sqrt{rt} \cos \vartheta, \quad v = \sqrt{rt} \sin \vartheta$$

durch zwei wiederholte Integrationen nach ϑ und r berechnet werden. Nach Durchführung der Integration nach ϑ kann dann auf Grund der Voraussetzungen 1. und 2. die Reihenfolge von Integration nach r und Summation vertauscht werden⁵⁾, woraus die Richtigkeit von (5) folgt. Durch analytische Fortsetzung folgt dann weiterhin die Richtigkeit von (5) für den Durchschnitt der Bereiche absoluter Konvergenz von Reihe und Integral in (5).

Im Falle mehrerer Veränderlicher gilt eine ganz entsprechende Hilfsformel, deren ausführliche Notierung überflüssig sein dürfte.

Im folgenden wird (5) nur in dem Sonderfalle verwendet, daß $P(r) = e^{-r}$ ist, also

$$p_n = \int_0^{\infty} e^{-r} r^n dr = n!$$

Dann ist also, wenn die Reihe auf der linken Seite und das Doppelintegral auf der rechten Seite absolut konvergent sind

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n n! t^n = \frac{1}{\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2 + v^2}{t}} f(u + iv) g(u - iv) du dv.$$

⁵⁾ Vgl. z. B. J. T. Bromwich, An Introduction to the theory of infinite series. 2d Edition London 1926, insbesondere § 176 B.

Diese Formel ermöglicht die Herleitung der Mehlerschen Formel aus der erzeugenden Funktion der Hermiteschen Polynome. Die angeführten Bedingungen sind *hinreichend*, aber keineswegs notwendig.

§ 2.

Die Mehlersche Formel.

Es seien

$$a_n = \frac{1}{n!} H_n(x), \quad b_n = \frac{1}{n!} H_n(y),$$

und nach (1)

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = e^{wx - \frac{1}{2}w^2}, \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n = e^{wy - \frac{1}{2}w^2}.$$

Die Anwendung der Hilfsformel (6) ergibt sofort

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) H_n(y) \\ &= \frac{1}{\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{t} + (u + iv)x + (u - iv)y - \frac{1}{2}(u + iv)^2 - \frac{1}{2}(u - iv)^2 \right\} du dv. \end{aligned}$$

Das Doppelintegral, welches für $|t - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ absolut konvergent ist, kann unter dieser Voraussetzung in das Produkt zweier einfacher Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{t} + 1)u^2 + (x + y)u} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{t} - 1)v^2 + i(x - y)v} dv$$

zerlegt werden, so daß sich, da bekanntlich

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + 2\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0)$$

ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot \exp \left\{ \frac{t(x + y)^2}{4(1 + t)} - \frac{t(x - y)^2}{4(1 - t)} \right\},$$

d. h. die Mehlersche Formel ergibt. Da die linke Seite dieser Gleichung die Entwicklung einer für $|t| < 1$ regulären analytischen Funktion ist, so muß sie im Innern des Einheitskreises absolut konvergent sein, so daß die Voraussetzungen der Hilfsformel zumindest für $|t - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ erfüllt sind. Durch analytische Fortsetzung erweist sich die Gültigkeit der Mehlerschen Formel für alle $|t| < 1$.

§ 3.

Ein Integral.

Zur Herleitung der entsprechenden erzeugenden Funktion der Hermite'schen Polynome von n Veränderlichen wird die der Gleichung (7) entsprechende Integralformel für n Dimensionen gebraucht. Zu ihrer Herleitung soll zunächst eine kleine Bemerkung über quadratische Formen gemacht werden.

Es sei

$$\varphi(x, x) = \sum_{i, k}^{1, n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

eine n -äre quadratische Form mit nichtverschwindender Determinante

$$\Delta = |a_{ik}| \neq 0,$$

und

$$\psi(x, x) = \sum_{i, k}^{1, n} \frac{A_{ik}}{\Delta} x_i x_k$$

ihre adjungierte Form, d. h. die A_{ik} seien die algebraischen Ergänzungen der a_{ik} . Dann wird der Ausdruck

$$\varphi(x, x) - 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i + \psi(c, c)$$

durch die Hauptachsentransformation der quadratischen Form $\varphi(x, x)$ ebenso wie $\varphi(x, x)$ selbst in eine Summe von Quadraten verwandelt.

Beweis: Da $\Delta \neq 0$ ist, so gibt es sicher Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, so daß

$$c_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \gamma_k \quad (i = 1, \dots, n),$$

also

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i, k}^{1, n} a_{ik} x_i \gamma_k = \varphi(x, \gamma),$$

und

$$\psi(c, c) = \sum_{i, k, r, s}^{1, n} \frac{A_{ik}}{\Delta} a_{ir} a_{ks} \gamma_r \gamma_s = \varphi(\gamma, \gamma)$$

ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \varphi(x, x) - 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i + \psi(c, c) \\ = \varphi(x, x) - 2 \varphi(x, \gamma) + \varphi(\gamma, \gamma) = \varphi(x - \gamma, x - \gamma), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wird durch die Hauptachsentransformation der quadratischen Form $\varphi(x, x)$ tatsächlich in eine Summe von Quadraten

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (x'_i - \gamma'_i)^2$$

verwandelt, wobei die α_i die charakteristischen Zahlen der Form $\varphi(x, x)$ sind, für die bekanntlich

$$(8) \quad \alpha_1 \dots \alpha_n = \Delta$$

gilt.

Nach dieser einfachen Bemerkung ist für eine *positiv definite* quadratische Form $\varphi(x, x)$ ⁶⁾

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x, x) + 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta}} e^{\psi(c, c)}.$$

Beweis. Da das Integral (9) absolut konvergiert, so darf die der Hauptachsentransformation von $\varphi(x, x)$ entsprechende inhaltstreue Variablenänderung durchgeführt werden, und diese ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\varphi(x, x) + 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i - \psi(c, c) \right\} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \alpha_i (x'_i - \gamma'_i)^2 \right\} dx'_1 \dots dx'_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{\alpha_1 \dots \alpha_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta}}, \end{aligned}$$

da das Integral in dem Raum der $x'_1, \dots, x'_n$ in das Produkt von n einfachen Integralen zerfällt, deren jedes elementar berechnet werden kann.

§ 4.

Die Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel auf n Dimensionen.

Die Hermiteschen Polynome von n Veränderlichen werden durch eine positiv definite quadratische Form $\varphi(x, x)$ in folgender Weise erzeugt⁷⁾:

$$\sum \frac{h_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{h_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = e^{h_1 \xi_1 + \dots + h_n \xi_n - \frac{1}{2} \varphi(h, h)}$$

Die Summation ist wie in allen ähnlichen Summen in diesem Abschnitt über alle nichtnegativen Werte der Zeiger $m_1, \dots, m_n$ zu erstrecken, und es ist

$$\xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x, x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad \eta_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(y, y)}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

⁶⁾ Vgl. auch A.-K., S. 376.

⁷⁾ Vgl. A.-K., S. 364, Gleichung (4).

Die erzeugende Funktion für die Produkte solcher Polynome wird nun genau so wie im Falle der Hermiteschen Polynome von einer Veränderlichen gebildet:

$$(10) \quad \sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) H_{m_1, \dots, m_n}(y_1, \dots, y_n) \\ = \frac{1}{\pi^n t_1 \dots t_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \sum_{r=1}^n \left[\frac{u_r^2 + v_r^2}{t_r} - (u_r + i v_r) \xi_r - (u_r - i v_r) \eta_r \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi(u + i v, u + i v) - \frac{1}{2} \varphi(u - i v, u - i v) \right\} du_1 dv_1 \dots du_n dv_n.$$

Das $2n$ -fache Integral konvergiert für hinreichend kleine positiv reelle t_r sicher absolut und zerfällt in das Produkt zweier n -facher Integrale. Zu deren bequemeren Berechnung werden die beiden bei hinreichend kleinen positiven Werten der t_r sicher positiv definiten quadratischen Formen

$$\varphi_1(x, x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{t_i} + \varphi(x, x) \quad \text{und} \quad \varphi_2(x, x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{t_i} - \varphi(x, x)$$

eingeführt, deren Determinanten mit Δ_1 bzw. Δ_2 , und die zu ihnen adjungierten Formen mit $\psi_1(x, x)$ und $\psi_2(x, x)$ bezeichnet werden mögen. Die rechte Seite von (9) geht dann über in

$$\frac{1}{\pi^n t_1 \dots t_n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \varphi_1(u, u) + \sum_{r=1}^n (\xi_r + \eta_r) u_r \right\} du_1 \dots du_n \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \varphi_2(v, v) + i \sum_{r=1}^n (\xi_r - \eta_r) v_r \right\} dv_1 \dots dv_n.$$

Die beiden hier auftretenden n -fachen Integrale können nach (9) ausgerechnet werden und ergeben die Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel

$$(11) \quad \sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) H_{m_1, \dots, m_n}(y_1, \dots, y_n) \\ = \frac{1}{t_1 \dots t_n \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \psi_1(\xi + \eta, \xi + \eta) - \frac{1}{4} \psi_2(\xi - \eta, \xi - \eta) \right\}.$$

Die Formel gilt zunächst für hinreichend kleine positiv reelle Werte von $t_1, \dots, t_n$, für welche sowohl das $2n$ -fache Integral als auch die n -fache Summe in (10) absolut konvergieren. Durch analytische Fortsetzung läßt sich jedoch die Gültigkeit von (11) für komplexe t , auf das ganze Innere des

Bereiches absoluter Konvergenz der Reihe (11) ausdehnen. Dieser Bereich wird durch

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{|t_1|} - a_{11}, & -a_{12}, & \dots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & \frac{1}{|t_2|} - a_{22}, & \dots, & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \dots, & \frac{1}{|t_n|} - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

begrenzt.

Eine entsprechende Formel gilt auch für die zugeordneten Polynome $G_{m_1}, \dots, m_n(x_1, \dots, x_n)$, die auf Grund des bekannten Zusammenhanges zwischen den beiden Polynomsystemen (G) und (H) ⁸⁾ ohne weiteres angeschrieben werden kann.

§ 5.

Der Sonderfall $n = 2$.

Ein wichtiger und verhältnismäßig einfacher Sonderfall der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Formel bezieht sich auf die Polynome zweier Veränderlichen, deren erzeugende positiv definite quadratische Form in der Gestalt

$$\varphi(x, x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \quad (a > 0, b > 0, \Delta = ac - b^2 > 0)$$

geschrieben werden möge. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x, x) &= \left(\frac{1}{t_1} \pm a\right)x_1^2 \pm 2bx_1x_2 + \left(\frac{1}{t_2} \pm c\right)x_2^2, \\ \Delta_{1,2} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1} \pm a, & \pm b \\ \pm b & \frac{1}{t_2} \pm c \end{vmatrix} = \frac{1}{t_1 t_2} \pm \left(\frac{a}{t_2} + \frac{c}{t_1}\right) + \Delta, \end{aligned}$$

wobei für $\varphi_1(x, x)$ stets die oberen und für $\varphi_2(x, x)$ stets die unteren Vorzeichen zu nehmen sind. Daher ist

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(x, x) &= \frac{\left(\frac{1}{t_2} \pm c\right)x_1^2 \mp 2bx_1x_2 + \left(\frac{1}{t_1} \pm a\right)x_2^2}{\frac{1}{t_1 t_2} \pm \left(\frac{a}{t_2} + \frac{c}{t_1}\right) + \Delta} \\ &= \frac{t_1(1 \pm ct_2)x_1^2 \mp 2bt_1t_2x_1x_2 + t_2(1 \pm at_1)x_2^2}{1 \pm (at_1 + ct_2) + t_1t_2\Delta}, \end{aligned}$$

⁸⁾ Vgl. A.-K., S. 365.

und es ergibt sich

$$(13) \quad \sum_{m,n} \frac{t_1^m}{m!} \frac{t_2^n}{n!} H_{m,n}(x_1, x_2) H_{m,n}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{(1+t_1 t_2 \Delta)^2 - (a t_1 + c t_2)^2}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{t_1(1+ct_2)(\xi_1+\eta_1)^2 - 2bt_1 t_2(\xi_1+\eta_1)(\xi_2+\eta_2) + t_2(1+at_1)(\xi_2+\eta_2)^2}{1+(at_1+ct_2)+t_1 t_2 \Delta} - \frac{1}{4} \frac{t_1(1-ct_2)(\xi_1-\eta_1)^2 + 2bt_1 t_2(\xi_1-\eta_1)(\xi_2-\eta_2) + t_2(1-at_1)(\xi_2-\eta_2)^2}{1-(at_1+ct_2)+t_1 t_2 \Delta} \right\},$$

vorausgesetzt, daß die Beträge der komplexen Veränderlichen t_1, t_2 in dem den Nullpunkt enthaltenden und nach (12) durch die Hyperbel

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{|t_1|} - a, & -b \\ -b, & \frac{1}{|t_2|} - c \end{vmatrix} = 0$$

begrenzten Teil der $|t_1|, |t_2|$ -Viertelebene liegen. (13) wurde für reelle Veränderliche t_1, t_2 von Koschmieder⁹⁾ auf etwas anderem Wege hergeleitet.

§ 6.

Die gemischte Reihe¹⁰⁾.

Die den Polynomen H zugeordneten Polynome G werden durch die erzeugende Funktion¹¹⁾

$$\sum \frac{h_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{h_n^{m_n}}{m_n!} G_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = e^{h_1 x_1 + \dots + h_n x_n - \frac{1}{2} \psi(h, h)}$$

erklärt. Daher ergibt sich genau wie in § 4:

$$(14) \quad \sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) G_{m_1, \dots, m_n}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\pi^n t_1 \dots t_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \sum_{v=1}^n \left[\frac{u_v^2 + v_v^2}{t_v} - (u_v + i v_v) \xi_v - (u_v - i v_v) y_v \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi(u + i v, u + i v) - \frac{1}{2} \varphi(u - i v, u - i v) \right\} du_1 dv_1 \dots du_n dv_n.$$

⁹⁾ l. c., Gleichung (11).
¹⁰⁾ Zusatz am 3. Mai 1938.
¹¹⁾ A.-K., S. 364.

Das $2n$ -fache Integral konvergiert für hinreichend kleine positiv reelle t , sicher absolut. Der Ausdruck

$$\Phi(w, w) = \sum_{r=1}^n \frac{u_r^2 + v_r^2}{t_r} + \frac{1}{2} \varphi(u + iv, u + iv) + \frac{1}{2} \psi(u - iv, u - iv)$$

stellt eine quadratische Form der $2n$ Veränderlichen

$$w_1 = u_1, \dots, w_n = u_n, w_{n+1} = v_1, \dots, w_{2n} = v_n$$

dar; Δ' sei die Determinante dieser quadratischen Form, $\Psi(w, w)$ die ihr adjungierte Form. Ferner werde

$$z_1 = \xi_1 + y_1, \dots, z_n = \xi_n + y_n, z_{n+1} = i(\xi_1 - y_1), \dots, z_{2n} = i(\xi_n - y_n)$$

gesetzt. Mit diesen Bezeichnungen ergibt das auf der rechten Seite von (14) stehende $2n$ -fache Integral nach (9):

$$(15) \quad \sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) G_{m_1, \dots, m_n}(y_1, \dots, y_n) \\ = \frac{1}{t_1 \dots t_n \sqrt{\Delta'}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \Psi(z, z) \right\}.$$

Ähnlich wie (11) gilt auch diese Beziehung in dem ganzen Bereich absoluter Konvergenz der auf der linken Seite von (15) auftretenden Reihe. Dieser Bereich ist der den Nullpunkt enthaltende und durch $\Delta' = 0$ begrenzte Teil des „absoluten Raumes“ der $|t_r|$.

Für $n = 1$ ergibt auch (15) die Mehlersche Formel (2), für $n = 2$ die von Koschmieder¹²⁾ für reelle $t_{1,2}$ auf etwas anderem Wege hergeleitete erzeugende Funktion.

Mit Rücksicht auf die bekannte Biorthogonalitätsbeziehung¹³⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \varphi(y, y)} H_{q_1, \dots, q_n}(y_1, \dots, y_n) G_{m_1, \dots, m_n}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \\ \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{wenn nicht alle } m_j = q_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{\Delta}} m_1! \dots m_n! & \text{wenn } m_1 = q_1, \dots, m_n = q_n, \end{array} \right.$$

folgt aus (15) sofort, daß $H_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$ die zum Eigenwerte

$$t_1^{-m_1-1} \dots t_n^{-m_n-1}$$

¹²⁾ L. Koschmieder, Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt. Math. Zeitschr. 43 (1938), S. 783—792; Gleichung (15).

¹³⁾ A.-K., S. 369.

gehörende Eigenfunktion des Kernes

$$(16) \quad (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \sqrt{\frac{A}{A'}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varphi(y, y) + \frac{1}{4} \Psi(z, z) \right\}$$

ist. Eine entsprechende Integralgleichung gilt auch für die Polynome $G_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Für $n = 1$ ergibt sich aus (16) der von W. Myller Lebedeff¹⁴⁾ angegebene Kern der Hermiteschen Polynome einer Veränderlichen, für $n = 2$ der von Koschmieder aufgefundene Kern¹⁵⁾ der entsprechenden Polynome zweier Veränderlichen.

Auf eine wichtige Anwendung dieses Kernes beim Entwicklungsproblem hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

¹⁴⁾ W. Myller Lebedeff, Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Math. Annalen 64 (1907), S. 388; vgl. auch A.-K., S. 352, Gleichung (48).

¹⁵⁾ l. c. Anmerkung ¹²⁾, Gleichung (26).

(Eingegangen am 2. Dezember 1937.)

Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist.

Von

Alfred Brauer in Berlin.

Einleitung.

Im folgenden werden nur Mengen positiver ganzer Zahlen betrachtet. Ist A eine solche Menge, so sei $A(n)$ die Anzahl der Elemente a aus A , für die $a \leq n$ ist. Die untere Grenze der Quotienten $\frac{A(n)}{n}$ heißt nach Schnirelmann die Dichte α von A ; es ist $0 \leq \alpha \leq 1$. Ist B eine zweite Menge, so versteht man unter der Summe $A + B$ die Menge aller positiven Zahlen der Form $e_1 a + e_2 b$, wo a die Elemente von A und b die von B durchläuft und e_1 und e_2 die Werte 0 und 1 annehmen.

Die Dichte der Summe zweier Mengen ist in neuerer Zeit viel untersucht worden, einerseits für den Fall, daß beide Mengen eine positive Dichte haben¹⁾, andererseits für den Fall, daß mindestens eine der Mengen eine positive Dichte hat.

Im letzteren Fall wies Herr A. Khintchine²⁾ darauf hin, daß zwar im allgemeinen die Summe einer Menge mit positiver Dichte α und einer Menge der Dichte 0 keine größere Dichte als α hat, daß dies aber gilt, wenn die zweite Menge speziell die Menge der Quadratzahlen ist, indem er folgenden Satz bewies:

Ist A eine beliebige Menge mit positiver Dichte $\alpha < 1$ und B die Menge der Quadratzahlen, so ist die Dichte γ von $A + B$

$$\gamma \geq \alpha \{1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} (1 - \alpha)^2\}.$$

Diese Abschätzung wurde von Herrn A. Buchstab³⁾ zu

$$\gamma \geq \alpha \{1 + 10^{-8} (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}\}$$

¹⁾ Vgl. hierzu etwa A. Brauer, Über die Dichte der Summe von Mengen positiver ganzer Zahlen I, *Annals of Mathematics* **39** (1933).

²⁾ Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, *Matematitscheskij Sbornik* **40** (1933), S. 180–189.

³⁾ Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, ebenda S. 190–195.

verschärft. Herr P. Erdős⁴⁾ verbesserte diese Abschätzung noch weiter und zeigte, daß zahlreiche Mengen dieselbe Eigenschaft wie die Menge der Quadratzahlen haben, indem er folgenden Satz bewies:

Hat A die Dichte $\alpha > 0$ und hat B die Eigenschaft, daß sich jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens l Zahlen aus B darstellen läßt, so ist die Dichte γ von $A + B$

$$(1) \quad \gamma \geq \alpha \left(1 + \frac{1-\alpha}{2l}\right).$$

Da sich jede ganze Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten darstellen läßt, kann $l = 4$ gewählt werden, falls B die Menge der Quadratzahlen ist.

Die Abschätzung (1) gilt auch, wenn man statt der Summe $A + B$ nur diejenige Teilmenge betrachtet, die aus der Gesamtheit der Zahlen

$$a + e_2 b \quad (a < A, b < B; \quad e_2 = 0,1)$$

besteht. Endlich hat E. Landau in seinem soeben erschienenen Buche⁵⁾ gezeigt, daß (1) ebenfalls gilt, wenn l durch λ ersetzt wird, wo λ folgendermaßen definiert ist: Die Menge B enthalte die Zahl 1, dann ist jede ganze Zahl als Summe von Elementen aus B darstellbar; für jedes m sei $g(m)$ die Minimalanzahl der Summanden aller solchen Darstellungen von m . Dann gelte für jedes n

$$\sum_{m=1}^n g(m) \leq \lambda n.$$

Im Anschluß hieran zeigt Landau, daß für die Menge der Quadratzahlen $\lambda = \frac{19}{6}$ gewählt werden kann.

Im folgenden sollen diese Resultate noch weiter verschärft werden, indem ich den folgenden Satz beweise:

Satz 1. *Es sei A eine Menge mit der Dichte $0 < \alpha < 1$ und B eine Menge, die die Zahl 1 enthält. Für jede positive ganze Zahl m sei $g(m)$ die Minimalanzahl der Summanden in den Darstellungen von m als Summe von Elementen aus B . Läßt sich dann eine von n unabhängige Konstante λ so angeben, daß für alle n*

$$(2) \quad \sum_{m=1}^n g(m) \leq \lambda n$$

gilt, so ist, wenn γ die Dichte der Summe $A + B$ und γ' die Dichte der von den Zahlen

$$(3) \quad a + e_2 b \quad (a < A, b < B; \quad e_2 = 0,1)$$

⁴⁾ On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, *Acta Arithmetica* **1** (1936), S. 197–200.

⁵⁾ Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge (1937), S. 3–6 und 60–63.

gebildeten Menge ist,

$$(4) \quad \gamma \geq \gamma' > \alpha \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda} \right).$$

Diese Abschätzung ist schärfer als (1), denn es ist wegen $\alpha < 1$

$$1 - \sqrt{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{2} + \frac{(1 - \sqrt{\alpha})^2}{2} > \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Ist B speziell die Menge der Quadratzahlen, so folgt aus Satz 1 in Verbindung mit dem oben erwähnten Landauschen Resultat:

Satz 2. Ist A eine Menge mit positiver Dichte $\alpha < 1$ und B die Menge der Quadratzahlen, so gilt, wenn γ die Dichte der Summe $A + B$ und γ' die Dichte der von den Zahlen

$$a + e_2 b \quad (a < A, b < B; e_2 = 0,1)$$

gebildeten Menge ist,

$$\gamma \geq \gamma' > \alpha \left\{ 1 + \frac{6(1 - \sqrt{\alpha})}{19} \right\}.$$

Bezeichnet man die von den Zahlen (3) gebildete Menge mit S , so ist zum Beweise von (4) zu zeigen, daß für jede positive ganze Zahl n

$$(5) \quad S(n) > \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda} \right)$$

ist. Der Beweis hierfür wird in mehreren Schritten erbracht werden. In § 1 wird gezeigt, daß (5) für kleine Werte von n erfüllt ist. Für die übrigen Werte von n wird in § 2 durch Verfeinerung der Landauschen Beweismethode zunächst folgendes bewiesen: Ist die positive Zahl μ so bestimmt, daß

$$\sum_{m=1}^{n-\mu n} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \frac{\alpha \mu n}{2}$$

gilt, so ist

$$S(n) > \alpha n \left\{ 1 + \frac{1 - \alpha - \mu^2}{2\lambda(1 - \mu)} \right\}.$$

Für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ geht diese Abschätzung in (5) über. Man hat daher nur noch zu zeigen, daß $1 - \sqrt{\alpha}$ der über μ gemachten Voraussetzung genügt. Dies geschieht in § 4 auf Grund einiger Hilfssätze über Summen der Form

$$\sum_{m=1}^2 \{A(n-m) - \alpha(n-m)\},$$

die in § 3 bewiesen werden.

§ 1.

1. Gehören für einen Wert n die Zahlen $1, 2, \dots, n$ sämtlich zu A , also auch zu S , so ist, da wegen (2) $\lambda \geq 1$ ist,

$S(n) = n = \alpha n + (1 - \alpha)n > \alpha n + (1 - \sqrt{\alpha})n > \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda} \right);$
daher ist in diesem Falle (5) erfüllt.

Es gehöre also mindestens eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$ nicht zu A . Ist u die kleinste dieser Zahlen, so gehört $u - 1$ zu A und u gehört zu S , da 1 ein Element von B war. Mindestens eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$, nämlich u , gehört also zu S , aber nicht zu A . Folglich ist

$$S(n) \geq A(n) + 1 \geq \alpha n + 1 = \alpha n \left(1 + \frac{1}{\alpha n}\right).$$

Die Behauptung (5) ist daher für alle diejenigen Werte von n bewiesen, für die

$$1 + \frac{1}{\alpha n} > 1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda},$$

also

$$n < \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$$

ist. Daher genügt es, im folgenden

$$(6) \quad n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$$

vorauszusetzen.

2. Die Elemente von B seien

$$1 < b_1 < b_2 < \dots$$

Wäre $b_1 > 2\lambda$, so müßten bei der Darstellung der Zahlen $1, 2, \dots, 2\lambda$ als Summen von Elementen aus B sämtliche Summanden gleich 1 sein. Dann wäre

$$\sum_{m=1}^{2\lambda} g(m) = \sum_{v=1}^{2\lambda} v = \frac{2\lambda(2\lambda+1)}{2} > 2\lambda^2.$$

Dies steht im Widerspruch zu (2) für $n = 2\lambda$. Daher ist

$$(7) \quad b_1 \leq 2\lambda.$$

Ist ferner speziell $b_1 = 2$, so muß $b_2 \leq 4\lambda$ sein. Anderenfalls könnten bei der Darstellung der Zahlen $1, 2, \dots, 4\lambda$ als Summen von Elementen aus B nur die Summanden 1 und 2 auftreten. Hierbei wäre für eine gerade Zahl $2k$ die Minimalanzahl der erforderlichen Summanden gleich k und für die ungerade Zahl $2k - 1$ ebenfalls gleich k . Daher wäre

$$\sum_{m=1}^{4\lambda} g(m) = 2 \sum_{v=1}^{2\lambda} v = 2\lambda(2\lambda+1) > 4\lambda^2$$

im Widerspruch zu (2) für $n = 4\lambda$. Also ist

$$(8) \quad b_2 \leq 4\lambda \quad \text{für} \quad b_1 = 2.$$

3. Für das Folgende wird es notwendig sein, den Beweis von (5), ebenso wie im bereits oben erledigten Falle $n < \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$, auch für den Fall

$$\frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \leq n < \frac{3\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \quad \text{für} \quad \alpha < \frac{1}{4}$$

gesondert zu führen. Dies soll nun geschehen. Es sei also

$$(9) \quad \alpha < \frac{1}{4}.$$

Ist für einen Wert von n

$$A(n) > \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right),$$

so ist erst recht

$$S(n) > \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right),$$

und (5) ist für diesen Wert von n bewiesen. Es sei also

$$(10) \quad A(n) \leq \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right).$$

Im Intervall $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ sind die Funktionen $\alpha(2 - \sqrt{\alpha})$ und $\alpha(1 - \sqrt{\alpha})$ monoton wachsend, daher folgt aus (9) und (10) wegen $\lambda \geq 1$

$$(11) \quad A(n) \leq \alpha n(2 - \sqrt{\alpha}) < \frac{n}{4} \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}n.$$

Andererseits ist wegen (6)

$$(12) \quad n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} > 8\lambda.$$

Ist nun (5) für eine feste Zahl n schon bewiesen und ist $n + 1$ ein Element von A , so ist

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + 1 = S(n) + S(1) > \alpha \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right)n + \alpha \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right)(n+1). \end{aligned}$$

Es gilt also (5) erst recht für $n + 1$. Daher folgt induktiv, daß man (5) nur für solche Zahlen n zu beweisen braucht, die nicht zu A gehören.

4. Unter einer Lücke der Länge k in der Menge A möge eine Folge ganzer Zahlen

$$h, h+1, h+2, \dots, h+k-1$$

verstanden werden, die sämtlich nicht zu A gehören, während die beiden Zahlen $h-1$ und $h+k$ Elemente von A sind.

Es gehöre n nicht zu A . Wegen (11) treten in A unterhalb n sicher Lücken auf. Gibt es nun mindestens zwei solche Lücken, deren erste Elemente u_1 bzw. u_2 den Bedingungen $u_1 \leq n$ und $u_2 \leq n$ genügen, so gehören, da $u_1 - 1$ und $u_2 - 1$ Elemente von A und 1 Element von B ist, u_1 und u_2 zu S , aber nicht zu A . Daher ist in diesem Falle

$$(13) \quad S(n) \geq A(n) + 2 \geq \alpha n + 2.$$

Gibt es aber in A nur eine Lücke, deren erstes Element $u_1 \leq n$ ist, so gehören, da n nicht zu A gehört, die Zahlen $u_1, u_1 + 1, \dots, n$ sämtlich nicht zu A ; daher ist wegen (11)

$$u_1 - 1 = A(n) < \frac{8}{8} n.$$

Folglich ist wegen (7) und (12)

$$u_1 - 1 + b_1 < \frac{3}{8} n + 2\lambda < \frac{3}{8} n + \frac{1}{4} n < n.$$

Daher gehören die beiden Zahlen u_1 und $u_1 - 1 + b_1$ zu S , aber nicht zu A . Also gilt (13) auch in diesem Falle.

Aus (13) folgt aber, daß die Behauptung (5) unter den Voraussetzungen (6) und (9) bewiesen ist, wenn

$$\alpha n + 2 > \alpha n + \frac{\alpha n (1 - \sqrt{\alpha})}{\lambda}$$

ist, wenn also

$$\frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \leq n < \frac{2\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \quad \text{für } \alpha < \frac{1}{4}$$

ist.

5. Es sei nun

$$(14) \quad n \geq \frac{2\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \quad \text{für } \alpha < \frac{1}{4}.$$

Dann ist wegen (9)

$$(15) \quad n > \frac{2\lambda}{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2})} = 16\lambda \geq 16.$$

Nun seien wieder u_1 bzw. u_2 bzw. u_3 die ersten Elemente der ersten drei Lücken von A , und es sei $u_1 < u_2 < u_3$.

Ist dann

$$(16) \quad u_3 \leq n,$$

so gehören u_1, u_2 und u_3 zu S , aber nicht zu A . Daher ist

$$(17) \quad S(n) \geq \alpha n + 3.$$

Ist aber

$$(18) \quad u_2 \leq n < u_3,$$

so ist wegen (11) die Gesamtzahl der unterhalb n liegenden Zahlen der ersten beiden Lücken größer als $\frac{n}{2}$, folglich liegen in mindestens einer von ihnen mehr als $\frac{n}{4}$ Zahlen unterhalb n ; ist dies etwa die zweite Lücke, so ist also die Zahl $u_2 - 1 + \left[\frac{n}{4}\right]$ ein unterhalb n gelegenes Element dieser Lücke. Andererseits ist wegen (7) und (15)

$$u_2 - 1 + b_1 \leq u_2 - 1 + 2\lambda < u_2 - 1 + \frac{n}{8} < u_2 - 1 + \left[\frac{n}{4}\right] < n.$$

Daher ist auch $u_2 - 1 + b_1$ ein unterhalb n gelegenes Element der zweiten Lücke, gehört also nicht zu A , aber zu S . Ferner sind u_1 , u_2 und $u_2 - 1 + b_1$ drei verschiedene Elemente, die zu S , aber nicht zu A gehören. Folglich gilt (17) auch hier.

Analog schließt man, wenn die erste Lücke die größere ist.

Ist endlich

$$(19) \quad u_1 \leq n < u_2,$$

so liegt unterhalb n nur eine Lücke, deren Länge wegen (11) und (15) größer als 8λ ist. Andererseits folgt aus (14)

$$\alpha n \geq \frac{2\lambda}{1 - \sqrt{\alpha}} > 2\lambda \geq 2;$$

also liegt in A unterhalb n mehr als ein Element. Da unterhalb n nur eine Lücke lag, kann diese also nicht mit 2 beginnen. Folglich ist

$$(20) \quad u_1 > 2.$$

Ferner folgt aus (7) und (8), daß in B mindestens ein Element b existiert, für das

$$(21) \quad 3 \leq b \leq 4\lambda$$

ist. Da die Länge der Lücke größer als 8λ war, ist also

$$u_1 - 1 + b \leq u_1 - 1 + 4\lambda < u_1 - 1 + 8\lambda < n.$$

Daher sind die drei Zahlen

$$u_1, \quad u_1 - 2 + b, \quad u_1 - 1 + b,$$

die wegen (21) voneinander verschieden sind, Zahlen der Lücke, gehören folglich nicht zu A ; sie gehören aber sämtlich zu S , da $u_1 - 2$ wegen (20) ein Element von A ist. Folglich gilt (17) auch hier.

Da sich also (17) in den drei Fällen (16), (18) und (19) ergeben hat, gilt (17) stets, denn $u_1 > n$ ist wegen (11) wieder unmöglich. Aus (17) folgt aber die Richtigkeit von (5) unter den Voraussetzungen (14) und (9) für

$$\frac{2\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \leq n < \frac{3\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}.$$

In Verbindung mit 1. und 4. liefert dies die Richtigkeit von (5) im Falle

$$(22) \quad n < \frac{3\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} \quad \text{für } \alpha < \frac{1}{4}.$$

§ 2.

6. Der Beweis der Behauptung (5) für kleine Werte von n wurde vorweggenommen, weil die jetzt zu entwickelnde allgemeine Methode bei ihnen versagt. Es sei jetzt wieder α beliebig, also

$$0 < \alpha < 1.$$

Wegen 1. kann

$$(23) \quad n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}$$

vorausgesetzt werden.

Wählt man nun für jedes α eine Zahl $\mu = \mu(\alpha)$ so, daß

$$(24) \quad 0 < \mu \leq 1 - \sqrt{\alpha}$$

ist, so ist wegen (23)

$$[n(1-\mu)] \geq \left[\frac{\lambda\sqrt{\alpha}}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})} \right] = \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}-\alpha} \right].$$

Da $\sqrt{\alpha}-\alpha$ sein Maximum für $\alpha = \frac{1}{4}$ annimmt, ist daher

$$(25) \quad [n(1-\mu)] \geq [4\lambda] \geq 4.$$

Wir behaupten nun:

Ist μ so gewählt, daß für alle $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}$

$$(26) \quad \sum_{m=1}^{[n-\mu n]} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \frac{\alpha\mu n}{2}$$

ist, so ist

$$(27) \quad S(n) > \alpha n \left\{ 1 + \frac{1-\alpha-\mu^2}{2\lambda(1-\mu)} \right\} \quad \text{für } n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}.$$

Wegen (25) durchläuft m in der Summe auf der linken Seite von (26) mindestens vier Werte.

Für $\mu = 0$ ist (26) erfüllt; in diesem Falle geht die rechte Seite von (27) in die Landausche Abschätzung über. Da

$$\varphi(\mu) = \frac{1-\alpha-\mu^2}{2\lambda(1-\mu)}$$

im Intervall $0 \leq \mu \leq 1 - \sqrt{\alpha}$ monoton wächst, liefert jeder von 0 verschiedene Wert von μ eine bessere Abschätzung als das Landausche Resultat. Es wird sich ergeben, daß auch für den günstigsten Wert $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ des Intervalls (24) die Voraussetzung (26) erfüllt ist und daher (27) gilt. Da ferner $\varphi(\mu)$ im Intervall $0 \leq \mu \leq 1$ seinen größten Wert für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ annimmt, genügt es, μ auf das Intervall (24) zu beschränken.

7. Wir führen nun den Beweis von (27). Es sei n fest gegeben. Für jedes ganzzahlige positive $m < n$ betrachte man diejenigen Zahlen a aus A , für die $a \leq n-m$ ist; ihre Anzahl ist

$$A(n-m) \geq \alpha(n-m).$$

Es sei $D(m)$ die Anzahl derjenigen dieser Zahlen a , für die $a+m$ nicht zu A gehört, und $E(m)$ die Anzahl der übrigen Zahlen $a \leq n-m$. Dann ist also

$$(28) \quad D(m) + E(m) = A(n-m) \geq \alpha(n-m).$$

Nach der über die Menge B gemachten Voraussetzung läßt sich m als Summe von $g(m)$ Elementen aus B darstellen. Es sei etwa

$$m = b_1 + b_2 + \dots + b_{g(m)}$$

eine solche Darstellung. Ist nun $a \leq n - m$ ein solches Element von A , daß $a + m$ nicht zu A gehört, so muß unter den Zahlen

$$(29) \quad a, \quad a + b_1, \quad a + b_1 + b_2, \quad \dots, \quad a + b_1 + b_2 + \dots + b_{g(m)}$$

mindestens eine auftreten, die nicht zu A gehört, während die vorhergehende ein Element von A ist; denn die erste der Zahlen (29) gehört zu A , die letzte aber nicht. Es möge etwa

$$a' = a + \sum_{v=1}^{f-1} b_v \quad (f \leq g(m))$$

zu A gehören, aber

$$a' + b_f = a + \sum_{v=1}^f b_v$$

nicht zu A gehören. Da a' zu A gehört, gehört $a' + b_f$ zu S , aber nicht zu A .

Für einen festen Wert von f können daher höchstens $S(n) - A(n)$ verschiedene Werte von $a' + b_f$ auftreten. Für f kommen höchstens $g(m)$ Werte in Betracht. Daher gibt es höchstens $g(m) \{S(n) - A(n)\}$ verschiedene Werte $a' + b_f$ und folglich höchstens $g(m) \{S(n) - A(n)\}$ Elemente a , für die $a + m \leq n$ ist und nicht zu A gehört. Also ist

$$D(m) \leq g(m) \{S(n) - A(n)\}.$$

Aus (28) folgt daher

$$(30) \quad E(m) \geq A(n - m) - g(m) \{S(n) - A(n)\}.$$

Man setze nun

$$(31) \quad [n - \mu n] = z,$$

dann ist wegen (25)

$$z \geq 4.$$

Bildet man daher (30) für $m = 1, 2, \dots, z$ und addiert, so erhält man wegen (2)

$$(32) \quad \sum_{m=1}^z E(m) \geq \sum_{m=1}^z A(n - m) - \{S(n) - A(n)\} \left\{ \sum_{m=1}^z g(m) \right\} \\ \geq \sum_{m=1}^z A(n - m) - \lambda z \{S(n) - A(n)\}.$$

Ferner ist sicher

$$(33) \quad E(m) \geq 0.$$

Aus (32) und (33) folgt daher

$$(34) \quad \sum_{m=1}^{n-1} E(m) = \sum_{m=1}^z E(m) + \sum_{m=z+1}^{n-1} E(m) \geq \sum_{m=1}^z A(n - m) - \lambda z \{S(n) - A(n)\}.$$

Sind ferner a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus A mit $a_1 < a_2 \leq n$, so ist a_1 bei $E(a_2 - a_1)$ zu zählen, da

$$a_1 + (a_2 - a_1) = a_2$$

ist; umgekehrt ist jedes Element a_1 in $\sum_{m=1}^{n-1} E(m)$ so oft gezählt, wie es Elemente a_2 mit $a_1 < a_2 \leq n$ gibt. Daher ist

$$(35) \quad \sum_{m=1}^{n-1} E(m) = \binom{A(n)}{2} = \frac{A^2(n) - A(n)}{2}.$$

Aus (34) und (35) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \frac{A^2(n)}{2} - \frac{A(n)}{2} &\geq \sum_{m=1}^z A(n-m) - \lambda z \{S(n) - A(n)\}, \\ \lambda z \{S(n) - A(n)\} &\geq \sum_{m=1}^z A(n-m) + \frac{A(n)}{2} - \frac{A^2(n)}{2} \\ &= \sum_{m=1}^z \alpha(n-m) + \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ &\quad + \left\{ \frac{A(n)}{2} - \frac{\alpha n}{2} \right\} + \frac{\alpha n}{2} - \frac{A^2(n)}{2} \\ &= \frac{z \{ \alpha(n-1) + \alpha(n-z) \}}{2} + \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} + \frac{\alpha n}{2} - \frac{A^2(n)}{2}. \end{aligned}$$

Nach (31) und (26) ist daher

$$(36) \quad 2 \lambda \{[n - \mu n]\} \{S(n) - A(n)\} \geq \alpha \{[n - \mu n]\} \{2n - 1 - [n - \mu n]\} + \alpha \mu n + \alpha n - A^2(n).$$

Man setze nun

$$[n - \mu n] = n - \mu n - \delta \quad (0 \leq \delta < 1);$$

dann folgt aus (36)

$$\begin{aligned} 2 \lambda (1 - \mu) n \{S(n) - A(n)\} \\ &\geq \alpha (n - \mu n - \delta) (n + \mu n + \delta - 1) + \alpha \mu n + \alpha n - A^2(n) \\ &= \alpha \{n^2 (1 - \mu^2) - 2 \mu n \delta + 2 \mu n + \delta - \delta^2\} - A^2(n). \end{aligned}$$

Wegen $\delta < 1$ ist daher

$$2 \lambda (1 - \mu) n \{S(n) - A(n)\} > \alpha n^2 (1 - \mu^2) - A^2(n).$$

Folglich ist

$$(37) \quad S(n) > \frac{\alpha n (1 - \mu^2)}{2 \lambda (1 - \mu)} - \frac{A^2(n)}{2 \lambda (1 - \mu) n} + A(n).$$

Ist nun für einen Wert von n

$$(38) \quad A(n) > \alpha n (2 - \sqrt{\alpha}),$$

so ist wegen $\lambda \geq 1$ und $S(n) \geq A(n)$

$$S(n) > \alpha n (2 - \sqrt{\alpha}) \geq \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right) = \alpha n \left\{1 + \frac{1 - \alpha - (1 - \sqrt{\alpha})^2}{2\lambda(1 - (1 - \sqrt{\alpha}))}\right\},$$

$$S(n) > \alpha n \left\{1 + \frac{1 - \alpha - \mu^2}{2\lambda(1 - \mu)}\right\},$$

da $\frac{1 - \alpha - \mu^2}{2\lambda(1 - \mu)}$ im Intervall $0 \leq \mu \leq 1$ seinen größten Wert für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ annimmt. Damit ist die Behauptung (27) für alle Werte von n , für die (38) gilt, bewiesen.

Es sei also

$$(39) \quad \alpha n \leq A(n) \leq \alpha n (2 - \sqrt{\alpha}).$$

Die Funktion

$$\psi(x) = x - \frac{x^2}{2\lambda(1 - \mu)n}$$

ist im Intervall $\alpha n \leq x \leq \alpha n (2 - \sqrt{\alpha})$ nach oben konvex, nimmt also ihren kleinsten Wert in diesem Intervall an einem der beiden Endpunkte an. Es wird nun behauptet, daß dies für den linken Endpunkt $x = \alpha n$ eintritt, daß also

$$(40) \quad \alpha n - \frac{\alpha^2 n^2}{2\lambda(1 - \mu)n} < 2\alpha n - \alpha n \sqrt{\alpha} - \frac{\alpha^2 n^2 (4 - 4\sqrt{\alpha} + \alpha)}{2\lambda(1 - \mu)n}$$

ist. Dies ist erfüllt, wenn

$$1 - \frac{\alpha}{2\lambda(1 - \mu)} < 2 - \sqrt{\alpha} - \frac{\alpha(4 - 4\sqrt{\alpha} + \alpha)}{2\lambda(1 - \mu)},$$

also wegen $\lambda \geq 1$ und (24) erst recht, wenn

$$1 - \sqrt{\alpha} > \frac{\alpha(3 - 4\sqrt{\alpha} + \alpha)}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}(1 - \sqrt{\alpha})(3 - \sqrt{\alpha})}{2},$$

$$1 > \frac{\sqrt{\alpha}(3 - \sqrt{\alpha})}{2}$$

ist. Dies gilt aber, da wegen $\alpha < 1$

$$2 - 3\sqrt{\alpha} + \alpha = (2 - \sqrt{\alpha})(1 - \sqrt{\alpha}) > 0$$

ist. Folglich gilt (40), und man darf auf der rechten Seite von (37) $A(n)$ durch αn ersetzen. Daher folgt aus (37)

$$S(n) > \frac{\alpha n(1 - \mu^2)}{2\lambda(1 - \mu)} - \frac{\alpha^2 n^2}{2\lambda(1 - \mu)n} + \alpha n = \alpha n \left\{1 + \frac{1 - \alpha - \mu^2}{2\lambda(1 - \mu)}\right\}.$$

Also ist (27) auch für die Werte von n bewiesen, für die (39) gilt. (27) gilt demnach stets, falls die Voraussetzung (26) erfüllt ist.

§ 3.

8. Es soll jetzt untersucht werden, wann die Voraussetzung (26) erfüllt ist. Hierzu beweisen wir vier Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei A eine Menge mit der Dichte $\alpha > 0$; dann ist für jedes positive ganzzahlige n*

$$A(n) - \alpha n + A(n+1) - \alpha(n+1) \geq \text{Min}(\alpha, 1 - \alpha).$$

Beweis. Ist t ein Element von A , so ist

$$A(t) = A(t-1) + 1.$$

Wegen

$$A(t-1) \geq \alpha(t-1)$$

ist daher

$$A(t) - \alpha t = A(t-1) + 1 - \alpha t \geq 1 - \alpha.$$

Ist also wenigstens eine der beiden Zahlen n oder $n+1$ ein Element von A , so ist erst recht

$$(41) \quad A(n) - \alpha n + A(n+1) - \alpha(n+1) \geq 1 - \alpha.$$

Gehören aber n und $n+1$ beide nicht zu A , so ist

$$A(n+1) = A(n).$$

Aus

$$A(n+1) \geq \alpha(n+1)$$

folgt daher auch

$$A(n) \geq \alpha(n+1).$$

Also ist

$$A(n) - \alpha n + A(n+1) - \alpha(n+1) \geq \alpha.$$

Hieraus und aus (41) ergibt sich die Behauptung.

9. Hilfssatz 2. *Ist A eine Menge mit der Dichte $\alpha > 0$, so ist für ganzzahliges n und z mit $n > z$*

$$\sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \frac{z}{2} \text{Min}(\alpha, 1 - \alpha).$$

Beweis. Ist z eine gerade Zahl, so fasse man in der Summe auf der linken Seite je zwei aufeinanderfolgende Glieder zusammen. Dann folgt aus Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ \geq \sum_{m=1}^{\frac{z}{2}} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \geq \frac{z}{2} \text{Min}(\alpha, 1 - \alpha). \end{aligned}$$

Dies liefert für gerades z die Behauptung.

Ist aber z ungerade, so folgt aus Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ = \sum_{m=2}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + A(n-1) - \alpha(n-1) + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ \geq \frac{z-1}{2} \text{Min}(\alpha, 1-\alpha) + \frac{1}{2} \{A(n-1) - \alpha(n-1) + A(n) - \alpha n\} \\ \geq \frac{z}{2} \text{Min}(\alpha, 1-\alpha). \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 2 auch für ungerades z bewiesen.

10. Für $\alpha < \frac{1}{3}$ soll Hilfssatz 2 noch ein wenig verschärft werden. Es gilt
Hilfssatz 3. Ist A eine Menge mit positiver Dichte $\alpha < \frac{1}{3}$, so ist für
ganzzahliges n und z mit $n > z \geq 4$

$$\sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \left(\frac{z}{2} + 1\right) \alpha.$$

Beweis. Ist eine der beiden Zahlen $n-z$ oder $n-z+1$ ein Element von A , so folgt aus (41) und $\alpha < \frac{1}{3}$

$A(n-z) - \alpha(n-z) + A(n-z+1) - \alpha(n-z+1) \geq 1 - \alpha > 2\alpha$
und nach Hilfssatz 1

$$A(n-z+2) - \alpha(n-z+2) + A(n-z+3) - \alpha(n-z+3) \geq \text{Min}(\alpha, 1-\alpha) = \alpha.$$

Also ist

$$(42) \quad \sum_{m=n-3}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} > 3\alpha.$$

Analog schließt man, wenn eine der beiden Zahlen $n-z+2$ oder $n-z+3$ ein Element von A ist. Auch dann gilt (42).

Gehören aber die vier Zahlen $n-z, n-z+1, n-z+2$ und $n-z+3$ sämtlich nicht zu A , so ist

$$A(n-z) = A(n-z+1) = A(n-z+2) = A(n-z+3) \geq \alpha(n-z+3).$$

Daher ist

$$\sum_{m=n-3}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \geq 3\alpha + 2\alpha + \alpha > 3\alpha.$$

Folglich gilt (42) stets. Wendet man nun Hilfssatz 2 für $z-4$ an, so folgt aus (42)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ = \sum_{m=1}^{z-4} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ + \sum_{m=n-3}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} > \frac{z-4}{2} \text{Min}(\alpha, 1-\alpha) + 3\alpha \\ = \left(\frac{z}{2} + 1\right) \alpha. \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

11. Hilfssatz 4. *Es sei A eine Menge mit positiver Dichte $\alpha < \frac{1}{4}$. Die ganze Zahl k sei so bestimmt, daß*

$$(43) \quad \frac{1}{k^2} > \alpha \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

ist. Ferner seien n und z ganze Zahlen, die der Bedingung

$$(44) \quad n > z \geq \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{\alpha} - \alpha} \right\rfloor$$

genügen. Dann ist

$$(45) \quad \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \geq (z+1)(k-1)\alpha.$$

Beweis. Wegen $\alpha < \frac{1}{4}$ folgt aus (43)

$$(46) \quad k \geq 2.$$

Für $k = 2$ ist nach (44)

$$(47) \quad z \geq \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{\alpha} - \alpha} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{3}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \right\rfloor = 12 > 3k + 2,$$

da $\sqrt{\alpha} - \alpha$ sein Maximum für $\alpha = \frac{1}{4}$ annimmt.

Für $k \geq 3$ ist nach (44) und (43)

$$(48) \quad \begin{aligned} z &\geq \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{\alpha} - \alpha} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{3}{\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k(k+1)^2}{k^2 + k + 1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{3k(k^2 + k + 1) + 3k^2}{k^2 + k + 1} \right\rfloor \geq 3k + 2. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (46), (47) und (48)

$$(49) \quad z \geq 3k + 2 \geq 2k + 4.$$

Es seien

$$t_1 < t_2 < \dots < t_r$$

die Gesamtheit der Elemente von A im abgeschlossenen Intervall

$$(50) \quad J = \{n - z, \quad n - z + 1, \dots, n - 1\}.$$

Dann ist

$$A(t_\varrho) = A(t_\varrho - 1) + 1 \geq \alpha(t_\varrho - 1) + 1 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r),$$

also wegen (43)

$$(51) \quad A(t_\varrho) - \alpha t_\varrho \geq 1 - \alpha > k^2 \alpha - \alpha = (k^2 - 1)\alpha.$$

Man bezeichne mit t_0 die größte Zahl aus A , die kleiner ist als t_1 und mit t_{r+1} die erste auf t_r folgende Zahl aus A . Für $t_1 = 1$ setze man $t_0 = 0$.

Die Zahlen

$$(52) \quad t_{\varrho-1} + 1, \quad t_{\varrho-1} + 2, \dots, t_\varrho - 1 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r+1)$$

gehören dann sämtlich nicht zu A . Für diejenigen Werte von ϱ , für die $t_{\varrho-1} + 1 = t_{\varrho}$ ist, möge unter der Menge der Zahlen (52) die leere Menge verstanden werden. Dann ist für $\varrho = 1, 2, \dots, r+1$

$$A(t_{\varrho-1} + 1) = \dots = A(t_{\varrho} - 1) \geq \alpha(t_{\varrho} - 1).$$

Hieraus folgt für $\tau = 1, 2, \dots, t_{\varrho} - t_{\varrho-1} - 1$

$$(53) \quad A(t_{\varrho} - \tau) - \alpha(t_{\varrho} - \tau) \geq \alpha(t_{\varrho} - 1) - \alpha(t_{\varrho} - \tau) = \alpha(\tau - 1).$$

Durchläuft nun u_v diejenigen der Zahlen (52), die im Intervall J liegen, so durchläuft es sicher alle nicht zu A gehörenden Zahlen von J . Da J nach (50) z Elemente enthält, von denen r zu A gehören, enthält J also $z - r$ Elemente u_v .

Aus (53) folgt nun, daß höchstens für solche Zahlen u_v

$$(54) \quad A(u_v) - \alpha u_v < \alpha$$

ist, für die in (53) $\tau = 1$ zu setzen ist, die also einem der Elemente t_{ϱ} unmittelbar vorangehen, ohne selbst Element von A zu sein. Es gibt also höchstens $r+1$ Zahlen u_v , die (54) genügen. Bezeichnet nun N_x die Anzahl der Zahlen u_v aus J , für die

$$(55) \quad A(u_v) - \alpha u_v < x\alpha \quad (x = 1, 2, \dots)$$

ist, so folgt aus (53), daß (55) höchstens für solche Zahlen u_v gilt, für die τ in (53) einen der Werte $1, 2, \dots, x$ annimmt; folglich ist

$$(56) \quad N_x \leq x(r+1).$$

Man denke sich nun für jedes x die N_x Elemente u_v nach wachsenden Differenzen $A(u_v) - \alpha u_v$ geordnet, d. h. man nehme zunächst die N_1 Elemente u_v , für die in (55) $x = 1$ gesetzt werden kann, für die also

$$0 \leq A(u_v) - \alpha u_v < \alpha$$

gilt, dann die $N_2 - N_1$ Elemente, für die in (55) $x = 2$ genommen werden kann, für die also

$$\alpha \leq A(u_v) - \alpha u_v < 2\alpha$$

ist, ..., schließlich die $N_x - N_{x-1}$ Elemente, für die

$$(57) \quad (x-1)\alpha \leq A(u_v) - \alpha u_v < x\alpha$$

gilt.

Es sei nun M eine nichtnegative ganze Zahl, $M \leq z - r$; man dividiere M durch $r+1$

$$M = p(r+1) + p_1 \quad (0 \leq p_1 < r+1).$$

Dann ist wegen (56) und (57) die über die ersten M Werte u_v erstreckte Summe

$$(58) \quad \sum_{v=1}^M \{A(u_v) - \alpha u_v\} \geq (r+1)\alpha\{0 + 1 + \dots + p-1\} + p p_1 \alpha.$$

Hierbei ist für $p = 0$ die rechte Seite und für $M = 0$ auch die linke Seite gleich Null zu setzen.

Speziell folgt für $M = N_{k-1}$, wenn man zur Abkürzung

$$(59) \quad N_{k-1} = N = q(r+1) + q_1 \quad (0 \leq q_1 < r+1)$$

setzt, aus (58) und (59)

$$(60) \quad \sum_{r=1}^N \{A(u_r) - \alpha u_r\} \geq (r+1)\alpha \{0+1+\dots+q-1\} + qq_1x.$$

Ferner folgt aus (56) für $x = k-1$ und aus (59)

$$(61) \quad q \leq k-1.$$

Aus (59), (60) und (61) erhält man nun durch Addition und Subtraktion von $(k-1)N\alpha$

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^N \{A(u_r) - \alpha u_r\} \\ & \geq (k-1)N\alpha + (r+1)\alpha \{0+1+\dots+q-1 - (k-1)q\} + qq_1\alpha - (k-1)q_1\alpha \\ & = (k-1)N\alpha - (r+1)\alpha \{k-1+k-2+\dots+(k-1-(q-1))\} - q_1\alpha(k-1-q) \\ & \geq (k-1)N\alpha - (r+1)\alpha \{k-1+k-2+\dots+k-1-q+1+k-1-q\} \\ & \geq (k-1)N\alpha - (r+1)\alpha \{k-1+k-2+\dots+0\}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(62) \quad \sum_{r=1}^N \{A(u_r) - \alpha u_r\} \geq (k-1)N\alpha - \frac{(r+1)(k-1)k\alpha}{2}.$$

Man muß nun drei Fälle unterscheiden:

1. Es sei $r > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (63) \quad & \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ & = \sum_{\varrho=1}^r \{A(t_\varrho) - \alpha t_\varrho\} + \sum_{r=1}^N \{A(u_r) - \alpha u_r\} + \sum_{r=N+1}^{z-r} \{A(u_r) - \alpha u_r\}. \end{aligned}$$

Hierbei können die beiden letzten Summen auch leer sein; für die Summanden der letzten Summe gilt wegen (57) und (59)

$$(64) \quad A(u_r) - \alpha u_r \geq (k-1)\alpha \quad (v = N+1, N+2, \dots, z-r).$$

Daher folgt aus (63), (51), (62) und (64)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ & \geq r(k^2-1)\alpha + N(k-1)\alpha - \frac{(r+1)(k-1)kx}{2} + (z-N-r)(k-1)\alpha \\ & = \alpha(k-1) \left\{ r(k+1) - \frac{(r+1)k}{2} + z-r \right\} \\ & = \alpha(k-1) \left\{ \frac{rk-k}{2} + z \right\} \geq \alpha(k-1)(z+1), \end{aligned}$$

da $r > 1$ und nach (46) auch $k > 1$ war. In diesem Falle ist also die Behauptung (45) bewiesen.

2. $r = 1$.

Wegen (49) ist

$$(65) \quad z - r = z - 1 \geq 2k + 3.$$

Daher ist

$$(66) \quad \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ = A(t_1) - \alpha t_1 + \sum_{v=1}^{2k+2} \{A(u_v) - \alpha u_v\} + \sum_{v=2k+3}^{z-r} \{A(u_v) - \alpha u_v\}.$$

Setzt man nun in (58)

$$M = 2k + 2,$$

so ist wegen $r = 1$

$$p = k + 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 0$$

zu setzen. Daher liefert (58) für die erste Summe auf der rechten Seite von (66)

$$(67) \quad \sum_{v=1}^{2k+2} \{A(u_v) - \alpha u_v\} \geq k(k+1)\alpha.$$

Ferner ist nach (56)

$$N_{k+1} \leq (k+1)(r+1) = 2k+2.$$

Also treten die ersten N_{k+1} der u_v in der ersten Summe auf der rechten Seite von (66) auf; für die Summanden der zweiten Summe gilt daher nach (57) für $x > k+1$

$$(68) \quad A(u_v) - \alpha u_v \geq (k+1)\alpha \quad (v \geq 2k+3).$$

Folglich ergibt sich aus (66) wegen (51), (67) und (68)

$$\sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \geq \alpha \{k^2 - 1 + k(k+1) + (z-r-2k-2)(k+1)\} \\ = \alpha \{(z-1)(k+1) - 3k-3\} = \alpha \{z(k-1) + 2z - 4k - 4\}.$$

Wegen (49) ist daher

$$\sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \geq \alpha \{z(k-1) + 2(3k+2) - 4k-4\} \\ = \alpha \{z(k-1) + 2k\} > \alpha(z+1)(k-1).$$

Also ist die Behauptung auch in diesem Falle bewiesen.

3. Endlich sei $r = 0$. Dann ist wegen (49)

$$(69) \quad \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} = \sum_{v=1}^{3k+2} \{A(u_v) - \alpha u_v\} + \sum_{v=3k+3}^z \{A(u_v) - \alpha u_v\}.$$

Hierbei kann die letzte Summe auch leer sein, während die erste Summe auf der rechten Seite $3k+2$ Glieder enthält. Setzt man daher

$$M = 3k + 2,$$

so ist in (58) wegen $r = 0$

$$p = 3k + 2, \quad p_1 = 0$$

zu setzen, und man erhält

$$(70) \quad \sum_{v=1}^{3k+2} \{A(u_v) - \alpha u_v\} \geq \alpha \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}.$$

Ferner ist nach (56) wegen $r = 0$

$$N_{3k+2} \leq 3k + 2.$$

Daher treten die ersten N_{3k+2} der u_v in der ersten Summe auf der rechten Seite von (69) auf; für die Summanden der zweiten Summe folgt aus (57) für $x > 3k + 2$

$$(71) \quad A(u_v) - \alpha u_v \geq (3k + 2)\alpha.$$

Aus (69) folgt wegen (70) und (71)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ & \geq \frac{(3k+1)(3k+2)\alpha}{2} + \alpha(3k+2)\{z - (3k+2)\} \\ & = \alpha \left\{ z(k-1) + z(2k+3) - (3k+2) \left(3k+2 - \frac{3k+1}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Daher ist wegen (49)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^z \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ & \geq \alpha \left\{ z(k-1) + (3k+2)(2k+3) - (3k+2) \left(3k+2 - \frac{3k+1}{2} \right) \right\} \\ & = \alpha \left\{ z(k-1) + (3k+2) \frac{k+3}{2} \right\} > \alpha \{z(k-1) + k-1\} = \alpha(z+1)(k-1). \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

§ 4.

12. Mit Hilfe der eben bewiesenen Hilfssätze soll nun gezeigt werden, daß die im § 2 für μ gemachte Voraussetzung (26) für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ erfüllt ist.

Es sei zunächst

$$\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Dann folgt aus Hilfssatz 2 für $z = [n - \mu n]$ wegen $n > z$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{[n-\mu n]} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \\ & \geq \frac{[n-\mu n]}{2} \text{Min}(\alpha, 1-\alpha) = \frac{[n-\mu n]}{2} (1-\alpha). \end{aligned}$$

Daher genügt es, zu zeigen, daß

$$(72) \quad \frac{(n - \mu n - 1)(1 - \alpha)}{2} \geq \frac{\alpha \mu n}{2}$$

für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ und $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$ erfüllt ist. Folglich hat man nur zu beweisen, daß

$$\begin{aligned} (n \sqrt{\alpha} - 1)(1 - \alpha) &\geq \alpha n (1 - \sqrt{\alpha}), \\ (n \sqrt{\alpha} - 1)(1 + \sqrt{\alpha}) &\geq \alpha n, \\ n \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha} - 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

ist, daß also, da $\lambda \geq 1$ ist,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})} - \sqrt{\alpha} - 1 &\geq 0, \\ \sqrt{\alpha} - \alpha + \alpha^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ist. Diese Bedingung ist aber erfüllt. Also gilt (72), und die Voraussetzung (26) ist für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ und $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ erfüllt. Daher folgt aus (27) für $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$

$$S(n) > \alpha n \left(1 + \frac{1 - \alpha - \mu^2}{2\lambda(1 - \mu)}\right) = \alpha n \left(1 + \frac{2\sqrt{\alpha} - 2\alpha}{2\lambda\sqrt{\alpha}}\right) = \alpha n \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right).$$

Für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ist damit die Behauptung (5) auch für $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$ und wegen 1. also allgemein bewiesen.

13. Es sei nun

$$(73) \quad \frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt für $z = [n - \mu n]$

$$\sum_{m=1}^{[n - \mu n]} \{A(n - m) - \alpha(n - m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \frac{[n - \mu n]}{2} \alpha.$$

Daher genügt es, zu zeigen, daß

$$(74) \quad \frac{[n - \mu n]}{2} \alpha \geq \frac{\alpha \mu n}{2}$$

für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ und $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1 - \sqrt{\alpha})}$ erfüllt ist, daß also

$$\begin{aligned} n \sqrt{\alpha} - 1 &\geq (1 - \sqrt{\alpha}) n, \\ n(2 \sqrt{\alpha} - 1) &\geq 1, \\ 2 \sqrt{\alpha} - 1 &\geq \alpha(1 - \sqrt{\alpha}) \end{aligned}$$

ist; dies ist erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}(2 + \alpha) &\geq 1 + \alpha, \\ \alpha(4 + 4\alpha + \alpha^2) &\geq 1 + 2\alpha + \alpha^2, \\ \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 1 &\geq 0\end{aligned}$$

ist. Da diese Ungleichung wegen (73) erfüllt ist, ist also (74) bewiesen. Daher ist die Voraussetzung (26) erfüllt, wenn (73) gilt. Hieraus folgt, wie in 12., daß die Behauptung (5) auch unter der Voraussetzung (73) für alle n richtig ist.

14. Jetzt sei

$$(75) \quad \frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{3}.$$

Man setze

$$z = [n - \mu n],$$

dann ist wegen (24) und (25)

$$(76) \quad n > z \geq 4.$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 sind wegen (75) und (76) erfüllt; daher folgt für $n \geq \frac{\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}$ aus diesem Hilfssatz

$$\sum_{m=1}^{[n-\mu n]} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \left\{ \frac{[n-\mu n]}{2} + 1 \right\} \alpha > \frac{n(1-\mu)\alpha}{2}.$$

Man muß also zeigen, daß für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$

$$n(1 - \mu) \geq \mu n$$

ist, daß also

$$\sqrt{\alpha} \geq 1 - \sqrt{\alpha}$$

ist. Dies ist aber wegen (75) erfüllt. Hieraus folgt, analog wie oben, die Richtigkeit der Behauptung (5) im Falle (75) für alle n .

15. Endlich sei

$$(77) \quad \alpha < \frac{1}{4}.$$

Für $n < \frac{3\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}$ gilt die Behauptung (5) nach (22). Es sei also

$$(78) \quad n \geq \frac{3\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}.$$

Setzt man

$$z = [n - \mu n],$$

so ist für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ wegen (78)

$$n > z = [n\sqrt{\alpha}] \geq \left[\frac{3\lambda}{\sqrt{\alpha} - \alpha} \right] \geq \left[\frac{3}{\sqrt{\alpha} - \alpha} \right].$$

Daher folgt aus Hilfssatz 4

$$\sum_{m=1}^{[n-\mu n]} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2} \{A(n) - \alpha n\} \geq \sum_{m=1}^{[n-\mu n]} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} \\ \geq \{[n - \mu n] + 1\} \{k - 1\} \alpha > (n - \mu n) (k - 1) \alpha$$

Folglich genügt es, zu zeigen, daß

$$(79) \quad (n - \mu n) (k - 1) \alpha \geq \frac{\mu n \alpha}{2}$$

für $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ und $n \geq \frac{3\lambda}{\alpha(1-\sqrt{\alpha})}$ erfüllt ist, daß also

$$\sqrt{\alpha}(k-1) \geq \frac{1-\sqrt{\alpha}}{2}, \\ \sqrt{\alpha}(2k-1) \geq 1$$

ist. Wegen (43) ist

$$\sqrt{\alpha} \geq \frac{1}{k+1}.$$

Daher genügt es, zu zeigen, daß

$$\frac{2k-1}{k+1} \geq 1$$

ist. Dies ist aber wegen $k \geq 2$ erfüllt; also gilt (79). Die Behauptung (5) ist folglich auch im Falle (77) richtig.

Damit ist (5) für alle Fälle und also Satz 1 und 2 völlig bewiesen.

(Eingegangen am 6. Dezember 1937.)

Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen ¹⁾.

Von

Heinz Thomas in Darmstadt.

Fragestellung.

1. Es sei ein reelles — im Sinne der Differentialgeometrie — reguläres Flächenstück mit Innen- und Außenseite, das wir kurz Fläche nennen wollen, vorgegeben. Wir denken uns ein starres Modell dieser Fläche hergestellt und darüber „ideale“ Fäden gespannt, d. h. unendlich dünne, undeformable und gewichtslose Fäden, die ohne Zwang verbiegbare sind und ohne Reibung auf der Fläche gleiten, stets aber als Flächenkurven in der Fläche verbleiben. Das Modell der Fläche werde nun — wie später noch genauer ausgeführt werden soll — mit einem „Fadennetz“ d. h. zwei Scharen solcher Fäden „dicht“ überzogen, so daß sich die Fäden verschiedener Scharen „kreuzweise“ und ohne Reibung übereinander lagern. Sämtliche Fäden des Netzes seien durch gleichgroße Tangentialkräfte an ihren beiden Enden über das starre Modell der Fläche gespannt. Dann übt jeder Faden in jedem Flächenpunkt, durch den er hindurchgeht, einen bestimmten Anteil „Druckkraft“ senkrecht zur Fläche aus. Dieser Fadendruck hängt offenbar von der Krümmung der Fadenkurve ab. Das Hauptproblem unserer Untersuchungen besteht nun darin, Flächen mit der besonderen Eigenschaft zu ermitteln und darzustellen, daß in jedem Kreuzungspunkt zweier Fäden der beiden Scharen die Druckkraft, die der eine Faden auf die Fläche ausübt, entgegengesetzt gleich ist der Druckkraft, die von dem anderen Faden herrührt. Dann üben die beiden Fadenscharen insgesamt in keinem der überall beliebig dicht verteilten Kreuzungspunkte einen Druck auf die Fläche aus. Die starre Fläche als widerstandgebender Träger für die gespannten Fadenscharen ist jetzt zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts entbehrlich. Die beiden Scharen gespannter Fäden erzeugen für sich allein ein „Fadenmodell“ der nämlichen Fläche.

2. Die gesuchte Fläche habe nun die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung $E, F, G; L, M, N$. Dem Fadennetz

¹⁾ Diese Arbeit wurde von der Abteilung für Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Hochschule Darmstadt als Dissertation (D 87) angenommen. Die Problemstellung verdanke ich Herrn Prof. Graf, der auch die Arbeit durch viele wertvolle Ratschläge förderte. Berichterstatter waren Herr Prof. Graf und Herr Prof. Walther.

entspricht ein Kurvennetz der Fläche, bei dem zwei Kurven der gleichen Schar keinen Punkt und zwei Kurven verschiedener Scharen genau einen Schnittpunkt gemeinsam haben. Das bedeutet, daß die beiden Kurvenscharen der Fläche topologisch in zwei zueinander senkrechte Parallelscharen eines ebenen Bereiches abbildbar sind; einem beliebig engmaschig wählbaren ebenen Quadratnetz entspricht dann auf der Fläche ein beliebig engmaschig erzwingbares Vierecksnetz.

Das Kurvennetz sei nun das Netz der Parameterkurven. Wir betrachten zunächst ein Netz aus zwei Scharen diskret aufeinanderfolgender Parameterkurven, dessen topologisches Bild in der (u, v) -Ebene ein Quadratnetz von der Maschenweite Δt ist. Wir ersetzen das Kurvennetz durch ein Sehnennetz. Wir realisieren auch dieses Sehnennetz durch gleichstark gespannte Fäden und fragen nach der Gleichgewichtsbedingung in den Kreuzungspunkten. Zum beliebigen Kreuzungspunkt P gibt es vier Nachbarkreuzungspunkte $P_1, \bar{P}_1, P_2, \bar{P}_2$ (vgl. Fig. 1).

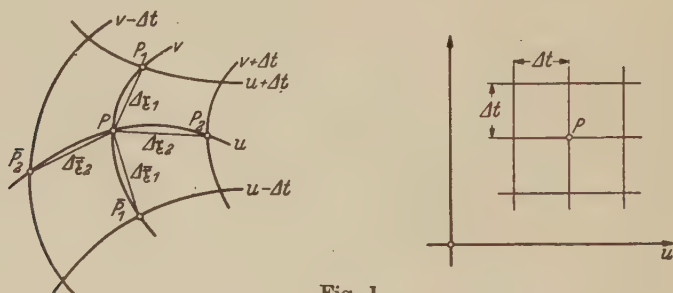


Fig. 1.

Sind $\Delta \mathbf{x}_1$ und $\Delta \bar{\mathbf{x}}_1$ die von P nach P_1 und $\bar{P}_1$ gehenden Sehnenvektoren, so ist:

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(u + \Delta t, v) - \mathbf{x}(u, v) = \Delta t (\mathbf{x}_u + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{x}_{uu} + \Delta t^2 (\dots)),$$

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}(u - \Delta t, v) - \mathbf{x}(u, v) = -\Delta t (\mathbf{x}_u - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{x}_{uu} + \Delta t^2 (\dots));$$

$$\Delta s_1 = \sqrt{\Delta \mathbf{x}_1^2} = \Delta t (\sqrt{E} + \Delta t \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{2\sqrt{E}} + \Delta t^2 (\dots)),$$

$$\Delta \bar{s}_1 = \sqrt{\Delta \bar{\mathbf{x}}_1^2} = \Delta t (\sqrt{E} - \Delta t \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{2\sqrt{E}} + \Delta t^2 (\dots)).$$

Sind ferner $\mathbf{e}_1$ und $\bar{\mathbf{e}}_1$ zwei Einheitsvektoren in Richtung dieser Sehnenvektoren, so ist:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\Delta \mathbf{x}_1}{\Delta s_1} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{E\sqrt{E}} \mathbf{x}_u \right) + \Delta t^2 (\dots),$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\Delta \bar{\mathbf{x}}_1}{\Delta \bar{s}_1} = -\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{E\sqrt{E}} \mathbf{x}_u \right) + \Delta t^2 (\dots).$$

Diese beiden Einheitsvektoren stellen zugleich zwei Fadenspannkkräfte vom Betrage 1 dar, welche in Richtung der beiden Sehnen angreifen. Die Resultierende $\Delta \mathbf{r}_1$ dieser beiden Fadenspannkkräfte ist:

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 = \Delta t \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{E \sqrt{E}} \mathbf{x}_u \right) + \Delta t^2 (\dots).$$

Entsprechend erhalten wir für die Resultierende $\Delta \mathbf{r}_2$ der beiden Fadenspannkkräfte in Richtung der Sehnen der anderen durch P gehenden Kurve:

$$\Delta \mathbf{r}_2 = \Delta t \left(\frac{\mathbf{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv}}{G \sqrt{G}} \mathbf{x}_v \right) + \Delta t^2 (\dots).$$

Als Gleichgewichtsbedingung im Kreuzungspunkt P haben wir dann:

$$\Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{0},$$

d. h.

$$\Delta t \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} + \frac{\mathbf{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}}{E \sqrt{E}} \mathbf{x}_u - \frac{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{vv}}{G \sqrt{G}} \mathbf{x}_v + \Delta t (\dots) \right) = \mathbf{0}.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die inneren Produkte mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ und dem Flächennormalenvektor $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ verschwinden, wenn also die drei folgenden Beziehungen gelten:

$$(a) \quad \frac{\Delta t}{G \sqrt{G}} (\mathbf{x}_v^2 (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_{vv})) + \Delta t^2 (\dots) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\Delta t}{G \sqrt{G}} (F G_v - 2 G F_v + G G_u) + \Delta t^2 (\dots) = 0;$$

und entsprechend:

$$\frac{\Delta t}{E \sqrt{E}} (F E_u - 2 E F_u + E E_v) + \Delta t^2 (\dots) = 0;$$

$$(b) \quad \Delta t \left(\frac{L}{E} \sqrt{E} + \frac{N}{G} \sqrt{G} \right) + \Delta t^2 (\dots) = 0.$$

Lassen wir nun die Maschenweite Δt des Netzes gegen Null gehen, so erhalten wir:

$$(a) \quad F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0, \quad F E_v - 2 E F_u + E E_v = 0;$$

d. h. die Parameterlinien $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ sind geodätische Linien, wie auch aus der Definition der geodätischen Linien als kürzesten Linien entsprechend der Problemstellung hervorgeht.

$$(b) \quad \frac{L}{E} \sqrt{E} + \frac{N}{G} \sqrt{G} = 0.$$

Wir führen die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ bzw. $\frac{1}{R_2}$ und die Bogenlängen s_1 bzw. s_2 der Parameterkurven $u = t$, $v = \text{konst.}$ bzw. $u = \text{konst.}$, $v = t$ ein. Wegen

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad \text{und} \quad s'_1 = \sqrt{E}, \quad s'_2 = \sqrt{G}$$

lautet dann die letzte Bedingung:

$$\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0.$$

Die aufgeworfene Frage lautet daher in der Sprache der Differentialgeometrie:

B. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt für die Krümmungen und Bogenlängen der beiden hindurchgehenden geodätischen Linien die Beziehung

$$\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$$

gilt.

Es ist also nach einer Fläche mit einem infinitesimalen Netz von geodätischen Linien gefragt, bei dem an die Krümmung der geodätischen Linien in einem Kreuzungspunkt und zugleich an die „Maschenstruktur“ des Netzes eine Forderung gestellt ist. Das infinitesimale Netz, das als topologisches Bild eines ebenen geradlinigen Quadratnetzes mit „unendlich kleinen Seiten“ erklärt ist, ist nämlich erst vollständig gekennzeichnet durch die beiden Scharen von Netzkurven und deren Anordnungsgesetz, das für jeden Flächenpunkt die Form der infinitesimalen Parallelogrammaschen bestimmt. Zwei „verschiedene“ infinitesimale Netze auf einer Fläche können sich demnach nicht nur in der Verschiedenheit der zum Aufbau des Netzes verwendeten Kurven, sondern auch — bei Verwendung der gleichen Netzkurven — allein in der Anordnung der Netzkurven (Maschenform) unterscheiden.

Unser Ansatz führt weiterhin auf folgende, nicht unmittelbar mechanisch realisierbare Fragestellung:

A. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

Hier ist nach einer Fläche mit einem infinitesimalen Netz von geodätischen Linien gefragt, bei dem nur an die Krümmung der geodätischen Linien in einem Kreuzungspunkt, nicht aber an die „Maschenstruktur“ des Netzes eine Forderung gestellt ist.

Diese beiden Fragen, von denen die letztere im Teil A, die erstere im Teil B der Arbeit behandelt werden soll, sind dann und nur dann miteinander identisch, falls in jedem Punkt unseres Netzes $s'_1 = s'_2$ ist, d. h. falls unser geodätisches Netz aus infinitesimalen Rhomben besteht. In diesem Sonderfall, der im Teil C der Arbeit besprochen werden soll, haben wir also folgende Fragestellung:

C. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$$

erfüllt sind.

Bei allen drei Fragen können die gesuchten Netze von geodätischen Linien nur auf hyperbolisch gekrümmten Flächen vorhanden sein.

Im folgenden werden in der Hauptsache infinitesimale Parallelogrammnetze aus geodätischen Linien auf Dreh- und Schraubenflächen untersucht. Es werden hierbei nur „dreh- bzw. schraubensymmetrische“ Kurvennetze betrachtet, bei denen die Kurven der beiden Scharen des Netzes durch Drehung bzw. Schraubung bezüglich der Achse auseinander hervorgehen. Sofern dabei die Netzstruktur („Maschenform“) eine Rolle spielt (Teil B und Teil C), sollen außerdem nur „reguläre“ Netze betrachtet werden, d. h. Netze, bei denen die Schar der Breitenkreise bzw. der Bahnschraubenlinien eine Diagonalkurvenschar des Netzes ist.

3. Die Frage nach „Fadenmodellen“, die aus Netzen mit endlicher Maschenweite bestehen, wurde bereits von S. Finsterwalder in seiner Abhandlung „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation“²⁾ aufgeworfen. Netze mit kongruenten rhombischen Maschen, bei denen die Fäden an den Kreuzungspunkten miteinander verknötet sind, hat W. Schlink³⁾ untersucht. In der vorliegenden Arbeit sollen dagegen *infinitesimale* Netze von geodätischen Linien ohne Verknötung in den Kreuzungspunkten untersucht werden.

Eine Frage, die einen gewissen Zusammenhang mit unseren Untersuchungen hat, ist die in der älteren Literatur des öfteren behandelte Frage nach dem Gleichgewicht eines aus einem biegsamen, unausdehnbaren Material hergestellten Stückes einer gegebenen Fläche, auf welche gegebene Kräfte wirken⁴⁾. Während es sich bei diesem Problem wie bei dem Problem der Minimalflächen nur um die Eigenschaften von *homogenen* Flächenhäuten handelt, haben wir es bei unserem Problem mit Flächen zu tun, die *Netzstruktur* besitzen.

²⁾ Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Band VI (1899), S. 45, insbesondere S. 68.

³⁾ Über die Deformation von Häuten rhombischer Struktur, Dissertation München 1901.

⁴⁾ Vgl. etwa P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipziger Berichte 45 (1893), S. 444, Anm. 58—60.

A. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

I. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“⁵⁾ Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

1. Auf einer beliebigen Fläche $x = x(u, v)$ hat die beliebige Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ die Normalkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2}{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}.$$

Ist die Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ geodätische Linie der Fläche, so ist $\frac{1}{R}$ zugleich ihre (gewöhnliche) Krümmung. Zwei beliebige Kurven $u = u(t)$, $v = v(t)$ und $u_1 = u_1(t)$, $v_1 = v_1(t)$ der Fläche bilden einen Winkel α miteinander, für den man hat:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2} \cdot (u' v'_1 + u'_1 v')}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2} \sqrt{E u_1'^2 + 2 F u_1' v_1' + G v_1'^2}}.$$

2. Die Gleichung einer beliebigen Drehfläche lautet in Zylinderkoordinaten (φ, r, z) :

$$\begin{cases} \varphi = u \\ r = v \\ z = f(v) \end{cases} \quad (0 \leq u < 2\pi; v > 0);$$

$z = f(r)$ ist die Meridiankurve der Fläche; die Parameterlinien $u = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$ sind die Meridiane bzw. Parallelkreise. Die Grundgrößen der Drehfläche lauten:

$$E = v^2, \quad F = 0, \quad G = 1 + f'^2(v);$$

$$L = \frac{v f''(v)}{\sqrt{1 + f'^2(v)}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f''(v)}{\sqrt{1 + f'^2(v)}}.$$

Nach 1. erhält man für die Normalkrümmung der beliebigen Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ der Drehfläche:

$$\frac{1}{R} = \frac{v f' u'^2 + f'' v'^2}{\sqrt{1 + f'^2} (v^2 u'^2 + (1 + f'^2) v'^2)},$$

⁵⁾ Vgl. S. 237.

und für den Winkel α zwischen dieser Kurve und einer Meridiankurve $u_1 = \text{konst.}$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{v^2 u'^2}{v^2 u'^2 + (1 + f'^2) v'^2}.$$

Ist die Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ geodätische Linie der Drehfläche, so gilt der Clairautsche Satz $v \cdot \sin \alpha = a = \text{konst.}$ (dabei ist $a < 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $a = 0$ für $\alpha = 0$ und $a > 0$ für $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$); aus der letzten Gleichung erhalten wir dann

$$u'^2 = \frac{a^2 (1 + f'^2)}{v^2 (v^2 - a^2)} v'^2$$

als Differentialgleichung der geodätischen Linien und daher für den Ausdruck $\frac{1}{R}$, der dann die Krümmung der geodätischen Linien darstellt:

$$\frac{1}{R} = \frac{a^2 f' (1 + f'^2) + v f'' (v^2 - a^2)}{v^3 \cdot \sqrt{(1 + f'^2)^3}}.$$

3. Wir bestimmen nun die Drehflächen, für die $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$, $a = a_2$ kennzeichnen zwei geodätische Linien der Drehfläche und damit zugleich zwei Scharen von je ∞^1 , durch Drehung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien. Diese beiden Scharen bilden auf der Fläche ein Vierecksnetz. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 2. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2 . Die Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$\frac{f''}{f' (1 + f'^2)} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{v (a_1^2 + a_2^2 - 2v^2)},$$

die sich elementar integrieren läßt und für die Meridianfunktion $f = f(v)$ der gesuchten Drehfläche folgende Funktion liefert:

$$f = \pm \frac{C}{\sqrt{2 - C^2}} \sqrt{v^2 - \frac{1}{2 - C^2} (a_1^2 + a_2^2)},$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten, die nur eine Parallelverschiebung der Meridiankurve in Richtung der Drehachse andeutet, abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$ und für $v = r$ gesetzt, die Meridiankurve der gesuchten Drehfläche dar und kann in der folgenden Form geschrieben werden⁶⁾:

$$\frac{r^2}{2 - C^2} - \frac{z^2}{\frac{p^2 C^2}{(2 - C^2)^2}} = 1,$$

⁶⁾ Die Konstante C sei stets reell. Für komplexes C erhält man nur dann eine reelle Fläche, wenn C rein imaginär ist. Die so erhaltene Fläche ist jedoch in allen ihren Punkten elliptisch gekrümmt und kann daher kein Netz der verlangten Art tragen.

wobei zur Abkürzung $p^2 = a_1^2 + a_2^2$ gesetzt wurde. Die ermittelte Drehfläche ist also ein *einschaliges Drehhyperboloid*.

4. Wir untersuchen die *Formmannigfaltigkeit* der erhaltenen Drehhyperboloide. Die letzte Gleichung stellt die Meridiankurven von ∞^2 Drehhyperboloiden dar, die von den Konstanten C^2 und p^2 abhängen. Um die eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Drehhyperboloide voneinander unterscheidet, als uninteressant aus der Meridiangleichung zu eliminieren, setzen wir die Halbachsenlänge der Meridianhyperbel $A = 1$, also $A^2 = \frac{p^2}{2 - C^2} = 1$; wir betrachten dann nur noch die ∞^1 verschieden geformten Meridianhyperbeln mit den Halbachsen $A = 1$, $B = \sqrt[+]{\frac{2}{p^2} - 1}$. Damit B reell wird, muß $2 \geq p^2 \geq 0$ sein. Für $p^2 = 2$ bzw. $p^2 = 0$ artet das Hyperboloid in eine Ebene bzw. einen Drehzylinder aus. Diese als Grenzfälle erhaltenen Flächen sind aber abwickelbar und scheiden daher nach Voraussetzung aus.

5. Wir fragen nach der *Mannigfaltigkeit der Netze* auf einem vorgegebenen Drehhyperboloid. Zu jedem der ∞^1 Drehhyperboloide mit den Halbachsen $A = 1$ und $B = \sqrt[+]{\frac{2}{p^2} - 1}$ gehören ∞^1 Netze von geodätischen Linien. Denn der Parameter der einen Schar (etwa a_2) kann bereichsweise ($2 > a_2^2 \geq 0$) beliebig vorgegeben werden; damit ist dann der Parameter a_1 der anderen Schar des Netzes auf der vorgegebenen Fläche durch die Bedingung $a_1^2 + a_2^2 = p^2$ festgelegt.

6. *Geometrische Deutung* der durch die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 = p^2$ verbundenen Konstanten p^2 und a_1^2, a_2^2 , welche die Form des Drehhyperboloides und die auf ihm gelegenen Netze von geodätischen Linien kennzeichnen.

Wir betrachten im folgenden nur den im ersten Quadranten des (r, z) -Systems gelegenen „Halbast“ der Meridianhyperbel und demgemäß auch nur den von ihr erzeugten, oberhalb des Kehlkreises gelegenen Teil des Drehhyperboloides. Die Konstante p^2 ändert sich nicht, wenn wir a_1 durch $-a_1$ oder a_2 durch $-a_2$ ersetzen, wenn wir also — wie man aus dem Clairautschen Satz $r \cdot \sin \alpha = a$ ersieht — eine oder beide Scharen des Netzes von geodätischen Linien an einer Meridianebene spiegeln. Auf einem — durch p^2 der Form nach — vorgegebenen Drehhyperboloid liegen also zugleich mit jedem der ∞^1 , durch die Konstanten a_1, a_2 gekennzeichneten Netze drei weitere durch Spiegelungen an einer Meridianebene hervorgehende Netze; eines, das durch Spiegelung beider Scharen entsteht ($-a_1, -a_2$), und zwei, die durch Spiegelung je einer Schar entstehen ($a_1, -a_2$; $-a_1, a_2$). Die beiden letzten — selbst wieder durch Spiegelung beider Scharen auseinander hervorgehend — sind von dem ursprünglichen Netz wesentlich verschieden. Da mit dem ersten Netz alle drei durch Spiegelungen entstehenden Netze

mitgegeben sind, genügt es, nur eines der vier Netze zu betrachten. Wir nehmen daher im folgenden $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ an, von dem Fall $a_1^2 = a_2^2$ abgesehen, der nur für $a_1 = -a_2$ sinnvoll ist.

Wir setzen $p^2 = 2 \sin^2 \beta$; wegen $\cotg \beta = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2}{p^2} - 1}$ ist dann β der Winkel zwischen der Asymptote des betrachteten Halbastes der Meridianhyperbel und der positiven Drehachse. Die Grenzfälle $\beta = 0^\circ$ und $\beta = 90^\circ$ scheiden aus. Auf Grund des Clairautschen Satzes $r \cdot \sin \alpha = a$ gibt es für den Verlauf der geodätischen Linien der durch die Konstante a_i ($i = 1, 2$) gekennzeichneten Schar zwei Möglichkeiten:

α) $0 < a_i^2 < 1$ (bzw. $a_i^2 = 1$). Die geodätischen Linien der Schar laufen über die ganze Drehfläche hinweg und schneiden (bzw. berühren asymptotisch) den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt (bzw. Berührungspunkt) bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_i , für den $\sin \alpha_i = a_i$ (bzw. $\sin \alpha_i = 1$) ist.

β) $1 < a_i^2 < 2$ (bzw. $a_i^2 = 1$). Die geodätischen Linien der Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_i$ (bzw. des Kehlkreises $r = 1$) und berühren ihn (bzw. berühren ihn asymptotisch).

Nehmen wir nun $a_2^2 \geq a_1^2$ an, so gelten wegen $p^2 = 2 \sin^2 \beta = a_1^2 + a_2^2 < 2$ die Ungleichungen: $a_1^2 < 1$, $a_2^2 < 2$; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden:

α) $a_1^2 < 1$, $a_2^2 < 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Die geodätischen Linien der ersten, und der zweiten Schar des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2 , für die $a_1 = \sin \alpha_1$, $a_2 = \sin \alpha_2$ ist (bzw. die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Kehlkreis $r = 1$ asymptotisch). Die Gleichung $p^2 = 2 \sin^2 \beta = a_1^2 + a_2^2$ kann jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\alpha) \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2).$$

Wir haben $a_2^2 \geq a_1^2$ angenommen. Es sei zunächst $a_2^2 = a_1^2$; wir setzen (vgl. oben) $a_2 = -a_1$. Dann ist $\beta = -\alpha_1 = \alpha_2$; beide Scharen des Netzes gehen durch Spiegelung an einer Meridianebene auseinander hervor. Es ist daher in jedem Punkt $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$. Da das Netz der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen muß, wird $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$, d. h. wir erhalten das Netz der geradlinigen Erzeugenden des Drehhyperboloides. Es sei nunmehr $a_2^2 > a_1^2$, also $\alpha_2 > \alpha_1$; dann ergeben sich für α_1 , α_2 und β , die durch Gleichung: (α) miteinander verknüpft sind, folgende Bereiche:

$$\text{für } 0^\circ < \beta < 45^\circ: \quad 0^\circ \leq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leq \arcsin \sqrt{2 \sin^2 \beta},$$

$$\text{für } 45^\circ \leq \beta < 90^\circ: \quad \arccos \sqrt{2 \cos^2 \beta} \leq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leq 90^\circ.$$

Diese Netze finden sich in der Tabelle A links von der Trennungslinie.

β) $a_1^2 < 1$, $a_2^2 > 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Krehkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1 , für den $a_1 = \sin \alpha_1$ ist. Die geodätischen Linien der zweiten Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_2$ (bzw. des Krehkreises $r = 1$) und berühren ihn (bzw. berühren ihn asymptotisch). Die Gleichung $p^2 \equiv 2 \sin^2 \beta = a_1^2 + a_2^2$ lautet jetzt:

$$(\beta) \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha_1 - a_2^2).$$

Für die Größen α_1 , a_2 und β , die durch diese Gleichung (β) miteinander verknüpft sind, ergeben sich folgende Bereiche:

$$\beta \geq 45^\circ; \quad 0^\circ \leq \alpha_1 \leq \arccos \sqrt{2 \cos^2 \beta}; \quad 1 \leq a_2 \leq \sqrt{2} \sin \beta.$$

Diese Netze finden sich in der Tabelle A *rechts* von der Trennungslinie.

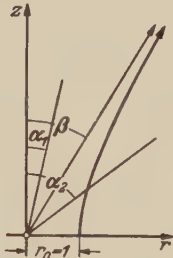
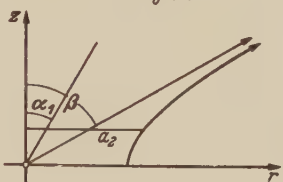
Stets bedeuten $\alpha_1 = 0^\circ$ die Meridiane und $\alpha_2 = 90^\circ$ geodätische Linien, die einen Breitenkreis $r = a_2 \geq 1$ berühren. Für $a_2 = 1$ werden die unter α) und β) besprochenen Fälle miteinander identisch; die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Krehkreis $r = 1$ asymptotisch. Dementsprechend liegt in der Tabelle A in zwei Feldern, die längs der Trennungslinie zusammenstoßen, stets dasselbe Netz vor, einmal als Grenzfall der links behandelten Netze, das andere Mal als Grenzfall der rechts behandelten Netze.

7. Zusammenfassend können wir sagen:

Die einzige Drehfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“, infinitesimales Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzte Krümmung besitzen, ist das Drehhyperboloid. Auf jedem der ∞^1 verschieden geformten, d. h. nicht zueinander ähnlichen Drehhyperboloide gibt es ∞^1 solche Netze, die zwei grundsätzlich verschiedene Formen aufweisen, vgl. Tabelle A mit Fig. 2 und 3⁷⁾.

⁷⁾ Man kann zeigen, daß nicht nur das einschalige Drehhyperboloid, sondern auch das allgemeine einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid (also alle hyperbolisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung) Netze von geodätischen Linien tragen, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen. — Man kann auch allgemeiner nach Flächen mit Netzen von geodätischen Linien fragen, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \omega^2 \frac{1}{R_2} = 0$ genügen, wobei ω^2 eine Konstante ist. Man kann zeigen, daß die einzige Drehfläche mit einem Netz von geodätischen Linien, das dieser Bedingung $\frac{1}{R_1} + \omega^2 \frac{1}{R_2} = 0$ genügt, ebenfalls das Drehhyperboloid ist, und daß wieder sämtliche hyperbolisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung solche Netze tragen.

Tabelle A⁸⁾.

β	$\alpha_1 = \beta$ $\alpha_2 = \beta$	$> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$	$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = X(\beta)$	1. Schar = Meridiane					Fig. 2
0^0	$\alpha_1 \rightarrow 0^0, \alpha_2 \rightarrow 0^0$ (Drehzylinder)								Fig. 3
5^0	$\alpha_1 = 5^0$ $\alpha_2 = 5^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 7^0$						
40^0	$\alpha_1 = 40^0$ $\alpha_2 = 40^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 65^0$						
45^0	$\alpha_1 = 45^0$ $\alpha_2 = 45^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 = 0^0, \alpha_2 = 1$					
50^0	$\alpha_1 = 50^0$ $\alpha_2 = 50^0$		$\alpha_1 \approx 25^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 \approx 25^0$ $a_2 = 1$			$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \approx 1,1$		
85^0	$\alpha_1 = 85^0$ $\alpha_2 = 85^0$		$\alpha_1 \approx 83^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 \approx 83^0$ $a_2 = 1$			$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \approx 1,4$		
90^0	$\alpha_1 \rightarrow 90^0, \alpha_2 \rightarrow 90^0$ (Ebene)			$\alpha_1 \rightarrow 90^0$ $a_2 = 1$ (Ebene)			$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \rightarrow \sqrt{2}$ (Ebene)		
β	Netz der Erzeugenden		2. Schar berührt den Kehlkreis asymptotisch	2. Schar berührt den Kehlkreis asymptotisch			1. Schar = Meridiane		
	$\alpha_1 = \beta$ $\alpha_2 = \beta$	$> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$	$\alpha_1 = Y(\beta)$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 = Y(\beta)$ $a_2 = 1$	$> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$		$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 = \sqrt{2} \sin \beta$		

Linker Teil. Die geodätischen Linien beider Scharen des Netzes verlaufen über das ganze Hyperboloid und schneiden den Kehlkreis $r_0 = 1$: im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2 (für $\alpha_2 = 90^0$ berühren die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis asymptotisch).

Es ist:

$$(\alpha) \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2).$$

⁸⁾ Die Werte für α_1 und α_2 sind nur auf ^{0} , die für a_2 auf eine Dezimale genau.

Rechter Teil. Die geodätischen Linien der ersten Schar verlaufen über das ganze Hyperboloid und schneiden den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1 . Die geodätischen Linien der zweiten Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_2$ und berühren ihn (für $a_2 = 1$ verlaufen sie oberhalb des Kehlkreises $r = 1$ und berühren ihn asymptotisch). Es ist:

$$(\beta) \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha_1 - a_2^2).$$

Es wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$X(\beta) = \arcsin \sqrt{2 \sin^2 \beta}, \quad Y(\beta) = \arccos \sqrt{2 \cos^2 \beta}.$$

II. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches“ Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

1. Die Gleichung einer beliebigen Schraubenfläche lautet in Zylinderkoordinaten (φ, r, z) :

$$\begin{cases} \varphi = u_1 \\ r = v_1 \\ z = f(v_1) + h u_1 \end{cases} \quad (h \neq 0).$$

Hierbei ist $z = f(r)$ die Meridiankurve der Schraubenfläche und h ihre reduzierte Ganghöhe. Wir führen — im engen Anschluß an den im vorigen Kapitel für die Drehflächen eingeschlagenen Lösungsweg — auch auf den Schraubenflächen ein orthogonales Netz von Parameterkurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ ein durch die Umformung:

$$u_1 = u + \omega(v), \quad v_1 = v$$

und erhalten für die Schraubenfläche die neue Parameterdarstellung:

$$\begin{cases} \varphi = u + \omega(v) \\ r = v \\ z = f(v) + (u + \omega(v)) h \end{cases} \quad (v > 0).$$

Die Parameterlinien $v = \text{konst.}$ bzw. $u = \text{konst.}$ sind jetzt die Schraubenlinien bzw. ihre orthogonalen Trajektorien. Die Gleichung $\varphi = \omega(r)$ stellt in Polarkoordinaten den Lotriß der orthogonalen Trajektorie $u = 0$ in eine

Ebene senkrecht zur Schraubungsachse dar. Die Grundgrößen der Schraubenfläche lauten wegen $F = 0$:

$$E = v^2 + h^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = \frac{v^3 + h^3 + v^2 f'^2}{v^3 + h^3},$$

$$L = -\frac{v^2 f'}{\sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}},$$

$$M = \frac{h(v^3 + h^3 + v^2 f'^2)}{(v^3 + h^3) \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}},$$

$$N = -\frac{v f''(v^3 + h^3)^2 + h^3 f'^3 v^2 + 2 h^2 f'(v^2 + h^2)}{(v^3 + h^3)^2 \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}}.$$

Längs einer geodätischen Linie der Schraubenfläche gilt nun die Gleichung (die als Verallgemeinerung des Clairautschen Satzes für Drehflächen anzusehen ist):

$$\sqrt{v^2 + h^2} \cdot \sin \alpha = a = \text{konst.}$$

Hierin ist α der Winkel zwischen den zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien ($u = \text{konst.}$) und der geodätischen Linie, und es ist $a < 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $a = 0$ für $\alpha = 0$ und $a > 0$ für $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Danach erhält man entsprechend den Betrachtungen für Drehflächen in Kapitel I als Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$u'^2 = \frac{a^2(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}{(v^3 + h^3)^2(v^2 + h^2 - a^2)} v'^2,$$

und für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}(v^2 + h^2)^2 \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2} &= -a^2 v^2 f' \\ &- (v f''(v^3 + h^3)^2 + h^3 v^3 f'^3 + 2 h^2 f'(v^3 + h^2)) \frac{v^2 + h^2 - a^2}{v^2 + h^2 + v^2 f'^2} \\ &\pm 2 h a \sqrt{(v^2 + h^2 - a^2)(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}. \end{aligned}$$

2. Wir bestimmen nun die allgemeinen Schraubenflächen, für die $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$, $a = a_2$ kennzeichnen zwei geodätische Linien der Schraubenfläche und damit zugleich zwei Scharen von je ∞^1 , durch Verschraubung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien. Diese beiden Scharen bilden auf der Fläche ein Vierecksnetz. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt

gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 1. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2 . Die Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} v^2 f' (a_1^2 + a_2^2) (v^2 + h^2 + v^2 f'^2) + (v f'' (v^2 + h^2)^2 + h^2 v^2 f'^3 + 2 h^2 f' (v^2 + h^2)) \\ \cdot (2 (v^2 + h^2) - (a_1^2 + a_2^2)) \\ \pm 2 h \sqrt{(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)^3} \cdot (a_1 \sqrt{v^2 + h^2 - a_1^2} + a_2 \sqrt{v^2 + h^2 - a_2^2}) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Meridianfunktion $f = f(v)$ der gesuchten Schraubenfläche. Aus dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, daß diese Gleichung bei vorgegebenen Anfangswerten stets eine und nur eine Lösung besitzt. Unter den unendlich vielen Schraubenflächen, die durch Verschraubung der Kurve $f = f(v)$ oder $z = f(r)$ um die z -Achse entstehen, und deren Meridiankurven denselben Anfangsbedingungen genügen, befindet sich also eine und nur eine, auf der zwei vorgegebene Scharen von geodätischen Linien — bei denen die einzelnen geodätischen Linien durch Verschraubung auseinander hervorgehen — ein Netz der verlangten Art bilden. Die Auflösung der Differentialgleichung ist in dem Spezialfall $a_1 = -a_2$ leicht durchführbar. Davon wird noch in anderem Zusammenhang (Teil C) die Rede sein.

B. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt für die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien die Beziehung

$$\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0 \text{ gilt.}$$

III. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“, „reguläres“⁹⁾ Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien der Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügen.

1. Wir hatten für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien auf den Drehflächen in Kapitel I erhalten:

$$\frac{1}{R} = \frac{a^2 f' (1 + f'^2) + v f'' (v^2 - a^2)}{v^3 \cdot \sqrt{(1 + f'^2)^3}}.$$

Ferner lautet die erste Grundform der Drehflächen:

$$s'^2 = v^2 u'^2 + (1 + f'^2) v'^2,$$

⁹⁾ Vgl. S. 237.

und es wird s' für die geodätischen Linien, deren Differentialgleichung

$$u'^2 = \frac{a^2 (1 + f'^2)}{v^2 (v^2 - a^2)} v'^2$$

lautet:

$$s' = v v' \sqrt{\frac{1 + f'^2}{v^2 - a^2}}.$$

2. Wir bestimmen die Drehflächen, für die $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$ und $a = a_2$ kennzeichnen wieder zwei Scharen von je ∞^1 , durch Drehung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien, die auf der Fläche ein Vierecksnetz bilden. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ und die Bogenlängen s_1 und s_2 der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 1. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2 . Da beide Bogenlängen s_1 und s_2 Funktionen von r allein sind, ist die Schar der Breitenkreise $r = \text{konst.}$ eine Diagonalkurvenschar des Netzes; das Netz ist also regulär. Die Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$\frac{v f' f''}{f'^2 (1 + f'^2)} = 1 - \frac{v^2}{\sqrt{(v^2 - a_1^2)(v^2 - a_2^2)}}.$$

In dieser Gleichung ist die Wurzel stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Denn unser Problem hat nur auf hyperbolisch gekrümmten Flächen einen Sinn. Es muß daher

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{v f' f''}{v^2 (1 + f'^2)^2},$$

also auch die rechte Seite der oben stehenden Differentialgleichung negativ sein, was nur bei positivem Vorzeichen der Wurzel möglich ist. Die Differentialgleichung läßt sich elementar integrieren und liefert für die Meridianfunktion $f = f(v)$

$$f = \pm \int \frac{C^2 v dv}{\sqrt{v^2 (1 - C^4) - \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \sqrt{(v^2 - a_1^2)(v^2 - a_2^2)}}}^{10)},$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$, $v = r$ gesetzt, die *Meridiankurve der gesuchten Drehfläche* dar.

3 Die Meridiankurve der gesuchten Drehfläche, die wir nunmehr untersuchen wollen, ist zur r -Achse spiegelbildlich; es genügt daher, ihren Verlauf

¹⁰⁾ Die Konstante C sei stets reell. Für komplexes C erhält man nur dann eine reelle Kurve, wenn C rein imaginär ist. Die zugehörige Drehfläche trägt jedoch kein Netz von geodätischen Linien der verlangten Art.

im ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes (z, r) zu betrachten. Diesen im ersten Quadranten gelegenen Teil der Meridiankurve

$$z = \int \frac{C^2 r dr}{\sqrt[+]{r^2(1-C^4) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}}$$

wollen wir im folgenden kurz „ M -Kurve“ nennen.

a) Die Konstante C^2 genügt der Bedingung $C^4 < 2$.

Begründung: Da in der Gleichung der M -Kurve der Radikand der großen Wurzel stets ≥ 0 sein muß, ist:

$$\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)} \geq r^2(C^4 - 1) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2).$$

Ist die rechte Seite gleich Null, so ist diese Bedingung stets erfüllt. Ist die rechte Seite negativ, so ist:

$$C^4 < 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2r^2}, \text{ d. h. } C^4 < 1.$$

Ist die rechte Seite positiv, so muß

$$C^4 r^2 (a_1^2 + a_2^2) + \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{4} < r^4 C^4 (2 - C^4), \text{ d. h. } 0 < C^4 < 2$$

sein. Wir scheiden die Grenzfläche $C^4 = 0$ und $C^4 = 2$ aus, da für $C^4 = 0$ $z \equiv 0$ und für $C^4 = 2$ der Nenner des Integranden in der Gleichung der M -Kurve imaginär wird. Ist aber $0 < C^4 < 2$, so ist der Nenner des Integranden stets reell, sofern nur r genügend groß wird, welche Werte auch a_1 und a_2 annehmen mögen.

b) Die M -Kurve hat eine stets reelle Asymptote, die mit der positiven Drehachse den Winkel β bildet, für den man hat:

$$\operatorname{otg} \beta = \left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=\infty} = \frac{C^2}{\sqrt[+]{2-C^4}}, \text{ d. h. } C^2 = \sqrt[+]{2} \cos \beta.$$

Wir können daher jetzt für die Gleichung der M -Kurve schreiben:

$$z = \int \frac{2 \cos \beta r dr}{\sqrt[+]{2r^2(1-2\cos^2\beta) - (a_1^2 + a_2^2) + 2\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}}}.$$

Wegen $0 < C^4 < 2$ ist $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

c) Es ist $r^2 \geq a_2^2$, wenn wir $a_2^2 > a_1^2$ annehmen, und $r^2 > a_2^2$, wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist.

Begründung: Im Bereich $a_1^2 < r^2 < a_2^2$ ist die kleine Wurzel $\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}$ imaginär. Ist $r^2 \leq a_1^2$, so können wir setzen: $r^2 = \varepsilon^2 a_1^2$, wo $0 < \varepsilon^2 \leq 1$ ist, und ferner $a_2^2 = \eta^2 a_1^2$, wo $\eta^2 \geq 1$ ist. Dann lautet der Radikand A der großen Wurzel im Nenner des Integranden:

$$A = a_1^2 (2\varepsilon^2 - 1 - \eta^2 - 4\varepsilon^2 \cos^2 \beta + 2\sqrt[+]{(1-\varepsilon^2)(\eta^2 - \varepsilon^2)}).$$

Nun ist stets:

$$2 \varepsilon^2 - 1 - \eta^2 - 4 \varepsilon^2 \cos^2 \beta + 2 \sqrt[+]{(1 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \varepsilon^2)} < 0,$$

denn diese Ungleichung kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$(\eta^2 - 1)^2 + 16 \varepsilon^4 \cos^4 \beta + 8 \varepsilon^2 \cos^2 \beta (1 + \eta^2 - 2 \varepsilon^2) > 0,$$

ist also wegen $\beta < 90^\circ$, $\varepsilon^2 > 0$ und $1 + \eta^2 - 2 \varepsilon^2 \geq 0$ stets erfüllt. Für $r^2 \leq a_1^2$ ist also A stets negativ.

d) Die M -Kurve hat keine Tangenten senkrecht zur Drehachse, da nach Voraussetzung weder r noch $\cos \beta$ verschwinden können.

e) Für die Krümmung der M -Kurve erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2 \cos \beta}{\sqrt[+]{2 r^3 - (a_1^3 + a_3^3) + 2 \sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_3^2)}}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_3^2)}} \right)$$

f) Die M -Kurve hat keine Wendepunkte.

Begründung: In einem Wendepunkt ist $\frac{1}{\varrho} = 0$. Bei unserer Kurve kann $\frac{1}{\varrho}$ nur für

$$1 - \frac{r^2}{\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_3^2)}} = 0, \text{ d. h. für } r_W^2 = \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 + a_3^2}$$

verschwinden. Es ist jedoch $r_W^2 < a_2^2$; für r_W^2 wird daher z imaginär (vgl. c)).

g) Die M -Kurve hat keine Scheitel mit nicht zur Drehachse paralleler Tangente.

Begründung: In einem Scheitel ist $\left(\frac{1}{\varrho}\right)' = 0$. Bei der M -Kurve kann diese Beziehung auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_3^2)} \cdot \left(\frac{2 a_1^2 a_3^2}{a_1^3 + a_3^3} - r^2 \right) = (r^3 - a_1^3)(r^3 - a_3^3) + \frac{1}{3} \frac{(a_1^3 - a_3^3)^2}{a_1^3 + a_3^3} r^2,$$

und könnte daher nur für $r^2 < \frac{2 a_1^2 a_3^2}{a_1^3 + a_3^3}$ und für $r^2 = a_1^2 = a_2^2$ befriedigt werden, was aber den Forderungen $r^2 \geq a_2^2$ (wenn $a_2^2 > a_1^2$ ist) bzw. $r^2 > a_2^2$ (wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist) widerspricht (vgl. c)).

h) Wir fragen, ob die M -Kurve (im Endlichen) Spitzen hat. In einer Spitze ist $\varrho = 0$. Bei der M -Kurve kann dieser Fall nur eintreten für:

$$\alpha) 2 r^2 - (a_1^2 + a_2^2) + 2 \sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)} = 0,$$

$$\beta) (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) = 0.$$

Im Falle α) wird z imaginär. Im Falle β) ist $r^2 = a_1^2$ oder $r^2 = a_2^2$. Für $r^2 = a_1^2$ wird der Nenner des Integranden in der Gleichung der M -Kurve

imaginär, für $r^2 = a_2^2$ lautet er $\sqrt[+]{a_2^3(1 - 4 \cos^2 \beta) - a_1^3}$, bleibt also für

$$\cos^2 \beta \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^3}{a_2^3} \right)^{11})$$

11) Für $a_1^3 = a_2^3$ ist wegen $\beta < 90^\circ$ diese Beziehung nicht mehr erfüllbar.

reell. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, hat die M -Kurve für $r = a_2$ eine Spitze; diese ist dann der der Drehachse am nächsten gelegene Punkt der M -Kurve, da z für $r^2 \geq a_2^2$ reell und für $r^2 < a_2^2$ imaginär wird. Für den Winkel δ zwischen der Spitzentangente und der z -Achse hat man:

$$\cotg \delta = \frac{2 a_2 \cos \beta}{\sqrt{a_2^2 (1 - 4 \cos^2 \beta) - a_1^2}}.$$

i) Bestimmung derjenigen Punkte der M -Kurve, die zur Drehachse parallele Tangenten haben.

In solchen Punkten ist $\frac{dz}{dr} = \infty$. Bei der M -Kurve kann diese Bedingung nur erfüllt werden für:

$$2 r^2 (1 - 2 \cos^2 \beta) - (a_1^2 + a_2^2) + 2 \sqrt{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)} \equiv A = 0,$$

d. h.

$$r^4 - r^2 \frac{a_1^2 + a_2^2}{2 \sin^2 \beta} - \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta} \equiv B = 0.$$

Diese Gleichung hat eine negative und eine positive Wurzel in r^2 . Für die negative Wurzel wird r imaginär; die positive Wurzel lautet:

$$r_0^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4 \sin^2 \beta} + \sqrt{\frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{16 \sin^4 \beta} + \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}}.$$

Es muß aber r_0^2 die Gleichung $A = 0$ erfüllen, wenn in ihr die Wurzel mit positivem Vorzeichen genommen wird. Es muß also sein:

$$r_0^2 (1 - 2 \cos^2 \beta) - \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) \leq 0,$$

d. h.

$$\cos^2 \beta \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right).$$

Wenn diese Beziehung erfüllt ist, hat die M -Kurve für $r = r_0$ einen Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente. Dieser ist dann der der Drehachse am nächsten gelegene Punkt der M -Kurve. Denn für große Werte von r^2 wird B positiv, für kleine Werte von r^2 negativ. Da B nur eine positive Wurzel r_0^2 in r^2 hat, muß B im Intervall von 0 bis r_0^2 negativ sein. Ist aber B negativ, so ist auch der Radikand A negativ und z imaginär. Für $r^2 \geq r_0^2$ ist dagegen z stets reell, da $B \geq 0$ und damit auch $A \geq 0$ ist, und da $r_0^2 \geq a_2^2$ ist, wie eine kleine Nebenrechnung zeigt

4. Die M -Kurve weist auf Grund der Betrachtungen des vorangehenden Abschnittes 3 zwei verschiedene Formen auf:

α) Ist $\cos^2 \beta \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right)$, so hat die M -Kurve für $r = r_0$ einen Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente, aber keine Spitzen. Sie erstreckt sich von dem Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente aus ins Unendliche, sich der Asymptote nähernd (s. Fig. 4).

β) Ist $\cos^2 \beta \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$, so hat die M -Kurve für $r = a_2$ eine Spitze, aber keine Punkte mit zur Drehachse paralleler Tangente. Sie erstreckt sich von der Spitze aus ins Unendliche, sich der Asymptote nähernd (siehe Fig. 5).

Für

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$$

wird $r_0 = a_2$; die Spitzentangente wird zur Drehachse parallel.

Im Falle α) ist der Breitenkreis $r = r_0$ der Kehlkreis der zugehörigen Drehfläche; wir sprechen kurz von „*Flächen mit Kehlkreis*“. Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 6¹²⁾

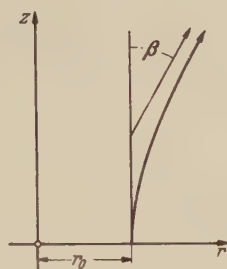


Fig. 4.

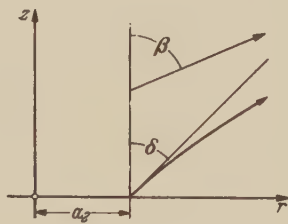


Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.

Im Falle β) ist der Breitenkreis $r = a_2$ Rückkehrkreis der zugehörigen Drehfläche; wir sprechen kurz von „*Flächen mit Rückkehrkreis*“. Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 7.

¹²⁾ Durch Drehung der M -Kurve um die Drehachse entsteht nur derjenige Teil der dargestellten Drehfläche, der auf der nämlichen Seite des Kehlkreises gelegen ist.

5. Die Gleichung der M -Kurve enthält nur die Quadrate der Konstanten a_1 und a_2 , welche die beiden Scharen von geodätischen Linien kennzeichnen. Es liegen daher auf jeder der erhaltenen Flächen zugleich mit einem Netz (a_1, a_2) drei weitere Netze $(-a_1, -a_2; -a_1, a_2; a_1, -a_2)$, die durch Spiegelungen der einzelnen Scharen an einer Meridianebene aus ihm hervorgehen¹³⁾. Es genügt daher, nur eines dieser Netze zu betrachten; wir nehmen demgemäß im folgenden $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ an, von dem Falle $a_1^2 = a_2^2$ abgesehen, der nur für $a_1 = -a_2$ sinnvoll ist. Die Netze $(-a_1, a_2; a_1, -a_2)$, die durch Spiegelung nur einer Schar aus dem ursprünglichen Netz hervorgehen und von diesem wesentlich verschieden sind, genügen also derselben Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ wie das ursprüngliche Netz. Da die gespiegelten Kurven in entsprechenden Punkten dieselben Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ besitzen wie die Ausgangskurven, so weisen auch die Netze $(-a_1, a_2; a_1, -a_2)$ dieselbe „Netzstruktur“ auf wie das Netz (a_1, a_2) .

Man kann allgemeiner zeigen, daß auf einer Drehfläche aus jedem beliebigen drehsymmetrischen Kurvennetz durch Spiegelung nur einer Schar an einer Meridianebene ein Kurvennetz mit derselben „Netzstruktur“ hervorgeht, sofern nur das Netz regulär ist. Die Struktur eines Netzes ist gegeben, wenn für jeden Flächenpunkt das Verhältnis $s'_1 : s'_2$ festgelegt ist, wobei s_1 und s_2 die Bogenlängen der beiden durch den Flächenpunkt gehenden Kurven sind. Ist nun das Netz regulär, so ist die Schar der Breitenkreise $r = \text{konst.}$ eine Diagonalkurvenschär des Netzes; die Bogenlängen s_1 und s_2 sind dann Funktionen von r allein. Wird nun eine Kurvenschar an einer Meridianebene gespiegelt, so bleibt ihre Bogenlänge als Funktion von r und damit auch das Verhältnis $s'_1 : s'_2$, d. h. die Netzstruktur unverändert. Das neue Netz ist daher ebenfalls regulär.

6. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der „*Flächen mit Kehlkreis*“ und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien. Die „*Flächen mit Kehlkreis*“ hängen von den Konstanten β, a_1^2 und a_2^2 ab, welche die Form der Flächen und die auf ihnen gelegenen Netze kennzeichnen. Um eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Flächen unterscheidet, als uninteressant zu eliminieren, setzen wir für den Kehlkreisradius $r_0 = 1$. Da nach 3 c) die Beziehungen gelten: $r^2 \geq a_2^2$ (wenn $a_2^2 > a_1^2$ ist) bzw. $r^2 > a_2^2$ (wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist), so ist wegen $r_0 = 1$ jetzt: $a_1^2 < 1, a_2^2 < 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Aus dem Clairautschen Satz $r \cdot \sin \alpha_i = a_i$ ($i = 1, 2$) folgt dann, daß die geodätischen Linien der ersten und der zweiten Schar des Netzes über die ganze Fläche verlaufen und den Kehlkreis $r_0 = 1$ schneiden, und daß sie im Schnittpunkt mit dem Meridian

¹³⁾ Vgl. S. 240.

die Winkel α_1 und α_2 bilden, für die $a_1 = \sin \alpha_1$, $a_2 = \sin \alpha_2$ ist (bzw. daß die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis berühren). Aus der Gleichung $A = 0$ (vgl. 3 i)) ergibt sich für $r_0 = 1$, $a_1 = \sin \alpha_1$, $a_2 = \sin \alpha_2$ die Beziehung:

$$(\alpha) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Ferner erhält man für die Krümmung $\frac{1}{\varrho_0}$ der M -Kurve, gemessen im Kehlkreis $r_0 = 1$:

$$(\alpha) \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} - 1.$$

Es bestimmen β und $1/\varrho_0$ die ∞^2 wesentlich voneinander verschiedenen, d. h. nicht zueinander ähnlichen „Flächen mit Kehlkreis“, von denen jede gemäß den beiden Gleichungen (α) gerade *ein* Netz trägt. Wir haben $a_2^2 \geq a_1^2$ angenommen. Es sei zunächst $a_2^2 = a_1^2$, d. h. $a_2 = -a_1$; dann ist $\beta = -\alpha_1 = \alpha_2$. Beide Scharen des Netzes gehen durch Spiegelung an einer Meridianebene auseinander hervor, also ist $\frac{1}{R_1} s'_1 = \frac{1}{R_2} s'_2$. Da außerdem das Netz der Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügt, kann es nur aus zwei Scharen von Geraden bestehen. In diesem (und nur in diesem) Falle ist die Fläche ein einschaliges Drehhyperboloid. Es sei nunmehr $a_2^2 > a_1^2$, also $\alpha_2 > \alpha_1$. Dann ergeben sich für die Konstanten α_1 , α_2 , β und $1/\varrho_0$, die durch die Gleichungen (α) miteinander verknüpft sind, folgende Bereiche:

$$\text{für } 0^\circ < \beta < 60^\circ: 0^\circ \leq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leq \arccos(2 \cos \beta - 1),$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta < \frac{1}{\varrho_0} \leq \frac{2(1 - \cos \beta)}{2 \cos \beta - 1},$$

$$\text{für } 60^\circ \leq \beta < 90^\circ: \arccos(2 \cos \beta) \leq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leq 90^\circ,$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta < \frac{1}{\varrho_0} \leq \infty.$$

Stets bedeuten $\alpha_1 = 0^\circ$ die Meridiane und $\alpha_2 = 90^\circ$ geodätische Linien, die den Kehlkreis berühren. In der Tafel B finden sich die „Flächen mit Kehlkreis“ links von der Trennungslinie.

7. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der „Flächen mit Rückkehrkreis“ und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze. Die „Flächen mit Rückkehrkreis“ hängen von den Konstanten β , a_1^2 und a_2^2 ab, welche die Form der Flächen und die auf ihnen gelegenen Netze kennzeichnen. Um wieder eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Flächen unterscheidet, als uninteressant zu eliminieren, setzen wir für den Radius des Rückkehrkreises $a_2 = 1$. Dann ist $a_1 < 1$ (vgl. 3 h)). Aus dem Clairautschen Satz $r \sin \alpha_i = a_i$ ($i = 1, 2$) folgt dann: Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes laufen über die ganze Drehfläche

hinweg und schneiden den Rückkehrkreis $a_2 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1 , für den $\sin \alpha_1 = \alpha_1$ ist. Die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Rückkehrkreis. Aus der Gleichung für den Winkel δ zwischen der Spitzentangente der M -Kurve und der Drehachse folgt dann:

$$(\beta) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha_1 \cos \delta.$$

Es bestimmen β und δ die ∞^2 wesentlich voneinander verschiedenen, d. h. nicht zueinander ähnlichen „Flächen mit Rückkehrkreis“, von denen jede gemäß Gleichung (β) gerade ein Netz trägt. Für die Konstanten α_1 , β , δ , die durch die Gleichung (β) verknüpft sind, ergeben sich folgende Bereiche:

$$60^\circ \leq \beta < 90^\circ, \quad 0^\circ \leq \alpha_1 \leq \arccos(2 \cos \beta),$$

$$0^\circ \leq \delta \leq \arccos(2 \cos \beta).$$

Es bedeuten wieder $\alpha_1 = 0^\circ$ die Meridiane und es bedeutet $\delta = 0^\circ$, daß die Spitzentangente achsenparallel wird. In der Tabelle B finden sich die „Flächen mit Rückkehrkreis“ rechts von der Trennungslinie.

8. Für $r_0 = a_2 = 1$ werden die unter $\alpha)$ und $\beta)$ besprochenen Fälle miteinander identisch. Dann ist $\alpha_2 = 90^\circ$ und $\delta = 0^\circ$; Kehlkreis und Rückkehrkreis fallen zusammen und werden von den geodätischen Linien der zweiten Schar berührt. Dementsprechend liegt in der Tabelle B in zwei Feldern, die längs der Trennungslinie zusammenstoßen, stets dasselbe Netz vor, einmal als Grenzfall der links behandelten Netze, das andere Mal als Grenzfall der rechts behandelten Netze.

9. Zusammenfassend können wir sagen:

Es gibt ∞^2 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche Drehflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“, „reguläres“ Vierecksnetz bilden, das der Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügt. Jede dieser ∞^2 Drehflächen trägt gerade ein Netz — wenn man von Spiegelungen an einer Meridianebene absieht. Die Meridiankurven der ∞^2 Drehflächen und die auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien weisen zwei grundsätzlich verschiedene Gestalten auf, vgl. Tabelle B mit Fig. 8 und 9.

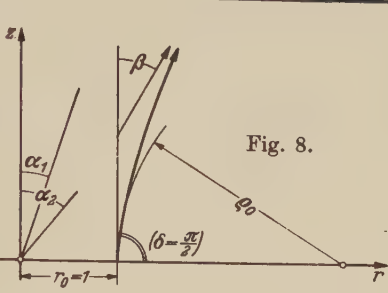
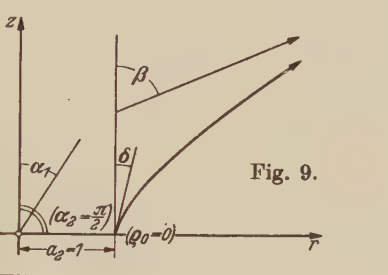
Linker Teil: *Flächen mit Kehlkreis* (vgl. Fig. 6). Die geodätischen Linien beider Scharen des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Kehlkreis $r_0 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2 (für $\alpha_2 = 90^\circ$ berühren die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis). Es ist:

$$(\alpha) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} - 1;$$

$\frac{1}{\varrho_0}$ ist die Krümmung der Meridiankurve, im Kehlkreis gemessen.

Tabelle B.

β	$1/\varrho_0 = \operatorname{tg}^2 \beta < 1/\varrho_0 <$ $\alpha_1 = \beta > \alpha_1 >$ $\alpha_2 = \beta < \alpha_2 <$ Netz der Erzeugenden eines Drehhyperboloides	$1/\varrho_0 = X(\beta)$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = Y(\beta)$ 1. Schar = Meridiane	 Fig. 8.			
0°	$1/\varrho_0 \rightarrow 0$ $\alpha_1 \rightarrow 0^\circ, \alpha_2 \rightarrow 0^\circ$ (Drehzylinder)		 Fig. 9.			
5°	$1/\varrho_0 \approx 0,01$ $\alpha_1 = 5^\circ$ $\alpha_2 = 5^\circ$	$1/\varrho_0 \approx 0,01$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 \approx 7^\circ$				
55°	$1/\varrho_0 \approx 2,04$ $\alpha_1 = 55^\circ$ $\alpha_2 = 55^\circ$	$1/\varrho_0 \approx 5,80$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 \approx 82^\circ$				
60°	$1/\varrho_0 \approx 3,0$ $\alpha_1 = 60^\circ$ $\alpha_2 = 60^\circ$	$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	$\delta = 0^\circ$ $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 90^\circ$			
65°	$1/\varrho_0 \approx 4,6$ $\alpha_1 = 65^\circ$ $\alpha_2 = 65^\circ$	$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 \approx 32^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	$\delta = 0^\circ$ $\alpha_1 \approx 32^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$		$\delta \approx 32^\circ$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	
85°	$1/\varrho_0 \approx 130$ $\alpha_1 = 85^\circ$ $\alpha_2 = 85^\circ$	$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 \approx 80^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	$\delta = 0^\circ$ $\alpha_1 \approx 80^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$		$\delta \approx 80^\circ$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	
90°	$1/\varrho_0 \rightarrow \infty$ $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ, \alpha_2 \rightarrow 90^\circ$ (Ebene)		$\delta = 0^\circ$ $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$		$\delta \rightarrow 90^\circ$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$ (Ebene)	
β	Netz der Erzeugenden $1/\varrho_0 = \operatorname{tg}^2 \beta < 1/\varrho_0 <$ $\alpha_1 = \beta > \alpha_1 >$ $\alpha_2 = \beta < \alpha_2 <$	2. Schar berührt den Kehlkreis $1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 = Z(\beta)$ $\alpha_2 = 90^\circ$	2. Schar berührt den Kehlkreis $\delta = 0^\circ$ $\alpha_1 = Z(\beta)$ $\alpha_2 = 90^\circ$	$< \delta <$ $> \alpha_1 >$ $= \alpha_2 =$	1. Schar = Meridiane $\delta = Z(\beta)$ $\alpha_1 = 0^\circ$ $\alpha_2 = 90^\circ$	

Rechter Teil: Flächen mit Rückkehrkreis (vgl. Fig. 7). Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes laufen über die ganze Drehfläche hinweg und schneiden den Rückkehrkreis $\alpha_2 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit

dem Meridian den Winkel α_1 . Die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Rückkehrkreis. Es ist:

$$(\beta) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \alpha_1 \cos \delta.$$

Es ist δ der Winkel zwischen Spitzentangente der Meridiankurve und Drehachse. (Für $\delta = 0^\circ$ wird der Rückkehrkreis zum Kehlkreis.)

Es wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$X(\beta) = \frac{2(1 - \cos \beta)}{2 \cos \beta - 1}, \quad Y(\beta) = \arccos(2 \cos \beta - 1),$$

$$Z(\beta) = \arccos(2 \cos \beta).$$

IV. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches“, „reguläres“ Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien der Bedingung

$$\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$$

genügen.

1. Wir hatten für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien auf den Schraubenflächen in Kap. II erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} (v^2 + h^2)^2 \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2} &= -a^2 v^2 f' \\ &- (v f'' (v^2 + h^2)^2 + h^2 v^2 f'^3 \\ &+ 2 h^2 f' (v^2 + h^2)) \frac{v^2 + h^2 - a^2}{v^2 + h^2 + v^2 f'^2} \\ &\pm 2 h a \sqrt{(v^2 + h^2 - a^2)(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}. \end{aligned}$$

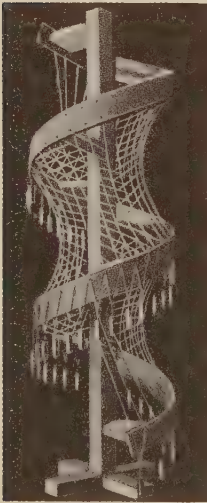
Ferner lautet die erste Grundform der Schraubenflächen für die geodätischen Linien:

Fig. 10:

$$s'^2 = v'^2 \frac{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}{v^2 + h^2 - a^2}.$$

2. Die Schraubenflächen, für die $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ ist¹⁴⁾, genügen dann der folgenden Differentialgleichung, wenn die beiden Scharen von ∞^1 durch

¹⁴⁾ Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 10.



Verschraubung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien wieder durch die Konstanten a_1 und a_2 gekennzeichnet werden:

$$\begin{aligned} v f'' (v^2 + h^2)^2 &= f'^3 (v^4 - h^2 v^2) + f' (v^4 - h^2 v^2 - 2 h^4) \\ &\quad - v^2 f' (v^2 + h^2 + v^2 f'^2) (v^2 + h^2) \frac{1}{(v^2 + h^2 - a_1^2) (v^2 + h^2 - a_2^2)} \\ &\quad \pm \frac{2h}{a_1 - a_2} \sqrt{(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)^3 \cdot (\sqrt{v^2 + h^2 - a_1^2} - \sqrt{v^2 + h^2 - a_2^2})}. \end{aligned}$$

Wie in Kapitel II schließt man aus dieser Differentialgleichung, daß unter den unendlich vielen Schraubenflächen, die durch Verschraubung der Meridiankurve $f = f(v)$ d. h. $z = f(r)$ um die z -Achse entstehen, und deren Meridiankurven denselben Anfangsbedingungen genügen, sich eine und nur eine befindet, auf der zwei vorgegebene Scharen von geodätischen Linien ein schraubensymmetrisches, reguläres Netz der verlangten Art bilden. Die Differentialgleichung ist wiederum in dem Spezialfall $a_1 = -a_2$ einfach lösbar. Davon wird im Teil C die Rede sein.

C. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \text{ und } \frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0 \text{ genügen.}$$

V. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“, „reguläres“ Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügen.

Aus diesen beiden Bedingungen folgt $s'_1 = s'_2$, d. h. das Netz besteht aus infinitesimalen Rhomben. Wir haben in Kapitel I gezeigt, daß die Drehfläche, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügt, das Drehhyperboloid ist. Da ferner die erste Grundform der Drehflächen für die beiden Scharen von geodätischen Linien $s_i'^2 = v^2 v'^2 \frac{1 + f'^2}{v^2 - a_i^2}$ (für $i = 1, 2$) lautet, führt die weitere Bedingung $s'_1 = s'_2$ zur Gleichung $a_1 = -a_2$, die auf einem vorgegebenen Drehhyperboloid ein zu einer Meridianebene spiegelbildliches Netz von geodätischen Linien kennzeichnet. Dieses Netz ist aber wegen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ das Netz der Erzeugenden.

Wir haben somit den Satz:

Das einzige „drehsymmetrische“, „reguläre“ Netz aus zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien auf einer Drehfläche, das den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügt, ist das aus infinitesimalen Rhomben bestehende Netz der Erzeugenden des Drehhyperboloides.

VI. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches“, „reguläres“ Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$, somit auch der Bedingung $s'_1 = s'_2$ genügen.

1. Für die Schraubenflächen, die den Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ bzw. $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügen, haben wir in Kapitel II und IV zwei Differentialgleichungen erhalten. Sollen beide Beziehungen zugleich erfüllt sein, so ist wegen $s'_{1,2} = v'^2 \frac{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}{v^2 + h^2 - a_{1,2}^2}$ und $s'_1 = s'_2$ auch $a_1 = -a_2 = a$. In diesem Spezialfall sind die beiden erwähnten Differentialgleichungen identisch und können auf die folgende Form gebracht werden:

$$f'' = \left(\frac{v^2 - 2h^2}{v(v^2 + h^2)} - \frac{v}{v^2 + h^2 - a^2} \right) f' + \left(\frac{v^3 - h^2 v}{(v^2 + h^2)^2} - \frac{v^3}{(v^2 + h^2)(v^2 + h^2 - a^2)} \right) f'^3.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich auf eine Bernoullische Differentialgleichung zurückführen und liefert für die Meridianfunktion $f = f(v)$:

$$f = \pm \int \frac{1}{v} \sqrt[+]{\frac{(v^2 + h^2)^3}{c v^4 + (c h^2 - c a^2 - h^2 - a^2) v^2 - h^4}} dv^{15)},$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$, $v = r$ gesetzt, die Meridiankurve der gesuchten Schraubenfläche dar.

2. Die Meridiankurve der gesuchten Schraubenfläche, die wir nunmehr untersuchen wollen, ist zur r -Achse spiegelbildlich; es genügt daher, ihren Verlauf im ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes (r, z) zu betrachten. Diesen im ersten Quadranten gelegenen Teil der Meridiankurve

$$z = \int \frac{1}{r} \sqrt[+]{\frac{(r^2 + h^2)^3}{c r^4 + (c h^2 - c a^2 - h^2 - a^2) r^2 - h^4}} dr$$

wollen wir im folgenden kurz „ M -Kurve“ nennen.

¹⁵⁾ Die Konstante c sei stets reell. Für komplexes c erhält man keine reelle Kurve.

a) Die Konstante c kann nur positive Werte annehmen, und es ist $r^2 > a^2 - h^2$. Begründung: Der Nenner A des Radikanden, der auf die Form gebracht werden kann:

$$A \equiv cr^2(r^2 + h^2 - a^2) - (h^2 + a^2)r^2 - h^4$$

muß ≥ 0 sein. Es ist also zunächst der Fall $c = 0$ unmöglich. Ist ferner c positiv, so wird auch A stets positiv, sofern nur r^2 genügend große Werte annimmt, jedenfalls aber $r^2 > a^2 - h^2$ ist. Ist dagegen c negativ, so kann A nur für $r^2 + h^2 - a^2 < 0$ positiv werden; dann gibt es aber auf der zugehörigen Fläche keine geodätischen Linien, wie man aus ihrer Gleichung (vgl. Kapitel II) ersieht. Von diesem Fall $c < 0$ sehen wir daher ab.

b) Die M -Kurve hat eine stets reelle Asymptote; bildet sie mit der Schraubungsachse den Winkel β , so ist:

$$\cotg \beta = \frac{dz}{dr} \Big|_{r=\infty} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

c) Die M -Kurve hat keinen Punkt mit zur Schraubungsachse senkrechter Tangente

d) Die M -Kurve hat einen Punkt $r = r_0$ mit zur Schraubungsachse paralleler Tangente. Begründung: In solchen Punkten ist $\frac{dz}{dr} = \infty$. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden für:

$$cr^4 + (ch^2 - ca^2 - h^2 - a^2)r^2 - h^4 \equiv A = 0.$$

Diese Gleichung hat eine negative und eine positive Wurzel in r^2 . Für erstere wird r imaginär. Letztere lautet:

$$r_0^2 = \frac{-ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2 + \sqrt{c^2(h^2 - a^2)^2 + 2c(h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2}}{2c}.$$

Dieser Punkt $r = r_0$ der M -Kurve hat eine achsenparallele Tangente und ist zugleich der der Schraubungsachse am nächsten gelegene Punkt. Denn für große Werte von r^2 wird A positiv, und für genügend kleine Werte von r^2 wird A negativ. Da A nur eine positive Wurzel r_0^2 in r^2 hat, muß A im Intervall von 0 bis zu dieser Wurzel r_0^2 negativ sein. Ist aber A negativ, so wird in der Gleichung der M -Kurve der Radikand negativ. Im Intervall von r_0^2 bis $+\infty$ ist dann A positiv und die M -Kurve stets reell.

e) Für die Krümmung der M -Kurve erhält man:

$$\frac{1}{\rho} = r \frac{\sqrt{r^2 + h^2} (2ch^3 + ca^2 + h^3 + a^2)r^4 + (2ch^4 - 2ch^2a^2 - 2h^2a^2)r^2 - h^6}{\{(c+1)r^6 + (ch^2 - ca^2 + 2h^2 - a^2)r^4 + 2h^4r^2 + h^6\}^{3/2}}.$$

f) Die M -Kurve hat keine Wendepunkte. Begründung: Da in einem Wendepunkt $\frac{1}{\rho} = 0$ ist, kann die M -Kurve Wendepunkte nur für

$$r^4 (2ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2) + r^2 (2ch^4 - 2ch^2a^2 - 2h^2a^2) - h^6 = 0$$

haben. Diese Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel in r^2 . Die negative Wurzel scheidet aus, die positive kann auf die Form gebracht werden:

$$r^2 = \frac{ca^2 - ch^2 + a^2 + \sqrt{c^2(h^2 - a^2)^2 + 2c(h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2 - (c+1)h^2a^2}}{2c + c\frac{a^2}{h^2} + 1 + \frac{a^2}{h^2}}.$$

Da wir aber für den der Schraubungsachse am nächsten gelegenen Punkt der M -Kurve

$$r_0^2 = \frac{-ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2 + \sqrt{c^2(h^2 - a^2)^2 + 2c(h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2}}{2c}$$

erhalten haben, so entsprechen wegen $r^2 < r_0^2$ den angegebenen Werten von r^2 keine reellen Punkte der M -Kurve.

g) Die M -Kurve hat keine Rückkehrpunkte. Begründung: In einem Rückkehrpunkt ist $\varrho = 0$. Dieser Fall kann nur eintreten für:

$$(c+1)r^6 + (ch^2 - ca^2 + 2h^2 - a^2)r^4 + 2h^4r^2 + h^6 = 0,$$

d. h.

$$r^4(r^2 + h^2 - a^2) + \frac{h^3}{c+1}r^4 + \frac{2h^4}{c+1}r^2 + \frac{h^6}{c+1} = 0.$$

Da nach a) stets $r^2 + h^2 - a^2 > 0$ ist, kann diese Gleichung durch keinen reellen Wert von r befriedigt werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die M -Kurve die in Fig. 11 angedeutete Form hat¹⁶⁾.

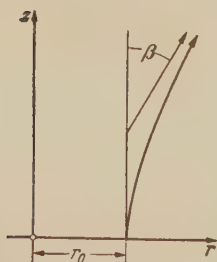


Fig. 11.

3. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der erhaltenen Schraubenflächen und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien. Die Meridiankurve unserer Schraubenfläche hängt bei vorgegebener Ganghöhe h von den Konstanten $c = \operatorname{tg}^2 \beta$ und a^2 ab. Die Konstante a^2 kennzeichnet zugleich das Netz der geodätischen Linien. Wir wollen wieder nur diejenigen Schraubenflächen betrachten, deren Form verschieden ist, die also nicht zueinander ähnlich sind. Hierzu setzen wir für den

Abstand r_0 der Kehlschraubenlinie von der Schraubungsachse im folgenden $r_0 = 1$. Die unter 2 d) angegebene Gleichung $A = 0$ liefert für $r_0 = 1$ eine Bedingungsgleichung zwischen $\operatorname{tg}^2 \beta$ und a^2 , welche lautet:

$$(*) \quad \operatorname{tg}^2 \beta (1 + h^2 - a^2) = h^4 + h^2 + a^2.$$

¹⁶⁾ Sie ist nur dann der Halbast einer Hyperbel, wenn die Schraubenfläche in eine Drehfläche ($h = 0$) ausartet.

Es gibt also bei vorgegebener Ganghöhe h stets ∞^1 formverschiedene Schraubenflächen, deren Form durch den Asymptotenwinkel β gekennzeichnet ist. Auf jeder dieser Flächen gibt es gerade ein Netz von geodätischen Linien, das durch die Konstante a^2 gekennzeichnet ist. Auf einer solchen Schraubenfläche, welche wegen $r^2 > a^2 - h^2$ (vgl. 2a) und $r_0 = 1$ nur für $1 + h^2 > a^2$ reell vorhanden ist, gilt längs einer geodätischen Linie die Gleichung:

$$\sqrt[+]{r^2 + h^2} \cdot \sin \alpha = a.$$

Da ferner die beiden Scharen von geodätischen Linien durch die Konstanten $a_1 = a$ und $a_2 = -a$ gekennzeichnet sind, so sind die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien die Winkelhalbierenden der beiden Scharen. Ferner ist:

$$a_1 = \sqrt[+]{1 + h^2} \cdot \sin \alpha_0, \quad a_2 = \sqrt[+]{1 + h^2} \cdot \sin (-\alpha_0),$$

wenn α_0 und $-\alpha_0$ die Winkel sind, die die geodätischen Linien der beiden Scharen in den Punkten der Kehlschraubenlinie $r = 1$ mit den orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien bilden. Die Gleichung (*) kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(\alpha) \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + h^2} \cos^2 \alpha_0.$$

Es ist daher: $h^2 \leq \operatorname{tg}^2 \beta \leq \infty$.

4. Wir betrachten die Grenzfälle $\operatorname{tg}^2 \beta = h^2$ und $\operatorname{tg}^2 \beta = \infty$.

Im Falle $\operatorname{tg}^2 \beta = h^2$ wird $a = 0$; beide Scharen von geodätischen Linien fallen mit den zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien, die ja auch geodätische Linien sind, zusammen. In diesem Falle ($c = h^2$, $a = 0$) läßt sich das Integral in der Gleichung der Meridiankurve auswerten; man erhält:

$$z = \frac{1}{h} \sqrt{r^2 - 1} + h \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{r^2 - 1}.$$

Man kann zeigen, daß auf der zugehörigen Schraubenfläche die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien Gerade sind, die zur Achse windschief sind. *Die — nicht abwickelbare — Fläche wird also erzeugt durch Verschraubung einer zur Schraubungsachse windschiefen Geraden; dabei beschreiben alle Punkte der Geraden Schraubenlinien, die auf ihr senkrecht stehen.*

Im Falle $\operatorname{tg}^2 \beta = \infty$ wird $c = \infty$ und daher $f \equiv 0$. Wir haben die *gemeine Wendelfläche*, also eine Minimalfläche. Wegen $f \equiv 0$ gilt hier die Gleichung (α) nicht mehr. Man sieht jedoch, daß die beiden Forderungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ für $a_1 = -a_2$ stets erfüllt sind. Im Gegensatz zu den vorher betrachteten Schraubenflächen trägt also die gemeine Wendelfläche nicht nur ein Netz, sondern ∞^1 Netze von geodätischen Linien, deren Winkelhalbierenden die zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien sind.

Zusammenfassend können wir sagen:

Es gibt ∞^1 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche Schraubenflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches“, „reguläres“ Vierecksnetz bilden, das den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügt, mithin aus infinitesimalen Rhomben besteht. Jede dieser ∞^1 Schraubenflächen, deren Meridiankurven die in obestehender Figur angedeutete Gestalt haben, trägt ein Netz, dessen Winkelhalbierende die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien sind. Als Spezialfälle erhalten wir eine — nicht abwickelbare — Schraubenfläche, die durch Verschraubung einer zur Achse windschiefen Geraden entsteht, wobei die Bahnschraubenlinien auf den Geraden senkrecht stehen, und beide Scharen des Netzes mit der Geraden schar zusammenfallen; ferner die gemeine Wendelfläche, also eine Minimalfläche, die im Gegensatz zu allen anderen Schraubenflächen ∞^1 Netze der verlangten Art trägt.

VII. Das Problem bei den Minimalflächen.

Unter den Flächen, die den Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügen, befindet sich — wie im letzten Kapitel gezeigt wurde — eine Minimalfläche, die gemeine Wendelfläche. Es liegt daher nahe zu fragen, ob es noch andere Minimalflächen gibt, die diesen beiden Bedingungen genügen.

Wir wollen zunächst nach Minimalflächen fragen, die nur die erste der beiden angegebenen Bedingungen erfüllen. Wir bestimmen also diejenigen

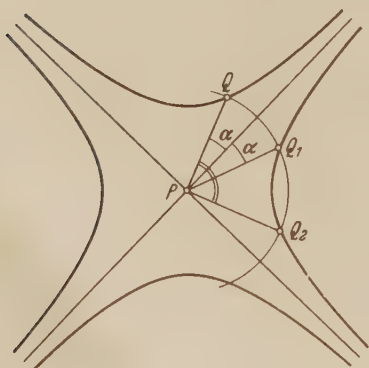


Fig. 12.

Minimalflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

1. Auf einer beliebigen Fläche ist die Krümmung einer geodätischen Linie gleich ihrer Normalkrümmung. Ist Q ein Punkt der Indikatrix in einem beliebigen Flächenpunkt P , so ist $\frac{1}{\sqrt{PQ}}$

die Normalkrümmung einer in Richtung $\overline{PQ}$ verlaufenden Flächenkurve. Für jede Minimalfläche besteht die Indikatrix aus zwei kongruenten gleichseitigen Hyperbeln. Sollen daher

gemäß unserer Fragestellung zwei geodätische Linien in einem Punkt einer Minimalfläche entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, so müssen ihre Normalkrümmungen entgegengesetzt gleich sein, d. h. (vgl. Fig. 12) die geodätischen Linien müssen entweder aufeinander senkrecht stehen oder mit einer Asymptotenrichtung gleiche Winkel bilden¹⁷⁾.

Der *erste* Fall ist unmöglich. Nach einem Satz von Liouville¹⁸⁾ sind Flächen mit zwei Scharen von geodätischen Linien, die sich unter konstantem Winkel schneiden, abwickelbar. Dieser Fall führt daher auf abwickelbare Minimalflächen, d. h. auf die Ebene und scheidet daher aus.

Im *zweiten* Fall sind die Asymptotenlinien die Winkelhalbierenden der beiden Scharen von geodätischen Linien oder auch ihrer orthogonalen Trajektorien, d. h. zweier Scharen von geodätischen Parallelen. Es kann aber allgemein die erste Grundform einer beliebigen Fläche, auf der zwei beliebige Scharen geodätischer Parallelen als Parameterlinien $u_1 = \text{konst.}$, $v_1 = \text{konst.}$ gewählt sind, auf die Form $s'^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega} (u_1'^2 + v_1'^2 + 2 u_1' v_1' \cos \omega)$ gebracht werden¹⁹⁾; die beiden Scharen geodätischer Parallelen bilden wegen $E_1 = G_1 = \frac{1}{\sin^2 \omega}$ stets ein infinitesimales Rhombennetz, wobei ω der Winkel zwischen den Netzkurven ist. Wenn nun außerdem bei unserer gesuchten Minimalfläche die Asymptotenlinien die Winkelhalbierenden der geodätischen Parallelen sein sollen, so müssen sie die Diagonalkurven des infinitesimalen Rhombennetzes dieser Scharen von geodätischen Parallelen sein. Wir wollen nun für die gesuchte Minimalfläche als neue Parameterkurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ die Asymptotenlinien einführen gemäß $\bar{U}(u) = \frac{1}{2}(u_1 + v_1)$, $\bar{V}(v) = \frac{1}{2}(u_1 - v_1)$. Als neue Grundgrößen ergeben sich dann: $E = \frac{\bar{U}'^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}$, $F = 0$, $G = \frac{\bar{V}'^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$, $L = 0$, $N = 0$. Da sich auf den Minimalflächen die Asymptotenlinien stets in der Form eines infinitesimalen Quadratnetzes anordnen lassen²⁰⁾, können wir über $\bar{U}(u)$ und $\bar{V}(v)$ so verfügen, daß $E = G$ und damit $= \bar{U}'^2 + \bar{V}'^2$ wird. Schreiben wir noch zur Abkürzung $\bar{U}'^2(u) = U(u)$ und $\bar{V}'^2(v) = V(v)$, so lauten jetzt die Grundgrößen²¹⁾:

$$E = G = U(u) + V(v), \quad F = L = N = 0.$$

¹⁷⁾ Vgl. S. Finsterwalder, a. a. O., S. 68.

¹⁸⁾ Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, Band II, S. 437.

¹⁹⁾ Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, Band II, S. 434.

²⁰⁾ D. h. die Asymptotenlinien bilden ein Isothermennetz, vgl. Scheffers, Theorie der Flächen, Satz 132, S. 317.

²¹⁾ Vgl. auch Darboux, Théorie des surfaces, Band III, S. 16.

2. Damit es nun überhaupt eine Fläche mit diesen Grundgrößen gibt, müssen die Grundgleichungen erfüllt sein. In unserem Falle lauten die Codazzi-Mainardischen Gleichungen $\frac{\partial M}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial v} = 0$, d. h. $M = h = \text{konst.}$ und das Gaußsche Theorema egregium $U'' + V'' - \frac{U'^2 + V'^2}{U + V} = 2h^2$. Eine hier weggelassene Zwischenrechnung zeigt, daß aus der letzten Gleichung notwendig folgt, daß eine der Funktionen $U(u)$ oder $V(v)$ konstant, also etwa $V(v) = 0$ ist. Da aber dann die Grundgrößen $E = G = U(u)$, $F = L = N = 0$, $M = h$ nur Funktionen eines Parameters sind, muß die gesuchte Minimalfläche eine Dreh- oder Schraubenfläche sein. Zu ihrer genaueren Bestimmung setzen wir noch $U(u) u'^2 = u_0'^2$, $v'^2 = v_0'^2$; dann wird $U(u) = U_0(u_0)$, und die Grundgrößen lauten:

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= 0, & G &= U_0(u_0), \\ L &= 0, & M &= \frac{h}{\sqrt{U_0(u_0)}}, & N &= 0. \end{aligned}$$

Für diese Grundgrößen lautet das Theorema egregium:

$$2U_0 U_0'' - U_0'^2 = 4h^2, \quad \text{d. h.} \quad U_0(u_0) = c^2(u_0 + C)^2 + \frac{h^2}{c^2},$$

wo c und C die Integrationskonstanten sind. Die Fläche mit diesen Grundgrößen hat die Gleichung:

$$\begin{cases} \varphi = c v_0 \\ r = u_0 + C \\ z = \frac{h v_0}{c} \end{cases}$$

und ist die *gemeine Wendelfläche*.

3. Wir fassen das Ergebnis dieses Kapitels in dem folgenden Satz zusammen: Die einzige Minimalfläche, die ein Netz von geodätischen Linien trägt, das der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügt, ist die Wendelfläche, und zwar sind die Asymptotenlinien (Schraubenlinien und geradlinige Erzeugende) die Winkelhalbierenden der beiden Scharen von Netzkurven.

Im vorangehenden Kapitel haben wir den folgenden Satz bewiesen: Die Wendelfläche trägt ∞^1 Netze von geodätischen Linien, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen, und deren Winkelhalbierende die Asymptotenlinien (Schraubenlinien und geradlinige Erzeugende) sind. Außerdem genügen diese Netze — als reguläre Netze — auch der Bedingung $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$, bestehen also aus infinitesimalen Rhomben²²⁾.

²²⁾ Vgl. hierzu: A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte d. Bayr. Akademie 36 (1906), S. 247.

Diese beiden Ergebnisse liefern die folgenden Sätze:

a) Die einzige Minimalfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien ein Vierecksnetz bilden, das den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s'_1 + \frac{1}{R_2} s'_2 = 0$ genügt (also aus infinitesimalen Rhomben besteht), ist die Wendelschraubenfläche; es gibt auf ihr ∞^1 solche Netze, deren Winkelhalbierenden die Schraubenlinien und die geradlinigen Erzeugenden sind, die also schraubensymmetrisch und regulär sind.

b) Diese Wendelfläche ist aber auch die einzige Minimalfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien Netze bilden, die nur der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen; diese Netze ergeben sich als dieselben schraubensymmetrischen Netze wie vorher unter a), jedoch brauchen sie nicht mehr notwendig regulär zu sein.

(Eingegangen am 23. Dezember 1937.)

Lösung von Randwertproblemen bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation*.

Von

Hans Knieß in Karlsruhe.

•

§ 1.

Einleitung.

Für die *Anfangswertprobleme* bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gibt es eine zuerst vor etwa 15 Jahren von G. Doetsch angegebene Methode¹⁾, die sich der Laplace-Transformation

$$(1) \quad u(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} U(t) dt \equiv \mathfrak{L}\{U\}$$

bedient. Sie beruht auf folgender fundamentalen Eigenschaft dieser Transformation

$$(2) \quad \mathfrak{L}\{U^{(n)}\} = s^n \mathfrak{L}\{U\} - U(0)s^{n-1} - \dots - U^{(n-1)}(0),$$

kraft deren bei Anwendung der Laplace-Transformation auf eine Differentialgleichung für U die Ableitungen von U nach t entfernt werden, wogegen die „Anfangswerte“ $U(0)$, $U'(0)$, ... in die neue, transformierte Gleichung für $\mathfrak{L}\{U\} = u(s)$ eintreten. Eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird so auf eine algebraische Gleichung, eine partielle Differentialgleichung, die noch andere Variable als t enthält, auf eine Differentialgleichung mit geringerer Variablenzahl reduziert. Außerdem sind nunmehr die Anfangsbedingungen automatisch berücksichtigt. Durch Umkehrung der Laplace-Transformation findet man aus der Lösung der reduzierten Gleichung die der ursprünglichen. Diese Methode liefert u. a. eine exakte Begründung des symbolischen Heavisidekalküls²⁾.

Für *Randwertprobleme* gab es bis vor kurzem (abgesehen von einem unten zu erwähnenden Spezialfall) weder einen symbolischen Kalkül noch eine geeignete Methode aus der Theorie der Funktionaltransformationen.

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität zu Freiburg i. B. als Dissertation (D 25) angenommen.

¹⁾ Siehe die ausführliche Darstellung dieser Theorie in G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Berlin 1937), V. Teil.

²⁾ I. c.¹⁾, 18. Kap., § 3 und 24. Kapitel.

Eine solche wurde erst 1935 von G. Doetsch³⁾ angegeben. Handelt es sich um das Intervall $-l \leq x \leq +l$, so wird die für ganzzahlige m zu bildende Transformation

$$(3) \quad u(m) = \int_{-l}^{+l} e^{-im\frac{\pi}{l}x} U(x) dx \equiv \mathfrak{F}\{U\}$$

angewandt, die „endliche Fourier-Transformation“ genannt wird und mit der Bildung der (komplexen) Fourier-Koeffizienten von $U(x)$ gleichbedeutend ist. Sie hat ähnlich wie die Laplace-Transformation die Eigenschaft, die Ableitung nach x zu entfernen, wobei jetzt die „Randwerte“ von U an den Intervallenden auftreten:

$$(4) \quad \mathfrak{F}\{U^{(v)}\} = \left(im\frac{\pi}{l}\right)^v \mathfrak{F}\{U\} + (-1)^m \left[U^{(v-1)}(l) - U^{(v-1)}(-l) \right. \\ \left. + im\frac{\pi}{l} (U^{(v-2)}(l) - U^{(v-2)}(-l)) + \dots + \left(im\frac{\pi}{l}\right)^{v-1} (U(l) - U(-l)) \right].$$

Auch hier werden gewöhnliche Differentialgleichungen in algebraische, partielle Differentialgleichungen in solche mit geringerer Variablenzahl transformiert, wobei die Randwerte automatisch berücksichtigt werden. Doetsch hat die Methode am Beispiel einer partiellen Differentialgleichung, der Wärmeleitungsgleichung, durchgeführt. Dabei ist ein eigentümliches Vorkommnis zu erwähnen: Die Ableitungen nach der zu transformierenden Variablen x kommen in der partiellen Differentialgleichung bis zur 2. Ordnung vor, in der transformierten Gleichung treten also die Randwerte von U und von U' auf. In dem dort behandelten Problem sind aber nur die Randwerte von U gegeben. Um die nichtgegebenen Randwerte von U' zu eliminieren, denkt sich Doetsch das Problem im Intervall $0 \leq x \leq l$ gegeben und die Lösungsfunktion dann als *ungerade* Funktion in das Intervall $-l \leq x \leq 0$ fortgesetzt. Dadurch wird $U'_x(-l) = U'_x(+l)$, so daß in (4) der auf die erste Ableitung bezügliche Term fortfällt. Nach einer mündlichen Mitteilung von G. Doetsch aus dem Jahre 1935 kann man statt dessen, da für eine ungerade Funktion

$$\int_{-l}^{+l} e^{-im\frac{\pi}{l}x} U(x) dx = -2i \int_0^l \sin m\frac{\pi}{l}x U(x) dx$$

³⁾ Siehe G. Doetsch, Integration von Differentialgleichungen mittels der endlichen Fourier-Transformation, Math. Annalen **112** (1935), S. 52–68. Das Prinzip dieser Arbeit wurde von Doetsch schon 1932 in einem Vortrag in Zürich angegeben. [Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül); abgedruckt im Jahresber. DMV. **43** (1934), S. 238–251.]

ist auch direkt im Intervall $0 \leq x \leq l$ die „endliche Sinustransformation“

$$(5) \quad u(m) = \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x U(x) dx \equiv \mathfrak{S}\{U\}$$

bzw. in Fällen, wo die Fortsetzung als gerade Funktion angebracht wäre, die „endliche Cosinustransformation“

$$(6) \quad u(m) = \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x U(x) dx \equiv \mathfrak{C}\{U\}$$

anwenden.

Die vorliegende Arbeit setzt sich als Hauptzweck, diese Methode auf *Systeme* von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und beliebigen Störungsfunktionen unter *Randbedingungen* anzuwenden. Die Ergebnisse werden genau so einfach und übersichtlich sein wie die durch die symbolische Methode bzw. die Laplace-Transformation gelieferten Resultate in dem Falle, daß *Anfangsbedingungen* gegeben sind. Unsere Resultate sind daher gerade für die praktische Anwendung besonders brauchbar, z. B. lassen sich gewisse Randwertprobleme der Elektrotechnik auf diese Weise überaus einfach erledigen. Für den Spezialfall, daß die Randwerte verschwinden und die Störungsfunktion in jeder Gleichung dieselbe ist, hat vor einigen Jahren L. Fantappiè, übrigens von einem elektrotechnischen Problem ausgehend, einen Kalkül entwickelt, der mit einem dem speziellen Charakter der Aufgabe angepaßten Operator arbeitet⁴⁾. Abgesehen davon, daß diese Methode nur auf jenen Spezialfall zugeschnitten ist und tiefere Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der Operatoren erfordert, wird in der Arbeit von Fantappiè die Frage der Eigenwerte und Eigenfunktionen, die bei Randwertproblemen naturgemäß eine wichtige Rolle spielt und von uns eingehend behandelt wird, nicht erörtert.

In § 2 stellen wir die später gebrauchten grundlegenden Eigenschaften der cos- und sin-Transformation zusammen, § 3 erläutert die Anwendungen auf Differentialgleichungen an einigen einfachen Beispielen, in § 4 behandeln wir das Randwertproblem für ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Als Anhang fügen wir eine Tabelle von zusammengehörigen Funktionen $U(x)$ und $u(m)$ an, die besonders bei der Rückübersetzung der Lösung der reduzierten Gleichung in die der ursprünglichen Gleichung gute Dienste leistet.

⁴⁾ Luigi Fantappiè, Risoluzione esplicita di un sistema differenziale interessante l'elettrotecnica, mediante il calcolo degli operatori lineari. Reale accademia d'Italia; memorie della classe di scienze fisiche matematiche e naturali 4 (1933), S. 55—69.

§ 2.

Eigenschaften der endlichen cos- bzw. sin-Transformation.

Die Eigenschaften der endlichen Fourier-Transformation 1.3 sind in der unter 3) zitierten Arbeit ausführlich behandelt. Wir nennen sie hier ohne Beweise, soweit sie nicht schon in § 1 erwähnt sind, und stellen ihnen die Eigenschaften der endlichen cos- bzw. sin-Transformation gegenüber. Um die Darstellung abkürzen zu können, meinen wir hier Integrabilität immer im Sinne von Lebesgue; Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, sollen nicht als verschieden gelten.

1. Transformation der Ableitungen.

Bei der Transformation der Ableitungen gerät man manchmal aus der cos- in die sin-Transformation hinein und umgekehrt; doch tritt dieser störende Umstand bei Ableitungen geradzahlgiger Ordnung nicht auf.

cos-Transformation.

Wenden wir die cos-Transformation auf die 1. Ableitung an, so ergibt sich für integrables U' :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\{U'\} &= \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x U'(x) dx = \cos m \frac{\pi}{l} x U(x) \Big|_0^l + m \frac{\pi}{l} \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x U(x) dx \\ &= (-1)^m U(l) - U(0) + m \frac{\pi}{l} \mathfrak{S}\{U\}.\end{aligned}$$

Dagegen ist

$$(1) \qquad \mathfrak{C}\{U''\} = (-1)^m U'(l) - U'(0) - m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \mathfrak{C}\{U\}.$$

Allgemein transformieren sich geradzahlige Ableitungen nach folgendem, durch wiederholte partielle Integration zu beweisenden

Satz 1. Existiert $U^{(2v)}$ in $0 < x < l$, ist $U^{(2v-1)}$ in den Endpunkten 0, l stetig und $U^{(2v)}$ integabel, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\{U^{(2v)}(x)\} &= (-1)^m U^{(2v-1)}(l) - U^{(2v-1)}(0) \\ &\quad - \left(m \frac{\pi}{l}\right)^2 [(-1)^m U^{(2v-3)}(l) - U^{(2v-3)}(0)] + \dots \\ &\quad + (-1)^{v-1} \left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2v-2} [(-1)^m U'(l) - U'(0)] \\ &\quad + \left(-m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^v \mathfrak{C}\{U(x)\}.\end{aligned}$$

sin-Transformation.

Analog wie bei der cos-Transformation erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\{U'\} &= \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x U(x) \\ &= \sin m \frac{\pi}{l} x U(x) \Big|_0^l - m \frac{\pi}{l} \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x U(x) dx = -m \frac{\pi}{l} \mathfrak{C}\{U\},\end{aligned}$$

$$(2) \quad \mathfrak{S}\{U''\} = -m \frac{\pi}{l} [(-1)^m U(l) - U(0)] - m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \mathfrak{S}\{U\};$$

allgemein für ganzzahlige Ableitungen den

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\{U^{(2v)}(x)\} &= -m \frac{\pi}{l} [(-1)^m U^{(2v-2)}(l) - U^{(2v-2)}(0)] \\ &\quad + \left(m \frac{\pi}{l}\right)^3 [(-1)^m U^{(2v-4)}(l) - U^{(2v-4)}(0)] - + \dots \\ &\quad + (-1)^v \left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2v-1} [(-1)^m U(l) - U(0)] \\ &\quad + \left(-m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^v \mathfrak{S}\{U(x)\}\end{aligned}$$

2. Transformation der Faltung.

Ist $U_1(x)$ in $-2l \leq x \leq +2l$, $U_2(x)$ in $-l \leq x \leq +l$ beschränkt und eigentlich integrabel bzw. nicht beschränkt, aber quadratisch integrabel, so wird als „Faltung“ von $U_1(x)$ und $U_2(x)$ definiert:

$$U_1 \underset{-l}{*}^{+l} U_2 \equiv \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi) U_2(\xi) d\xi$$

Ist U_1 periodisch mit der Periode $2l$, so gilt für die endliche Fourier-Transformation der Faltungssatz:

$$\mathfrak{F}\{U_1 \underset{-l}{*}^{+l} U_2\} = \mathfrak{F}\{U_1\} \mathfrak{F}\{U_2\}.$$

Die Faltung ist wegen der Unsymmetrie der Voraussetzungen nicht kommutativ; sie wird es, wenn für U_2 dieselben Voraussetzungen gelten wie für U_1 . Das Faltungsintegral ist stetig.

Da nicht jede Fourier-Transformation als cos- bzw. sin-Transformation geschrieben werden kann, gibt es für letztere mehrere Faltungssätze. Wir beweisen den

Satz 3. *Sind U_1 und U_2 gerade Funktionen und ist U_1 periodisch mit der Periode $2l$, so ist*

$$\mathfrak{C}\{\frac{1}{2} U_1 \underset{-l}{*}^{+l} U_2\} = \mathfrak{C}\{U_1\} \mathfrak{C}\{U_2\}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}\{U_1\}\mathfrak{C}\{U_2\} &= \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} v U_1(v) dv \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} w U_2(w) dw \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \cos m \frac{\pi}{l} v U_1(v) dv \cdot \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \cos m \frac{\pi}{l} w U_2(w) dw \\
 &= \frac{1}{4} \iint \cos m \frac{\pi}{l} v \cos m \frac{\pi}{l} w U_1(v) U_2(w) dv dw \\
 &= \frac{1}{8} \iint \cos m \frac{\pi}{l} (v+w) U_1(v) U_2(w) dv dw \\
 &\quad + \frac{1}{8} \iint \cos m \frac{\pi}{l} (v-w) U_1(v) U_2(w) dv dw,
 \end{aligned}$$

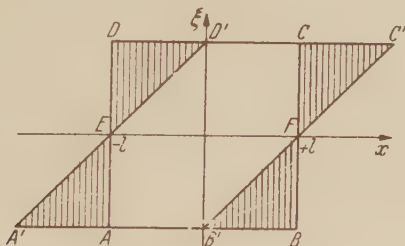
die Doppelintegrale erstreckt über das Quadrat $-l \leq v \leq +l$, $-l \leq w \leq +l$ ($ABCD$ in der Figur). Wir substituieren im ersten Integral

im zweiten $v+w=x$, $w=\xi$,

und erhalten: $v-w=x$, $w=-\xi$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{8} \iint \cos m \frac{\pi}{l} x U_1(x-\xi) U_2(\xi) dx d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{8} \iint \cos m \frac{\pi}{l} x U_1(x-\xi) U_2(-\xi) dx d\xi,
 \end{aligned}$$

beide Integrale erstreckt über das Parallelogramm $-l \leq x-\xi \leq +l$, $-l \leq \xi \leq +l$ ($A'B'C'D'$)



Wegen der Periodizität von U_1 kann man das Dreieck $A'AE$ durch $B'BF$ und $FC'C$ durch $ED'D$ ersetzen. Die über $ABCD$ erstreckten Doppelintegrale kann man aber wieder als iterierte Integrale schreiben. Wegen $U_2(-\xi) = U_2(\xi)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{8} \int_{-l}^{+l} \cos m \frac{\pi}{l} x dx \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi) U_2(\xi) d\xi - \frac{1}{8} \int_{-l}^{+l} \cos m \frac{\pi}{l} x dx \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi) U_2(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-l}^{+l} \cos m \frac{\pi}{l} x dx \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi) U_2(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Da die Faltung zweier gerader Funktionen wieder eine gerade Funktion ist ⁵⁾, kann man hierfür schreiben:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x dx \int_{-l}^{+l} U_1(x - \xi) U_2(\xi) d\xi,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Die anderen Faltungssätze sind:

Satz 4. Sind U_1 und U_2 ungerade und ist U_1 periodisch mit der Periode $2l$, so ist

$$\mathfrak{C} \left\{ \frac{1}{2} U_1 \star_{-l}^{+l} U_2 \right\} = \mathfrak{S} \{U_1\} \mathfrak{S} \{U_2\}.$$

Satz 5. Ist U_1 gerade und periodisch mit der Periode $2l$, U_2 ungerade, so ist

$$\mathfrak{S} \left\{ \frac{1}{2} U_1 \star_{-l}^{+l} U_2 \right\} = \mathfrak{C} \{U_1\} \mathfrak{S} \{U_2\}.$$

Satz 6. Ist U_1 ungerade und periodisch mit der Periode $2l$, U_2 gerade, so ist

$$\mathfrak{S} \left\{ \frac{1}{2} U_1 \star_{-l}^{+l} U_2 \right\} = \mathfrak{S} \{U_1\} \mathfrak{C} \{U_2\}.$$

Die Beweise verlaufen nach dem Schema des Beweises zu Satz 3.

Zusatz. In allen vier Faltungssätzen ist die Faltung kommutativ, sobald auch U_2 periodisch mit der Periode $2l$ ist; Beweis wie in der unter ³⁾ zitierten Arbeit. — Satz 4 und 5 besagen in diesem Fall natürlich dasselbe.

3. Umkehrung.

Die Transformationen 1. 3, 1. 5 und 1. 6 lassen sich auf alle Funktionen anwenden, die im Grundintervall integrierbar sind. Die Umkehrungen lauten:

$$U(x) = \frac{1}{2l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m) e^{im \frac{\pi}{l} x} \equiv \mathfrak{F}^{-1} \{U\},$$

$$U(x) = \frac{u(0)}{l} + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} u(m) \cos m \frac{\pi}{l} x \equiv \mathfrak{C}^{-1} \{U\} \quad \text{für} \quad U(-x) = U(x)$$

$$U(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} u(m) \sin m \frac{\pi}{l} x \equiv \mathfrak{S}^{-1} \{U\} \quad \text{für} \quad U(-x) = -U(x).$$

$$\begin{aligned} {}^5) \Phi(x) &\equiv \int_{-l}^{+l} U_1(x - \xi) U_2(\xi) d\xi = - \int_{+l}^{-l} U_1(x + \xi) U_2(-\xi) d\xi \\ &= \int_{-l}^{+l} U_1(x + \xi) U_2(\xi) d\xi = \int_{-l}^{+l} U_1(-x - \xi) U_2(\xi) d\xi \equiv \Phi(-x) \end{aligned}$$

Nach den klassischen Sätzen über Fourier-Reihen sind diese Umkehrungen richtig, wenn U von beschränkter Variation ist oder wenn die Reihen gleichmäßig konvergieren. Versteht man die Darstellungen der Funktion durch die Reihen jedoch im Sinne der Mittelkonvergenz, so gelten sie nach Plancherel, wenn

I. $U(x)$ im Grundintervall quadratisch integrierbar
oder

$$\text{II. } \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u^2(m) \text{ bzw. } \sum_{m=1}^{\infty} u^2(m) \text{ konvergent}$$

ist, wobei diese beiden Bedingungen völlig miteinander äquivalent sind. Die Zuordnung der U zu den u ist bei unseren Voraussetzungen eineindeutig.

§ 3.

Anwendung der endlichen cos- bzw. sin-Transformation auf einfachste Randwertprobleme.

In nachstehenden Beispielen werden unsere Transformationen an einfachsten Randwertproblemen ausprobiert. Die Lösungen sind wohlbekannt; es kommt uns zunächst nur auf die Vorführung der Methode an. Wir beschränken uns dabei auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen keine ersten Ableitungen vorkommen, weil unsere Methode genau dieser Art von Problemen angepaßt ist. Für die Rücktransformation der im Resultatbereich gefundenen Lösungen wird jeweils auf die Tabelle verwiesen; z. B. bedeutet II. 4: Formel 4 der Tabelle II. Wie bisher werden Objektfunktionen mit großen, zugehörige Resultatfunktionen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet.

1. Gesucht im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ die Lösung der Differentialgleichung

$$Y'' + Y + 1 = 0$$

mit den Randbedingungen $Y'(0) = 1 = -Y'(\pi)$. Da die Randwerte der Ableitung vorgegeben sind, ist nach 2. 1 die cos-Transformation zuständig. Die „Übersetzung“ ergibt:

$$(-1)^{m+1} - 1 - m^2 y + y = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0 \\ -\pi & \text{für } m = 0, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$y = \begin{cases} 2 - \pi & \text{für } m = 0 \\ \text{beliebig} & \text{für } m = 1 \\ \frac{(-1)^{m+1} - 1}{m^2 - 1} & \text{für } m \geq 2. \end{cases}$$

Wir setzen $y = y_1 + y_2 + y_3$ mit

$$y_1 = \begin{cases} \frac{(-1)^{m+1} - 1}{m^2 - 1} & \text{für } m \neq 1 \\ 0 & \text{für } m = 1, \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} -\pi & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0, \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} k' = k \frac{\pi}{2} & \text{für } m = 1 \text{ } (k = \text{const.}) \\ 0 & \text{für } m \neq 1. \end{cases}$$

Dann gehört zu y_1 nach I. 6 die Objektfunktion $\sin x$, zu y_2 : -1 , zu y_3 : $k \cos x$. Demnach stellt

$$Y = \sin x + k \cos x - 1 \quad (k \text{ beliebig})$$

die Lösungen der Randwertaufgabe dar (also unendlich viele).

2. Eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels zeigt, wie man die Fourier-Koeffizienten einer Funktion bekommen kann, ohne in der üblichen, manchmal recht umständlichen Weise ein Integral auswerten zu müssen. Die Funktion $\sin \alpha x$ läßt sich, wenn α keine ganze Zahl ist, im Intervall $\langle -\pi, +\pi \rangle$ bekanntlich durch die Fouriersche $\sin$ -Reihe

$$\sin \alpha x = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{\alpha^2 - 1} - \frac{2 \sin 2x}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\alpha^2 - 3^2} - + \dots \right)$$

(vgl. II. 4) darstellen. Eine für ganzzahliges α gültige Darstellung (natürlich als $\cos$ -Reihe, da $\sin$ -Reihe und Funktion in diesem Fall dasselbe sind) erhält man folgendermaßen: Wir kehren unsere Methode um; statt von einer zu lösenden Differentialgleichung auszugehen, die Resultatfunktion zu bestimmen und die zugehörige Objektfunktion zu suchen, gehen wir von einer gegebenen Objektfunktion aus, bilden eine passende Differentialgleichung, der sie genügt, transformieren diese und finden dann die gesuchten Fourier-Koeffizienten als Resultatfunktion. Für Berechnung von Tabellen z. B. ist dieses Prinzip sehr vorteilhaft.

Um also die $\cos$ -Reihe von $\sin \alpha \frac{\pi}{l} x$ (α ganzzahlig reell) für das Intervall $\langle 0, l \rangle$ oder, was dasselbe ist, die Fourier-Koeffizienten der geraden Funktion $\frac{1}{2} \left| \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right|$ im Intervall $\langle -l, +l \rangle$ zu bekommen, wenden wir etwa auf die Differentialgleichung

$$Y'' + \left(\alpha \frac{\pi}{l} \right)^2 Y = 0,$$

die für die Randbedingungen $Y'(0) = \alpha \frac{\pi}{l}$, $Y'(l) = (-1)^\alpha \alpha \frac{\pi}{l}$ die Lösung $\sin \alpha \frac{\pi}{l} x$ hat, die $\cos$ -Transformation an. Es ergibt sich:

$$\alpha \frac{\pi}{l} [(-1)^{m+\alpha} - 1] - \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 y + \left(\alpha \frac{\pi}{l} \right)^2 y = 0,$$

also

$$y = \frac{l\alpha[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi(m^2-\alpha^2)}.$$

Dies ist I. 6. Den Wert für $m = \alpha$ bekommt man auf diese Weise nicht; doch sieht man ohne Rechnung, daß das Integral $\int_0^l \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \sin \alpha \frac{\pi}{l} x dx$ den Wert 0 hat. — Da $\sin \alpha \frac{\pi}{l} x$ von beschränkter Variation und stetig mit den Randwerten 0 ist, stellt die Fourier-Reihe überall die Funktion dar.

Die Rekursionsformeln am Schluß der Tabellen sind ebenfalls nichts weiter als nach diesem Prinzip übersetzte Differentialgleichungen.

3. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$(1) \quad Y'' = c Y + \Phi.$$

Hierin ist c eine beliebige reelle oder komplexe Konstante, Φ sei eine stetige Funktion, das zugrunde gelegte Intervall sei $0 \leq x \leq l$. Da Y'' zufolge der Differentialgleichung integrierbar ist, läßt sich die endliche sin-Transformation ohne weiteres anwenden und liefert die algebraische Gleichung

$$(2) \quad -y(m) \left(c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) = \varphi(m) + m \frac{\pi}{l} [(-1)^m Y(l) - Y(0)].$$

I. Homogener Fall. Gleichung (2) sei zunächst homogen, d. h.

$$\varphi(m) = -m \frac{\pi}{l} [(-1)^m Y(l) - Y(0)].$$

$\varphi(m)$ muß als Fourier-Koeffizient mit wachsendem m beliebig klein werden (Riemann-Lebesguesches Lemma), also muß $Y(l) = Y(0) = 0$, mithin $\varphi(m) \equiv 0$ und $\Phi(x) \equiv 0$ sein. Wir haben also zunächst das Ergebnis: Eine homogene algebraische Gleichung im Resultatbereich ergibt sich dann und nur dann, wenn das Randwertproblem im Objektbereich ebenfalls homogen ist in dem Sinne, daß $\Phi(x) \equiv 0$ und $Y(0) = Y(l) = 0$ ist.

Ist nun $c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \neq 0$ ($m = 1, 2, \dots$), d. h. $\frac{l}{\pi} \sqrt{-c} = \alpha$ nicht ganzzahlig reell, so muß $y(m) \equiv 0$ sein; (1) hat also dann keine Lösung außer der trivialen $Y \equiv 0$. Ist aber α ganzzahlig reell $\neq 0$, so kann $y(m)$ für den einen Wert α seines Arguments, wo es nicht zu verschwinden braucht, gleich einer beliebigen Konstanten $k' = k \cdot \frac{l}{2}$ gesetzt werden. Dazu gehört die Objektfunktion $k \sin \alpha \frac{\pi}{l} x$; da k jede Zahl sein kann, haben wir also unendlich viele Lösungen.

II. Inhomogener Fall. Nun sei (2) inhomogen, d. h.

$$\varphi(m) + m \frac{\pi}{l} [(-1)^m Y(l) - Y(0)] \neq 0;$$

entweder ist also $\varphi(m) \neq 0$ oder $Y(0) \neq Y(l)$ oder beides. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Wenn $\frac{l}{\pi} \sqrt{-c} = \alpha$ nicht ganzzahlig reell oder gleich 0 ist ($m = 0$ kommt bei der sin-Transformation nicht vor), dann gibt es genau eine Lösung

$$y(m) = -\frac{\varphi(m)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} - \frac{m \frac{\pi}{l} (-1)^m Y(l)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} + \frac{m \frac{\pi}{l} Y(0)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}}.$$

Die Objektfunktionen zu den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich angeben. Nach I. 1 ist

$$\mathfrak{C}^{-1} \left\{ \frac{1}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \right\} = \mathfrak{C}^{-1} \left\{ -\frac{l}{\pi \sqrt{-c}} \frac{\frac{l}{\pi} \sqrt{-c}}{m^2 - \left(\frac{l}{\pi} \sqrt{-c} \right)^2} \right\} = \begin{cases} \frac{\cos \sqrt{-c} (l-x)}{\sqrt{-c} \sin l \sqrt{-c}} & \text{für } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\cos \sqrt{-c} (l+x)}{\sqrt{-c} \sin l \sqrt{-c}} & \text{für } -l \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(die Objektfunktion muß gerade sein). Bezeichnen wir diese Funktion mit $G(x)$ und setzen wir $\Phi(x)$ ungerade in das Intervall $\langle -l, 0 \rangle$ fort, so ist nach Faltungssatz 5:

$$\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{-\varphi(m)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \right\} = \frac{1}{2} G(x) \underset{-l}{*}^+ \Phi(x).$$

Ferner ist

$$\text{nach II. 4} \quad \mathfrak{S}^{-1} \left\{ -\frac{m (-1)^m Y(l)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \right\} = \frac{Y(l) \sin x \sqrt{-c}}{\sin l \sqrt{-c}},$$

$$\text{nach II. 1} \quad \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{m \frac{\pi}{l} Y(0)}{c + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \right\} = \frac{Y(0) \sin \sqrt{-c} (l-x)}{\sin l \sqrt{-c}}.$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) lautet also:

$$Y = \frac{1}{2} G(x) \underset{-l}{*}^+ \Phi(x) + \frac{Y(l) \sin x \sqrt{-c}}{\sin l \sqrt{-c}} + \frac{Y(0) \sin \sqrt{-c} (l-x)}{\sin l \sqrt{-c}}.$$

Für $c = 0$ ist der Grenzwert dieser Lösung für $c \rightarrow 0$ zu nehmen, da Y wegen der Konvergenz von $\sum_1^\infty y^2(m)$ quadratisch integrierbar, die endliche Fourier-Transformation im Gebiet der quadratisch integrierbaren Funktionen aber bekanntlich stetig ist. -- Bei der Auswertung des Faltungsintegrals ist darauf zu achten, daß der Integrand periodisch mit der Periode $2l$ sein muß, wodurch in der Regel eine Zerlegung nötig wird.

B. Ist schließlich $\frac{l}{\pi} \sqrt{-c} = \alpha$ ganzzahlig reell ($\neq 0$), so gibt es im allgemeinen überhaupt keine Lösung. Wenn jedoch in (2) die rechte Seite für den kritischen Wert $m = \alpha$ ebenfalls verschwindet, wenn also

(3)
$$\varphi(\alpha) + \alpha \frac{\pi}{l} [(-1)^\alpha Y(l) - Y(0)] = 0$$

ist, so kann $y(\alpha)$ jeden beliebigen Wert haben. Es gibt also dann unendlich viele Lösungen, nämlich:

$$y(m) = \begin{cases} \frac{\varphi(m) + m \frac{\pi}{l} [(-1)^m Y(l) - Y(0)]}{\alpha^2 - m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} & \text{für } m \neq \alpha, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = \alpha. \end{cases}$$

Falls $Y(0) = Y(l) = 0$ ist, besagt die notwendige und hinreichende Bedingung (3), daß $\varphi(\alpha) = 0$ sein muß. Das bedeutet, daß $\Phi(x)$ orthogonal zur Lösung der homogenen Gleichung, d. h. daß

$$\int_0^l \Phi(\xi) \sin \alpha \frac{\pi}{l} \xi d\xi = 0$$

ist. Bei inhomogenen Randbedingungen jedoch besagt (3), daß $\varphi(\alpha)$ gleich einer gewissen linearen Kombination der Randwerte sein muß.

Die Objektfunktion $Y = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \sin m \frac{\pi}{l} x y(m)$ existiert sicher im Sinne der Mittelkonvergenz, da wegen $y(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ die Reihe $\sum_1^\infty y^2(m)$ konvergiert. Der Faltungssatz ist hier nicht ohne weiteres anwendbar, da $\varphi(m)$ nicht als Faktor von $y(m)$ auftritt und der Bruch im allgemeinen nicht in Summanden zerlegt werden kann. Die Willkür des Wertes von $y(\alpha)$ bedeutet natürlich nichts anderes als die bekannte Tatsache, daß man sämtliche Lösungen eines (lösbaren) inhomogenen Randwertproblems dadurch erhält, daß man zu sämtlichen Lösungen des homogenen Problems ein partikuläres Integral des inhomogenen addiert.

Da wir im nächsten Paragraphen bei Systemen genau dieselben Verhältnisse antreffen werden, geben wir zur besseren Übersicht für die Anzahl der Lösungen folgendes aus der allgemeinen Theorie der Randwertaufgaben geläufige

Schema.

	$\frac{l}{\pi} \sqrt{-c}$ nicht ganzzahlig reell	$\frac{l}{\pi} \sqrt{-c}$ ganzzahlig reell $\neq 0$
Homogenes Problem	Keine Lösung (außer der trivialen)	Unendlich viele Lösungen
Inhomogenes Problem	Eine Lösung	Im allgemeinen: Keine Lösung; bei Zusatzbedingung (3): Unendlich viele Lösungen

§ 4.

Anwendung auf Systeme.

Besonders praktisch ist unsere Methode für die Behandlung von Systemen. Je nach Art des Problems ist die eine oder die andere Transformation brauchbar: Die endliche sin-Transformation paßt zu Systemen, bei denen nur geradzahlige Ableitungen und Randwerte von solchen (einschließlich der nullten, der Funktion selbst) vorkommen, die endliche cos-Transformation zu Problemen, in denen nur geradzahlige Ableitungen und Randwerte von ungeradzahligen vorkommen. Bei der endlichen Fourier-Transformation können beliebige Ableitungen zugelassen werden, doch ist man dafür in der Wahl der Randwerte eingeschränkt⁶⁾.

Wir demonstrieren die Methode an einem einfachen System von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, beliebigen Randwerten und beliebigen Störungsfunktionen, das in der Elektrotechnik eine Rolle spielt:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} &= c_{11} Y_1(x) + c_{12} Y_2(x) + \dots + c_{1n} Y_n(x) + \Phi_1(x), \\ \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} &= c_{21} Y_1(x) + c_{22} Y_2(x) + \dots + c_{2n} Y_n(x) + \Phi_2(x), \\ &\vdots \\ \frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} &= c_{n1} Y_1(x) + c_{n2} Y_2(x) + \dots + c_{nn} Y_n(x) + \Phi_n(x). \end{aligned}$$

Hierin sei $n \geq 2$, denn den Fall $n = 1$ haben wir eben als letztes Beispiel in § 3 erledigt. Die Randbedingungen seien

$$Y_p(0) = A_p, \quad Y_p(l) = B_p \quad (p = 1, 2, \dots, n);$$

die Störungsfunktionen $\Phi_p(x)$ seien stetig.

Kraft der Differentialgleichungen (1) sind die Ableitungen $Y_p''(x)$ integrierbar. Die Anwendung der endlichen sin-Transformation ergibt im Resultatbereich das algebraische System:

$$(2) \quad \begin{aligned} (c_{11} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}) y_1(m) + c_{12} y_2(m) + \dots + c_{1n} y_n(m) &= m \frac{\pi}{l} [A_1 - (-1)^m B_1] - \varphi_1(m), \\ c_{21} y_1(m) + (c_{22} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}) y_2(m) + \dots + c_{2n} y_n(m) &= m \frac{\pi}{l} [A_2 - (-1)^m B_2] - \varphi_2(m), \\ &\dots \dots \dots \\ c_{n1} y_1(m) + c_{n2} y_2(m) + \dots + (c_{nn} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2}) y_n(m) &= m \frac{\pi}{l} [A_n - (-1)^m B_n] - \varphi_n(m). \end{aligned}$$

⁶⁾ Der Kunstgriff von Doetsch, siehe Einleitung und l. c.³⁾, S. 60, muß anwendbar sein.

Für die Lösung dieses Systems ist entscheidend das Verhalten der Koeffizientenmatrix:

$$\left| \Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right| \equiv \begin{vmatrix} c_{11} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 \end{vmatrix}$$

Die Determinante $\Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ ist ein Polynom n -ten Grades in $\left(m \frac{\pi}{l} \right)^2$, wobei m die Werte $1, 2, \dots$ durchläuft. Die n Nullstellen $\alpha'_k = \left(\alpha_k \frac{\pi}{l} \right)^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$) von Δ sind die *Eigenwerte* der Matrix; da über die c nichts vorausgesetzt ist, können die α_k ganz oder nicht ganz, reell oder komplex sein. Wie im Falle $n = 1$ unterscheiden wir:

1. Homogener Fall.

Ist (1) homogen, d. h. $A_p = B_p = 0$ und $\Phi_p(x) \equiv 0$, so gilt natürlich dasselbe für (2), aber auch umgekehrt: Aus

$$m \frac{\pi}{l} [A_p - (-1)^m B_p] - \varphi_p(m) \equiv 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

folgt wie vorhin, daß $A_p = B_p = 0$, also $\varphi_p(m) \equiv 0$ und $\Phi_p(x) \equiv 0$ sein muß. Die Beschaffenheit der Lösungen hängt von der Natur der Eigenwerte $\left(\alpha_k \frac{\pi}{l} \right)^2$ ab.

A. Die α_k seien nicht ganz oder 0. Dann ist Δ für alle m von 0 verschieden, und als Lösungssystem erhalten wir nur das triviale

$$Y_p(x) \equiv 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

B. Unter den Eigenwerten seien auch solche mit ganzzahligem $\alpha_k (\neq 0)$; es gebe deren r ($1 \leq r \leq n$), die wir mit $\left(m_k \frac{\pi}{l} \right)^2$ bezeichnen wollen ($k = 1, 2, \dots, r$). Die Determinante Δ ist für alle $m \neq m_k$ von 0 verschieden, demnach ist $y_p(m)_{m \neq m_k} = 0$ ($p = 1, 2, \dots, n$). Etwas von 0 Verschiedenes erhält man dagegen an den Stellen $m = m_k$, und zwar in bekannter Weise in Abhängigkeit vom Rang ϱ der Matrix $\left| \Delta \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right|$. Für diesen Rang gilt die Abschätzung $\varrho \geq n - \lambda$, wenn $m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}$ eine λ -fache Nullstelle von Δ ist. Denn an dieser Stelle ist die λ -te Ableitung von Δ ungleich 0; diese ist

aber ⁷⁾ gleich $\lambda! \sum_{v=1}^{\binom{n}{\lambda}} \Delta_v^{(n-\lambda)} \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$, worin die Δ_v die Hauptminoren

⁷⁾ Vgl. etwa Perron, Lehrb. d. Algebra I (Leipzig 1927), S. 94.

$(n - \lambda)$ -ten Grades von $\Delta \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ sind. Da diese Summe $\neq 0$ sein soll, muß mindestens ein Hauptminor $(n - \lambda)$ -ten Grades $\neq 0$ sein, d. h. es muß gelten $\varrho \geq n - \lambda$. Für $\lambda = 1$, wenn also die fraglichen Eigenwerte alle einfach sind, folgt hieraus $\varrho = n - 1$. In diesem Fall ist

$$y_p(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq m_k \\ q \Delta_p^{(k)} (q \text{ beliebig}) & \text{für } m = m_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

wobei die $\Delta_p^{(k)}$ die Unterdeterminanten einer Zeile sind, in der sie nicht sämtlich verschwinden. Die Objektfunktionen dazu sind:

$$Y_p(x) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^r q \Delta_p^{(k)} \sin m_k \frac{\pi}{l} x.$$

Bei mehrfachen Nullstellen kann es vorkommen, daß $\varrho < n - 1$ ist. Ein Beispiel liefert das System

$$Y_1'' = -Y_1,$$

$$Y_2'' = -4Y_2,$$

$$Y_3'' = Y_1 - 4Y_3.$$

Die zugehörige Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} m^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 - 4 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 - 4 \end{array} \right\|$$

hat für den einfachen Eigenwert $m_1 = 1$ den Rang 2, für den doppelten Eigenwert $m_2 = 2$ den Rang 1. Das Lösungssystem ist

$$Y_1 = 3k_1 \sin x,$$

$$Y_2 = k_2 \sin 2x,$$

$$Y_3 = k_1 \sin x + k_3 \sin 2x,$$

wobei k_1, k_2, k_3 beliebige Konstanten sind. — Da bei $\varrho < n - 1$ zu viele Unterfälle vorkommen können, ist eine allgemeine Behandlung zu weit-schweifig; der Einzelfall läßt sich natürlich mit unseren Mitteln stets erledigen

2. Inhomogener Fall.

Jetzt sei das System (2) inhomogen, d. h.

$$m \frac{\pi}{l} [A_p - (-1)^m B_p] - \varphi_p(m) \neq 0$$

für wenigstens ein p . Wir unterscheiden wieder:

A. In den Eigenwerten $\left(\alpha_k \frac{\pi}{l}\right)^2$ seien die α_k nicht ganz oder 0. Dann ist $\Delta \neq 0$ für alle m , und wir erhalten genau eine Lösung. Diese heißt nach der Cramerschen Regel:

$$y_p(m) = \frac{m \frac{\pi}{l} \Delta_p^{(1)} \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)} + \frac{(-1)^m m \frac{\pi}{l} \Delta_p^{(2)} \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)} + \frac{\Delta_p^{(3)} \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)}$$
$$= y_p^{(1)} + y_p^{(2)} + y_p^{(3)}.$$

Dabei ist

$$\Delta_p^{(1)} = (-1)^{n+p} \begin{vmatrix} c_{11} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2} & c_{12} & \dots c_{1p-1} & -A_1 & c_{1p+1} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2} & \dots c_{2p-1} & -A_2 & c_{2p+1} \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots c_{pp-1} & -A_p & c_{pp+1} \dots & c_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots c_{np+1} & -A_n & c_{np+1} \dots c_{nn} + m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \end{vmatrix}$$

in $\Delta_p^{(2)}$ stehen in der p -ten Spalte die Zahlen $B_1, B_2, \dots B_n$, in $\Delta_p^{(3)}$ die $\varphi_p(m)$. Entwickelt man $\Delta_p^{(3)}$ nach den Elementen der p -ten Spalte:

$$\Delta_p^{(3)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta_{ip}^{(3)},$$

so sind alle vorkommenden Δ Polynome in $\left(m \frac{\pi}{l}\right)^2$. Das Nennerpolynom ist vom Grade n , die Zählerpolynome sind sämtlich vom Grade $n - 1$.

Wir nehmen zunächst an, alle Nullstellen von Δ seien einfach. Zerlegt man die drei $y_p(m)$ in bekannter Weise in Partialbrüche, so gibt jede Nullstelle $\left(\alpha_k \frac{\pi}{l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$) Veranlassung zu Partialbrüchen für $y_p^{(1)}, y_p^{(2)}, y_p^{(3)}$ der Form

$$\frac{l}{\pi} \frac{b_{pk} m}{m^2 - \alpha_k^2}, \quad \frac{l}{\pi} \frac{c_{pk} (-1)^m m}{m^2 - \alpha_k^2}, \quad \frac{l}{\pi} \frac{\alpha_k \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}^{(p)} \varphi_i(m)}{m^2 - \alpha_k^2},$$

worin $b_{pk}, c_{pk}, d_{ik}^{(p)}$ Konstanten (gewisse Determinanten) sind. Dann ist

$$y_p(m) = \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_{pk} m}{m^2 - \alpha_k^2} + \frac{c_{pk} (-1)^m m}{m^2 - \alpha_k^2} + \sum_{i=1}^n \varphi_i(m) \frac{d_{ik}^{(p)} \alpha_k}{m^2 - \alpha_k^2} \right)$$

die Lösung im Resultatbereich. Die auftretenden Partialbrüche haben nun gerade die Form der im Falle $n = 1$ gefundenen Resultatfunktionen, so daß wir die Lösung im Objektbereich sofort anschreiben können:

$$Y_n(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{b_{pk} \sin \alpha_k \left(\pi - \frac{\pi}{l} x\right)}{\sin \alpha_k \pi} - \frac{c_{pk} \sin \alpha_k \frac{\pi}{l} x}{\sin \alpha_k \pi} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_{ik}^{(p)} G_k(x) {}^{+l}_{-l} \Phi_i(x) \right\}$$

mit

$$G_k(x) = \begin{cases} \frac{\cos \alpha_k \left(\pi + \frac{\pi}{l} x \right)}{\sin \alpha_k \pi} & \text{für } -l \leq x \leq 0, \\ \frac{\cos \alpha_k \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{\sin \alpha_k \pi} & \text{für } 0 \leq x \leq l; \end{cases}$$

die $\Phi_i(x)$ sind ungerade ins Intervall $\langle -l, 0 \rangle$ fortgesetzt. Für $\alpha_k = 0$ ist der Grenzwert $\alpha_k \rightarrow 0$ zu bilden.

Treten unter den Eigenwerten auch mehrfache auf, so gibt es andere Resultatfunktionen. Im Falle doppelter Nullstellen etwa erhalten wir außer den bisherigen noch Partialbrüche der Form

$$\frac{l^2}{\pi^2} \frac{e_{pk} m (m^2 + \alpha_k^2)}{(m^2 - \alpha_k^2)^2} = \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{2 e_{pk} m \alpha_k^2}{(m^2 - \alpha_k^2)^2} + \frac{e_{pk} m}{m^2 - \alpha_k^2} \right) \quad \text{für } y_p^{(1)},$$

$$\frac{l^2}{\pi^2} \frac{f_{pk} (-1)^m (m^2 + \alpha_k^2) m}{(m^2 - \alpha_k^2)^2} = \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{2 f_{pk} (-1)^m m \alpha_k^2}{(m^2 - \alpha_k^2)^2} + \frac{f_{pk} (-1)^m m}{m^2 - \alpha_k^2} \right) \quad \text{für } y_p^{(2)},$$

$$\frac{l^2}{\pi^2} \frac{g_{ik}^{(p)} (m^2 + \alpha_k^2)}{(m^2 - \alpha_k^2)^2} \varphi_p(m) \quad \text{für } y_p^{(3)},$$

(e, f, g Konstante), wozu nach II. 2, II. 1, II. 5, II. 4, I. 2 und Faltungssatz 5 die Objektfunktionen

$$\begin{aligned} & - \frac{e_{pk}}{\sin \alpha_k \pi} \left(\alpha_k x \cos \alpha_k \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right) + \frac{\alpha_k l \sin \alpha_k \frac{\pi}{l} x}{\sin \alpha_k \pi} - \frac{l}{\pi} \sin \alpha_k \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right) \right), \\ & \frac{f_{pk}}{\sin \alpha_k \pi} \left(- \alpha_k x \cos \alpha_k \frac{\pi}{l} x + \alpha_k l \cotg \alpha_k \pi \sin \alpha_k \frac{\pi}{l} x - \frac{l}{\pi} \sin \alpha_k \frac{\pi}{l} x \right), \\ & \frac{g_{ik}^{(p)}}{\sin \alpha_k \pi} \cdot \frac{1}{2} F(x)_{-l}^{+l} \Phi(x) \end{aligned}$$

mit

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \alpha_k \left(\pi + \frac{\pi}{l} x \right) - \frac{l \cos \alpha_k \frac{\pi}{l} x}{\sin \alpha_k \pi} & \text{für } -l \leq x \leq 0, \\ -x \sin \alpha_k \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right) - \frac{l \cos \alpha_k \frac{\pi}{l} x}{\sin \alpha_k \pi} & \text{für } 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

gehören. Bei Nullstellen höherer, allgemein r -facher ($r \leq n$) Vielfachheit treten wie bisher sin- und cos-Funktionen auf, multipliziert mit Polynomen $(r-1)$ -ten Grades in x . Je nach Beschaffenheit der α_k können die trigonometrischen natürlich in Wahrheit auch hyperbolische Funktionen oder auch einfache Exponentialfunktionen sein. Die Art der Eigenwerte $\left(\alpha_k \frac{\pi}{l} \right)^2$ hängt

offenbar nur von den Koeffizienten c ab; bilden diese eine symmetrische Matrix, so sind die Eigenwerte bekanntlich alle reell, es treten in der Lösung also nur trigonometrische Funktionen auf.

B. Schließlich sollen unter den Eigenwerten von $|\Delta|$ auch solche mit ganzzahligem $\alpha_k \neq 0$ vorkommen ($k = 1, 2, \dots, r$). Dann hat unser inhomogenes System (2) in der Regel *keine* Lösung, weil die Cramersche Relation

$$\Delta \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) y_p(m) = \Delta_p \left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$$

worin Δ_p folgende mit $(-1)^{n+p}$ multiplizierte Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} c_{11} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 & c_{12} & \dots & c_{1p-1} & m \frac{\pi}{l} [A_1 - (-1)^m B_1] - \varphi_1(m) & c_{1p+1} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 & \dots & c_{2p-1} & m \frac{\pi}{l} [A_2 - (-1)^m B_2] - \varphi_2(m) & c_{2p+1} \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pp-1} & m \frac{\pi}{l} [A_p - (-1)^m B_p] - \varphi_p(m) & c_{pp+1} \dots & c_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np-1} & m \frac{\pi}{l} [A_n - (-1)^m B_n] - \varphi_n(m) & c_{np+1} \dots c_{nn} + \left(m \frac{\pi}{l} \right)^2 \end{vmatrix},$$

für $m = \alpha_k = m_k$ im allgemeinen keinen Sinn hat. Jedoch existieren Lösungen dann und nur dann, wenn

$$\Delta_p \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ist. In dem Fall, daß sämtliche Eigenwerte einfach sind, läßt sich diese Lösbarkeitsbedingung erheblich schärfer fassen: Wenn wir die (numerischen) Determinanten $\Delta_p \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ jeweils nach der p -ten Spalte ($p = 1, 2, \dots, n$) entwickeln, so erhalten wir ein homogenes Gleichungssystem in den n Größen $X_j^{(k)} \equiv \left\{ m_k \frac{\pi}{l} [A_j - (-1)^{m_k} B_j] - \varphi_j(m_k) \right\}$ mit den Unterdeterminanten $C_{pj}^{(k)} \equiv C_{pj} \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) unserer ursprünglichen Determinante $\Delta \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ als Koeffizienten:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n C_{pj}^{(k)} X_j^{(k)} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Die Determinante dieses Systems ist bekanntlich gleich $\Delta^{n-1} \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)$, also 0, es gibt also in der Tat Lösungen $X_j^{(k)}$, und zwar beliebig viele. Da bei einfachen Eigenwerten die Matrix $\left| \Delta \left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right|$ den Rang $n - 1$ hat, so hat nach einem Determinantensatz ⁸⁾ die Matrix $|\Delta(C_{pj}^{(k)})|$ den Rang 1. Man kann also

⁸⁾ Siehe etwa G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, S. 81.

in (4) sämtliche Gleichungen bis auf eine — es sei die q -te — streichen, in der die Koeffizienten $C_{pq}^{(k)}$ nicht alle 0 sind. Es bleibt als *notwendige und hinreichende Bedingung* für die Lösbarkeit des inhomogenen Systems (2) bzw. (1):

$$(5) \quad C_{1q}^{(k)} \left\{ m_k \frac{\pi}{l} [A_1 - (-1)^{m_k} B_1] - \varphi_1(m_k) \right\} + \dots \\ + C_{nq}^{(k)} \left\{ m_k \frac{\pi}{l} [A_n - (-1)^{m_k} B_n] - \varphi_n(m_k) \right\} = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, r).$$

Das bedeutet, daß r lineare Kombinationen der $\varphi_p(m_k)$ einen durch die Randwerte bestimmten Wert haben müssen. Natürlich wird in der Regel für verschiedene k immer eine andere der n Gleichungen von (4) zu nehmen sein.

Die Objektfunktion zu der Lösung

$$y_p(m) = \begin{cases} \frac{A_p}{A} & \text{für } m \neq m_k \\ \text{beliebig} & \text{für } m = m_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, r; p = 1, 2, \dots, n)$$

existiert sicher als Limes in medio:

$$Y_p(x) = \text{l.i.m.}_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{l} \sum_{m=1}^M y_p(m) \sin m \frac{\pi}{l} x,$$

da die Reihe $\sum_1^\infty y_p^2(m)$ wegen $y_p(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ konvergiert. Die Partialbruchzerlegung des vorigen Falles kann wie bei $n = 1$ natürlich nicht ohne weiteres durchgeführt werden. Daß für $y_p(m_k)$ jeder Wert genommen werden kann, läuft wieder auf die Addition der unendlich vielen Lösungen des homogenen Systems hinaus.

Über die Fälle *mehrfacher* Eigenwerte mit $\varrho < n - 1$ läßt sich allgemein nicht viel aussagen; wir überlassen sie wie beim homogenen Problem der Einzelbehandlung, bei der prinzipielle Schwierigkeiten nicht auftreten⁹⁾.

Bei einfachen Eigenwerten läßt sich in zwei *Sonderfällen* die Partialbruchzerlegung leicht durchführen:

a) Bedingung (5) ist erfüllt, wenn

$$\left. \begin{aligned} \Phi_p(x) &\equiv 0, & \text{also auch} & \quad \varphi_p(m) \equiv 0, \\ Y_p(0) &= A_p, \\ Y_p(l) &= A_p (-1)^{m_p} \text{ mit } m_p \equiv m_k (2) \quad (k = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \right\} p = 1, 2, \dots, n$$

Man berechnet die Lösungen von (2) wie unter II. A als Determinantenquotienten, entwickelt die Zählerdeterminanten jeweils nach der Spalte, in

⁹⁾ Vgl. I. c. ¹⁾, S. 332.

der die Randwerte stehen, und zerlegt schließlich die n Einzelglieder in Partialbrüche. Dann ist, einfache Nullstellen vorausgesetzt,

$$y_p(m) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{A_i d_{p k} m \frac{\pi}{l} [(-1)^{m+m_k} - 1] l^i}{\pi^2 (m^2 - m_k^2)} & \text{für } m \neq m_k, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = m_k, \end{cases}$$

die $d_{p k}$ sind die Koeffizienten der Partialbrüche. Nach II. 6 gehört dazu die Objektfunktion

$$Y_p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r A_i d_{p k} \cos m_k \frac{\pi}{l} x + \frac{2}{l} \cdot q \sum_{k=1}^r A_p^{(k)} \sin m_k \frac{\pi}{l} x;$$

der zweite Summand (q beliebig) stellt die bereits bekannten Lösungen des homogenen Problems dar. — Bei mehrfachen Eigenarten werden die Formeln II. 8, II. 9 usw. zuständig.

b) Bedingung (5) ist auch erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \Phi_p(x) &\neq 0, \quad \text{aber} \quad \varphi_p(m_k) = 0, \\ Y_p(0) &= Y_p(l) = 0. \end{aligned}$$

Wir zerlegen die Cramerschen Determinantenquotienten wieder wie in II. A und erhalten bei einfachen Nullstellen:

$$y_p(m) = \begin{cases} \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \frac{l m_k d_{i k}^{(p)} \varphi_i(m)}{\pi (m^2 - m_k^2)} & \text{für } m \neq m_k, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = m_k. \end{cases}$$

Die Objektfunktion zu $\frac{l m_k}{\pi (m^2 - m_k^2)}$ ist nach I. 6 und I. 7:

$$H_k(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{l} + 1 \right) \sin m_k \frac{\pi}{l} x & \text{für } -l \leq x \leq 0, \\ \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \sin m_k \frac{\pi}{l} x & \text{für } 0 \leq x \leq l; \end{cases}$$

mithin ist nach Faltungssatz 5:

$$Y_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n d_{i k}^{(p)} H_k(x) \overset{+l}{*}_l \Phi_i(x) + \text{Lösungen des homogenen Systems,}$$

wobei wieder $\Phi_i(-x) = -\Phi_i(x)$ zu setzen ist. — Bei mehrfachen Nullstellen treten höhere Polynome in x als Faktoren auf.

Wie schon erwähnt, hat L. Fantappiè das System (1) in dem Sonderfall, daß $Y_p(0) = Y_p(l) = 0$ und die Störungsfunktion $\Phi(x)$ in jeder Gleichung dieselbe ist, bereits früher gelöst, und zwar mit Hilfe eines speziellen, ad hoc

erdachten Integraloperators. Bei Fantappiè erscheinen die Lösungen in Form eines komplexen Integrals:

$$Y_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(x, \lambda) \sum_{k=1}^n \frac{a_k \lambda \Delta_{kp}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda$$

mit

$$\gamma(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \Phi(x) - \frac{\sin[\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-l)]}{\lambda^{\frac{3}{2}} \sin(l\lambda^{-\frac{1}{2}})} \int_0^x \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \Phi(t) dt \\ - \frac{\sin(x\lambda^{-\frac{1}{2}})}{\lambda^{\frac{3}{2}} \sin(l\lambda^{-\frac{1}{2}})} \int_x^l \sin \frac{t-l}{\sqrt{\lambda}} \Phi(t) dt;$$

alle dabei beteiligten Funktionen werden als regulär bzw. meromorph vorausgesetzt. Die Summe ist eine gewisse durch die Cramersche Regel erhaltene gebrochene rationale Funktion, in welche die Koeffizienten des Systems eingegangen sind, und C eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene, welche

die Pole von $\gamma(x, \lambda)$ von den Polen der meromorphen Funktion $\sum_{k=1}^n \frac{a_k \lambda \Delta_{kp}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ trennt. Ist der Durchschnitt beider Punktmengen nicht leer, gibt es also keine Kurve der verlangten Art, so versagt Fantappiè's Lösungsmethode.

Tabelle I (cos-Transformation).

α nicht ganzzahlig.

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

1.	$\frac{\alpha}{m^2 - \alpha^2}$	$-\frac{\pi \cos \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{l \sin \alpha \pi},$	
2.	$\frac{m^2 + \alpha^2}{(m^2 - \alpha^2)^2}$	$-\frac{\pi^2 x \sin \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{l^2 \sin \alpha \pi} - \frac{\pi^3 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin^2 \alpha \pi},$	
3.	$\frac{3 m^2 x + x^3}{(m^2 - \alpha^2)^3}$	$\frac{\pi^3 x^2 \cos \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{2 l^3 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^3 x \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l^2 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^3 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin^2 \alpha \pi}$	$+\frac{\pi^3 \cos \alpha \left(\pi + \frac{\pi}{l} x \right)}{l \sin^3 \alpha \pi}$
4.	$\frac{\alpha(-1)^m}{m^2 - \alpha^2}$	$-\frac{\pi \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin \alpha \pi},$	
5.	$\frac{(-1)^m (m^2 + \alpha^2)}{(m^2 - \alpha^2)^2}$	$\frac{\pi^2 x \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l^2 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^2 \cotg \alpha \pi \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin \alpha \pi};$	

α ganzzahlig.

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

6.
$$\frac{l x [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi (m^2 - \alpha^2)} \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$0 \quad \text{für } m = \alpha$$

7.
$$\frac{\alpha l^3 (-1)^{m+\alpha}}{\pi (m^3 - \alpha^3)} \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$-\frac{l^3}{4 \alpha \pi} \quad \text{für } m = \alpha$$

8.
$$\frac{2 \alpha^2 l^3 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)^2} + \frac{l^3 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)} \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$\frac{l^3}{4} \left(\frac{l^3}{2} \text{ für } \alpha = 0 \right) \quad \text{für } m = \alpha$$

9.
$$\frac{l^3 \alpha (-1)^{m+\alpha}}{\pi (m^2 - \alpha^2)} + \frac{2 l^3 \alpha [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^3 (m^3 - \alpha^3)} - \frac{8 m^2 \alpha l^2 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^3 (m^2 - \alpha^2)^3} \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$-\frac{l^3}{4 \alpha \pi} \quad \text{für } m = \alpha$$

10.
$$\frac{2 l^3 (-1)^{m+\alpha}}{\pi^2 (m^3 - \alpha^2)} - \frac{4 x^2 l^3 (-1)^{m+\alpha}}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)^2}$$
$$\frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4 \alpha^2 \pi^2} \left(\frac{l^3}{3} \text{ bei } \alpha = 0 \right) \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$\quad \text{für } m = \alpha$$

11.
$$\frac{\alpha l^4 (-1)^{m+\alpha}}{\pi (m^2 - \alpha^2)} \left(1 + \frac{3!}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)} - \frac{4! m^2}{\pi^3 (m^2 - \alpha^2)^3} \right) \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$-\frac{l^4}{4 \alpha \pi} - \frac{l^4 3!}{16 \alpha^3 \pi^3} \quad \text{für } m = \alpha$$

12.
$$\frac{3 l^4 (-1)^{m+\alpha}}{\pi^2 (m^3 - \alpha^2)} \left(1 + \frac{2 \alpha^2}{m^2 - \alpha^2} \right)$$
$$-\frac{6 l^4 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^4 (m^2 - \alpha^2)^2} \left(1 + \frac{8 m^2 \alpha^2}{(m^2 - \alpha^2)^2} \right) \quad \text{für } m \neq \alpha$$
$$\frac{l^4}{8} + \frac{6 l^4}{16 \alpha^2 \pi^2} \left(\frac{l^4}{4} \text{ bei } \alpha = 0 \right) \quad \text{für } m = \alpha$$

$$\sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x \sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x \cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x^2 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x^2 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x^3 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$x^3 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x.$$

Rekursionsformeln:

$$\mathfrak{C} \left\{ x^n \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\} = \frac{n l^{n+1} (-1)^{m+\alpha}}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)} + \frac{2 n \alpha l \mathfrak{C} \left\{ x^{n-1} \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{\pi (m^3 - \alpha^3)}$$
$$- \frac{n! l^3 \mathfrak{C} \left\{ x^{n-2} \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{(n-2)! \pi^2 (m^2 - \alpha^2)},$$

$$\mathfrak{C} \left\{ x^n \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\} = \frac{\alpha l^{n+1} (-1)^{m+\alpha}}{\pi (m^2 - \alpha^2)} - \frac{2 n \alpha l \mathfrak{C} \left\{ x^{n-1} \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{\pi (m^2 - \alpha^2)}$$
$$- \frac{n! l^3 \mathfrak{C} \left\{ x^{n-2} \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{(n-2)! \pi (m^2 - \alpha^2)}.$$

Für $m = \alpha$ muß jeweils auf die Integraldefinition des Fourier-Koeffizienten zurückgegriffen werden.

Durch Spezialisierung ($\alpha = 0$) gewinnt man aus obigen Formeln die beiden weiteren:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}\{x^{2k}\} &= l^{2k+1}(-1)^m \sum_{r=1}^k \frac{(-1)^{r+1}(2k)!}{(2k-2r+1)!(\pi m)^{2r}}, \\ \mathfrak{C}\{x^{2k+1}\} &= l^{2k+2}(-1)^m \sum_{r=1}^{k-1} \frac{(-1)^{r+1}(2k+1)!}{(2k-2r)!(\pi m)^{2r+1}} \\ &\quad + \frac{l^{2k+2}(2k+1)! [(-1)^m - 1]}{(\pi m)^{2k+2}} \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots$$

Untersucht man umgekehrt, was den Potenzen $\left(\frac{1}{\pi m}\right)^n$ oder $\left(\frac{(-1)^m}{\pi m}\right)^n$ im Objektbereich entspricht, so erhält man komplizierte Polynome; dagegen entsprechen der Summe $\left(\frac{1+(-1)^m}{\pi m}\right)^n$ einfachere Objektfunktionen, nämlich im wesentlichen die Bernoullischen *Polynome*, jedoch in etwas verallgemeinerter Gestalt. Diese *verallgemeinerten* Bernoullischen *Polynome* $B_n(x, l)$ entspringen aus der erzeugenden Funktion:

$$\psi(x, l; t) = \frac{t e^{xt}}{e^l t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x, l)}{k!} t^k$$

und haben die Eigenschaften:

$$B_n(x+l, l) - B_n(x, l) = n l x^{n-1},$$

$$B'_n(x, l) = n B_{n-1}(x, l),$$

$$B_n(l-x, l) = (-1)^n B_n(x, l),$$

$$B_n(kx, l) = k^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} B_n\left(x + \frac{r}{k}, l\right).$$

Zu ihrer Berechnung dient die Taylorentwicklung:

$$B_n(x, l) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_{n-r} l^{n-r} x^r,$$

worin die B_{n-r} die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen sind; hieraus erkennt man übrigens, daß

$$B_n(x, l) = l^n B_n\left(\frac{x}{l}\right),$$

$$B_n(x, 1) = B_n(x)$$

ist, wo die $B_n(x)$ die gewöhnlichen Bernoullischen Polynome bedeuten.

Ihre cos-Transformierte für das Intervall $0 \leq x \leq l$ erhält man, wenn $n = 2k$ ist, auf folgendem Wege: Bezeichnet $F^{(-n)}(x)$ das n -fach iterierte Integral von $F(x)$, so liefert wiederholte partielle Integration folgende Erweiterung des Satzes 1 auf S. 388:

$$\mathfrak{C}\{F^{(-2k)}(x)\} = \frac{(-1)^m F^{(-2k+1)}(l)}{m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} - \frac{(-1)^m F^{(-2k+3)}(l)}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^2} \\ + \dots + (-1)^{k-1} \frac{(-1)^m F^{(-1)}(l)}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^k} + (-1)^k \frac{\mathfrak{C}\{F\}}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^k}.$$

Setzen wir hierin $F(x) = B_2(x, l)$, so ist $F^{(-2k+2)}(x) = \frac{B_{2k}(x, l)}{(2k)!}$ ($k = 1, 2, \dots$) und $B_{2k+1}(l, l) = 0$. Aus

$$\mathfrak{C}\{B_2(x, l)\} = \begin{cases} \frac{l^3 [(-1)^m + 1]}{2 (\pi m)^2} & \text{für } m > 0 \\ 0 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

folgt demnach:

$$\mathfrak{C}\{B_{2k}(x, l)\} = \frac{l^{2k+1} (-1)^{k+1} (2k)! [(-1)^m + 1]}{2 (\pi m)^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

diese Formel ist übrigens auch noch für $k = 0$ richtig. Die Umkehrung

$$B_{2k}(x, l) = (-1)^{k+1} l^{2k} (2k)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m + 1}{(\pi m)^{2k}} \cos m \frac{\pi}{l} x \\ = 2 (-1)^{k+1} l^{2k} (2k)! \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos 2v \frac{\pi}{l} x}{(2\pi v)^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

konvergiert gleichmäßig. Für $l = 1$ ist diese Reihe nichts Neues¹⁰⁾.

Tabelle II (sin-Transformation).

α nicht ganzzahlig.

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

$$1. \frac{m}{m^2 - \alpha^2} \quad \frac{\pi \sin \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{l \sin \alpha \pi}, \\ 2. \frac{2 m \alpha}{(m^2 - \alpha^2)^2} \quad - \frac{\pi^2 x \cos \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{l^2 \sin \alpha \pi} - \frac{\pi^2 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin^2 \alpha \pi},$$

¹⁰⁾ Vgl. Courant-Hilbert, Meth. der Math. Physik, Berlin 1924, S. 85–88.

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

$$3. \frac{3m\alpha^2 + m^3}{(m^2 - \alpha^2)^3} - \frac{\pi^2 x^2 \sin \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x \right)}{2l^3 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^3 x \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l^3 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^3 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin^2 \alpha \pi} + \frac{\pi^3 \sin \alpha \left(\pi + \frac{\pi}{l} x \right)}{l \sin^3 \alpha \pi},$$

$$4. \frac{m(-1)^m}{m^2 - \alpha^2} - \frac{\pi \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin \alpha \pi},$$

$$5. \frac{2m\alpha(-1)^m}{(m^2 - \alpha^2)^2} - \frac{\pi^2 x \cos \alpha \frac{\pi}{l} x}{l^3 \sin \alpha \pi} + \frac{\pi^3 \cotg \alpha \pi \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin \alpha \pi}.$$

 α ganzzahlig.

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

$$6. \left. \begin{aligned} & \frac{l m [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi (\alpha^2 - m^2)} \\ & 0 \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$7. \left. \begin{aligned} & \frac{l^2 m (-1)^{m+\alpha}}{\pi (\alpha^2 - m^2)} \\ & - \frac{l^3}{4\alpha\pi} \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$x \cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$8. \left. \begin{aligned} & \frac{2\alpha m l^2 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^2 (m^2 - \alpha^2)^2} \\ & \frac{l^3}{4} \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$x \sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$9. \left. \begin{aligned} & \frac{m l^3 (-1)^{m+\alpha}}{\pi (\alpha^2 - m^2)} + \frac{2m^3 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^3 (\alpha^2 - m^2)^2} - \frac{8\alpha^2 m l^2 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^3 (\alpha^2 - m^2)^3} \\ & - \frac{l^3}{4\alpha\pi} \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$x^2 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$10. \left. \begin{aligned} & \frac{4\alpha m l^3 (-1)^{m+\alpha}}{\pi^2 (\alpha^2 - m^2)^2} \\ & \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{4\alpha^2 \pi^2} \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$x^2 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

$$11. \left. \begin{aligned} & \frac{m l^4 (-1)^{m+\alpha}}{\pi (\alpha^2 - m^2)} \left(1 + \frac{3!}{\pi^2 (\alpha^2 - m^2)} - \frac{\alpha^2 4!}{\pi^2 (\alpha^2 - m^2)^2} \right) \\ & - \frac{l^4}{4\alpha\pi} - \frac{l^4 3!}{16\alpha^3 \pi^3} \text{ für } m = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$x^3 \cos \alpha \frac{\pi}{l} x,$$

Resultatfunktion:

Objektfunktion:

$$12. \left. \begin{aligned} & \frac{6\alpha m l^4 (-1)^{m+\alpha}}{(\alpha^2 - m^2)^2} + \frac{12\alpha m l^3 [(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi^3 (\alpha^2 - m^2)^3} \left(\frac{l}{\pi} + 1 - \frac{3\alpha^2}{\pi(\alpha^2 - m^2)} \right) \\ & \frac{l^4}{8} - \frac{l^4 3!}{16 \alpha^2 \pi^2} \quad \text{für } m = \alpha \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} x^3 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x.$$

Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \left\{ x^n \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\} &= \frac{2n l \alpha \mathfrak{S} \left\{ x^{n-1} \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{\pi (\alpha^2 - m^2)} + \frac{n! l^2 \mathfrak{S} \left\{ x^{n-2} \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{(n-2)! \pi^2 (\alpha^2 - m^2)}, \\ \mathfrak{S} \left\{ x^n \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\} \\ &= \frac{l^{n+1} (-1)^{m+\alpha} m}{\pi (\alpha^2 - m^2)} - \frac{2n l \alpha \mathfrak{S} \left\{ x^{n-1} \sin \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{\pi (\alpha^2 - m^2)} + \frac{n! l^2 \mathfrak{S} \left\{ x^{n-2} \cos \alpha \frac{\pi}{l} x \right\}}{(n-2)! \pi^2 (\alpha^2 - m^2)}. \end{aligned}$$

Für $m = \alpha$ vgl. die Bemerkung in Tabelle I.

Potenzen im einen werden wieder durch Polynome im anderen Bereich abgebildet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \{ x^{2k} \} &= l^{2k+1} (-1)^m \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^{r+1} (2k)!}{(2k-2r)! (\pi m)^{2r+1}} + \frac{l^{2k+1} (-1)^{k+1} (2k)! [(-1)^m + 1]}{(\pi m)^{2k+1}}, \\ \mathfrak{S} \{ x^{2k+1} \} &= l^{2k+2} (-1)^m \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+1} (2k+1)!}{(2k-2r+1)! (\pi m)^{2r+1}}, \\ \mathfrak{S} \{ B_{2k+1}(x, l) \} &= \frac{l^{2k+2} (-1)^{k+1} (2k+1)! [(-1)^m + 1]}{2 (\pi m)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

($k = 0, 1, \dots$; in der ersten Formel fällt für $k = 0$ die Summe weg.) Die letzte Formel ergibt sich (vgl. die Ableitung in Tabelle I) aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \{ F^{(-2k)}(x) \} &= - \frac{(-1)^m F^{(-2k)}(l)}{m \frac{\pi}{l}} + \frac{(-1)^m F^{(-2k+2)}(l)}{\left(m \frac{\pi}{l}\right)^3} - + \dots \\ &+ (-1)^k \frac{(-1)^m F^{(-2)}(l)}{\left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2k-1}} + (-1)^k \frac{\mathfrak{S} \{ F \}}{\left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2k}}, \end{aligned}$$

wenn man $F = B_1(x, l)$ ($= x - \frac{l}{2}$) und $F^{(-2k)} = \frac{B_{2k+1}(x, l)}{(2k+1)!}$ setzt; wegen $B_{2k+1}(l, l) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) und

$$\mathfrak{S} \{ B_1(x, l) \} = - \frac{l^2 [(-1)^m + 1]}{2 \cdot \pi m}$$

erhalten wir unsere Formel, deren Umkehrung lautet:

$$\begin{aligned}
 B_{2k+1}(x, l) &= l^{2k+1} (-1)^{k+1} (2k+1)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{2k+1}} \sin m \frac{\pi}{l} x \\
 &= 2 l^{2k+1} (-1)^{k+1} (2k+1)! \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2v \frac{\pi}{l} x}{(2\pi v)^{2k+1}} \\
 &\quad (k = 0, 1, \dots).
 \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für $k = 1, 2, \dots$ gleichmäßig; für $k = 0$ kann sie es nicht, da die (ungerade und periodisch fortgesetzte) Funktion $B_1(x, l)$ an den Stellen μl ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Sprünge aufweist.

(Eingegangen am 13. Januar 1938.)

Ein Approximationsproblem.

Von

O. Baier in Stuttgart.

§ 1.

Einleitung.

W. Cauer hat in dieser Zeitschrift¹⁾ ein Approximationsproblem gelöst, das für die elektrische Fernmeldetechnik, speziell für die mehrfache Telegraphie und Telephonie von besonderer Bedeutung ist. Die technische Fragestellung, die auf das Approximationsproblem führt, wurde neuerdings von W. Brandt²⁾ und H. Piloty³⁾ behandelt. In diesen Arbeiten finden sich auch Hinweise auf weitere einschlägige Literatur.

Es handelt sich darum, in den Funktionen

$$(A) \quad W_1 = c_1 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \prod_{v=1}^m \frac{x - a_{1,v}}{x - b_{1,v}},$$

$$(B) \quad W_2 = c_2 \frac{x - a}{\sqrt{x^2 - 1}} \prod_{v=1}^m \frac{x^2 - a_{2,v}}{x^2 - b_{2,v}},$$

$$(C) \quad W_3 = c_3 \frac{1}{(x - b)\sqrt{x^2 - 1}} \frac{\prod_{v=1}^{m+1} (x^2 - a_{3,v})}{\prod_{v=1}^m (x^2 - b_{3,v})}$$

bei festgehaltenem m die Parameter a , b , c_i , $a_{i,v}$, $b_{i,v}$ ($i = 1, 2, 3$) so zu bestimmen, daß die Funktionen $W_i(x)$ in einem gegebenen Intervall, für das man

$$\frac{1}{k} \leq |x|, \quad 0 < k < 1$$

¹⁾ Ein Interpolationsproblem mit Funktionen mit positivem Realteil, Math. Zeitschr. 38 (1934), S. 1—44.

²⁾ Elektrische Weiche, Elektrische Nachrichtentechnik 13 (1936), Heft 4, S. 111 bis 123.

³⁾ Über Reaktanzvierpole und Über elektrische Weichen, Elektrische Nachrichtentechnik 14 (1937), Heft 3, S. 89—117 und 14 (1937), Heft 6, S. 197—209.

wählen kann, möglichst wenig von 1 abweichen. Derartige Probleme wurden zuerst von Tschebyscheff⁴⁾ behandelt. In der genannten Arbeit¹⁾ gelingt es, die Parameter durch die Forderung, daß das Maximum von $\ln |W_i|$ in dem genannten Intervall möglichst klein wird, zu bestimmen.

Im folgenden sollen die Cauerschen Ergebnisse auf einem anderen, besonders einfachen Weg gewonnen werden.

Sucht man in

$$y = \sum_{v=0}^n a_v x^{n-v}, \quad a_0 = 1$$

die a_v so zu bestimmen, daß für $|x| \leq 1$ die Funktion y möglichst wenig von 0 abweicht, so erhält man die Tschebyscheffschen Polynome⁵⁾

$$y = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right)^n + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right)^n.$$

Sucht man andererseits Werte von a , für welche die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

algebraische Integrale hat, so erhält man für $a = 1, 2, \dots, n$ gerade die mit 2^{n-1} multiplizierten Tschebyscheffschen Polynome.

Nun wurde von Abel⁶⁾ eine analoge Problemstellung behandelt. Er suchte Werte von a , für welche die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2 y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

algebraische Integrale besitzt. Diese Integrale sind in gewissem Sinn Verallgemeinerungen der Tschebyscheffschen Polynome und stehen in sehr engem Zusammenhang mit den Funktionen W_i . Auf Grund dieses Zusammenhanges lassen sich, wie gezeigt werden soll, die gesuchten Parameter in den Funktionen W_i bestimmen.

⁴⁾ Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, Oeuvres I, S. 273–378.

⁵⁾ Vgl. ⁴⁾. Vereinfachte Herleitungen in P. Kirchberger, Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden, Diss. Göttingen 1902 und H. Liebmann, Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 18 (1909), S. 433–449.

⁶⁾ Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques, Oeuvres I, S. 422.

§ 2.

Ein Satz von Abel⁷⁾.

„Es ist

$$(1) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2 y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \pm a d\Theta,$$

wobei

$$(2) \quad a = c \prod_{\nu=1}^{n-1} s\left(\nu \frac{\omega}{n}\right),$$

$$(3) \quad k_1 = k^n \prod_{\nu=0}^{n-1} s^2\left(\frac{2\nu+1}{2} \frac{\omega}{n}\right),$$

$$(4) \quad 1 = c \prod_{\nu=0}^{n-1} s\left(\frac{2\nu+1}{2} \frac{\omega}{n}\right),$$

$$(5) \quad y = c \prod_{\nu=0}^{n-1} s\left(\Theta + \nu \frac{\omega}{n}\right),$$

 n eine beliebige ganze Zahl und

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

ist.“

Zum Verständnis des Satzes sei folgendes bemerkt:

1. Die Funktion $s(\Theta; 2\omega, 2i\omega')$ hat die Perioden 2ω und $2i\omega'$ und den Modul k (vgl. (I), (II)). Die Funktion (5)

$$y = c \prod_{\nu=0}^{n-1} s\left(\Theta + \nu \frac{\omega}{n}\right)$$

hat dann, wie sich durch Anwendung von (III) ergibt, die Perioden $2\frac{\omega}{n}$ und $2i\omega'$ und keine kleineren, da ihre Nullstellen $\Theta = \nu \frac{\omega}{n}$ einfache Nullstellen sind.

2. Durch (4) wird die Konstante c so bestimmt, daß für $\Theta = \frac{\omega}{2n}$ (Viertel der reellen Periode) $y = 1$ wird.

3. Wegen (II) lassen sich die Perioden einer s -Funktion nicht beliebig vorschreiben, sie sind vielmehr durch den Modul k bestimmt, oder: das

⁷⁾ Die Abelschen Bezeichnungen in ⁶⁾ sind z. T. abgeändert. Für $sn(u)$ wird fortan $s(u)$ gesetzt. Die wenigen aus der Theorie der elliptischen Funktionen benötigten Formeln sind am Schluß zusammengestellt und mit römischen Ziffern bezeichnet. Beweise hierfür finden sich in jedem Lehrbuch über elliptische Funktionen.

Periodenverhältnis $\tau = \frac{i\omega'}{\omega}$ bestimmt den Modul k (Modulfunktion $k(\tau)$) der zugehörigen s -Funktion. Im vorliegenden Fall hat $y(\Theta; 2\frac{\omega}{n}, 2i\omega')$ das Periodenverhältnis $\tau_1 = \frac{i\omega'n}{\omega}$. Die s -Funktion mit dem Periodenverhältnis τ_1 habe die Perioden $2\frac{\omega}{n}a, 2i\omega'a$ und den Modul k_1 . Schreibt man $s(a\Theta; 2\frac{\omega}{n}a, 2i\omega'a)$, dann hat diese s -Funktion die gleichen Nullstellen und Pole wie die Funktion y . Der Quotient der beiden Funktionen ist daher nach einem bekannten Satz konstant und wegen (VI) und (4) gleich 1.

y ist somit ebenfalls eine s -Funktion. Daher gilt die Beziehung (1), wenn noch

$$x = s(\Theta)$$

gesetzt wird. Die Werte von a und k_1 sind durch (2), (3), (4) gegeben. Dies ist der wesentliche Inhalt des Satzes.

Es soll nun y als Funktion von x berechnet werden. Wenn man unter Verwendung von

$$v\frac{\omega}{n} = \omega - (n-v)\frac{\omega}{n}$$

die Werte $v\frac{\omega}{n}$, die größer als $\frac{\omega}{2}$ sind, umformt, dann (III) und (IV) benützt, erhält man

a) n ungerade

$$y_1 = c(-1)^{\frac{n-1}{2}} s(\Theta) \prod_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} s\left(\Theta + v\frac{\omega}{n}\right) s\left(\Theta - v\frac{\omega}{n}\right)$$

und wegen (V)

$$(6) \quad y_1 = c(-1)^{\frac{n-1}{2}} x \prod_{v=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^2 - s^2\left(v\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2 s^2\left(v\frac{\omega}{n}\right) x^2}$$

b) n gerade

$$y_2 = c(-1)^{\frac{n-2}{2}} s(\Theta) s\left(\Theta + \frac{\omega}{2}\right) \prod_{v=1}^{\frac{n-2}{2}} s\left(\Theta + v\frac{\omega}{n}\right) s\left(\Theta - v\frac{\omega}{n}\right)$$

und wegen (VI)

$$(7) \quad \pm y_2 = c \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}} \prod_{v=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{x^2 - s^2\left(v\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2 s^2\left(v\frac{\omega}{n}\right) x^2}.$$

y_1 und y_2 sind somit algebraische Funktionen von x .

§ 3.

Die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

Der ungefähre Verlauf der Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ist in den Fig. 1, 2 ($n = 3$), 3 ($n = 2$) skizziert. Die Nullstellen und Pole von y_1 und y_2 sowie ihre Verzweigungspunkte lassen sich aus (6) und (7) ablesen. Zur Bestimmung der Maxima und Minima benötigt man wegen (1) die x -Werte, für die $y = s(a\Theta; 2\frac{\omega}{n}, 2i\omega')$ die Werte $\pm 1, \pm \frac{1}{k_1}$ ⁸⁾ annimmt. Zunächst ist

$$(8_1) \quad y = 1 \quad \text{für} \quad \Theta_\alpha = \frac{\omega}{2n} + 2\lambda \frac{\omega}{n} \quad \text{wegen (VI),}$$

$$(8_2) \quad y = -1 \quad \text{für} \quad \Theta_\beta = \frac{\omega}{2n} + (2\lambda + 1) \frac{\omega}{n} \quad ,, \quad \text{(IV),}$$

jeweils mit $\lambda = 0, 1, \dots, n-1$; ferner

$$(9_1) \quad y = \frac{1}{k_1} \quad \text{für} \quad \Theta_\gamma = \Theta_\alpha + i\omega' \quad \text{wegen (VII),}$$

$$(9_2) \quad y = -\frac{1}{k_1} \quad \text{für} \quad \Theta_\delta = \Theta_\beta + i\omega' \quad ,, \quad \text{(VII).}$$

Die zugehörigen x -Werte ergeben sich in handlicher Form, wenn man die Θ -Werte mod 2ω umformt.

a) n gerade ⁹⁾

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} x_\alpha &= s(\Theta_\alpha) = \pm s\left(\frac{4\nu-3}{2n}\omega\right) \\ x_\beta &= s(\Theta_\beta) = \pm s\left(\frac{4\nu-1}{2n}\omega\right) \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{wegen (III)}$$

b) $n = 4\mu + 1$ ¹⁰⁾

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} x_\alpha &= s\left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n}\right), \quad \nu = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2} \\ x_\beta &= -x_\alpha; \\ \nu = 0 &\text{ ergibt } x_\alpha = 1, x_\beta = -1. \end{aligned} \right\} \text{wegen (III),}$$

⁸⁾ Mit $0 < k < 1$ ist wegen (3) auch $0 < k_1 < 1$.

⁹⁾ Für $\lambda = \frac{n}{2}$ erhält man $\Theta_\alpha = \frac{\omega}{2n} + \omega$ und somit

$$\Theta_\alpha = \frac{4\nu-3}{2n}\omega, \frac{4\nu-1}{2n}\omega + \omega; \nu = 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

¹⁰⁾ Für $\lambda = \mu$ erhält man $\Theta_\alpha = \frac{\omega}{2}$ und somit

$$\Theta_\alpha = \frac{\omega}{2} \pm 2\nu \frac{\omega}{n}; \nu = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2};$$

für $2\lambda = n-1$ erhält man $\Theta_\beta = \frac{\omega}{2n} + \omega$ und somit $\Theta_\beta = \Theta_\alpha + \omega$.

$$c) \ n = 4\mu + 3^{11)}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} x_\alpha &= -x_\beta, \\ x_\beta &= s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}; \\ \nu = 0 \text{ ergibt } x_\alpha &= -1, \quad x_\beta = 1. \end{aligned}$$

Für alle Werte von n gilt wegen (VII)

$$(13) \quad x_\gamma = s(\Theta_\gamma) = \frac{1}{k x_\alpha}, \quad x_\delta = s(\Theta_\delta) = \frac{1}{k x_\beta}.$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \text{Für } n = 4\mu + 1 \text{ ergibt } \nu = 0 \quad x_\gamma &= \frac{1}{k}, \quad x_\delta = -\frac{1}{k}; \\ \text{für } n = 4\mu + 3 \text{ ergibt } \nu = 0 \quad x_\gamma &= -\frac{1}{k}, \quad x_\delta = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Aus (1) folgt, daß $y'(x) = 0$ ist, für $y = \pm 1, \pm \frac{1}{k_1}$, wenn nicht gleichzeitig $x = \pm 1, \pm \frac{1}{k}$ ist. Es ist daher

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} = 0 \text{ und } y_1 &= \pm 1 \text{ für } x = \pm s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right) \\ y_1 &= \pm \frac{1}{k_1} \text{ für } x = \pm \frac{1}{k s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right)} \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

$$(16) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} = 0 \text{ und } y_2 &= \pm 1 \text{ für } x = \pm s \left(\frac{2\nu-1}{2n} \omega \right) \\ y_2 &= \pm \frac{1}{k_1} \text{ für } x = \pm \frac{1}{k s \left(\frac{2\nu-1}{2n} \omega \right)} \end{aligned} \right\} \nu = 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

Die Tschebyscheffschen Polynome haben folgende Eigenschaft: Die absoluten Beträge der Maxima und Minima (Randwerte eingeschlossen) von y sind gleich und das Maximum und das Minimum wird in $|x| \leq 1$ so oft als möglich erreicht. Die Funktionen y_1 und y_2 haben folgende Eigenschaft: Im Intervall $|x| \leq 1$ sind die absoluten Beträge der Maxima und Minima gleich 1. Das Maximum wie das Minimum wird in $|x| \leq 1$ so oft als möglich erreicht. Denn die algebraischen Gleichungen $f_1(y_1, x) = 0$ und $f_2(y_2, x) = 0$ sind wegen (6) und (7) vom Grad n bzw. $2n$ in x . Die Extremwerte ± 1 werden wegen (11), (12), (15) bzw. (16) so oft als möglich erreicht. Die gleiche Aussage gilt für das Intervall $|x| \geq \frac{1}{k}$ und die Funktionen $\frac{1}{y_1}$ und $\frac{1}{y_2}$. In diesem Fall sind die Extremwerte $\pm k_1$.

¹¹⁾ Für $2\lambda = n + 1$ erhält man $\Theta_\alpha = \frac{\omega}{2n} + \omega + \frac{\omega}{n}$ und somit $\Theta_\alpha = \Theta_\beta + \omega$;

für $\lambda = \mu$ erhält man $\Theta_\beta = \frac{\omega}{2}$ und somit $\Theta_\beta = \frac{\omega}{2} + 2\nu \frac{\omega}{n}$; $\nu = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$.

§ 4.

Darstellung der Funktionen W_i als Funktionen von y .

Es ist nun leicht, die Funktionen W_i als algebraische Funktionen von y_1 bzw. y_2 darzustellen.

1. Die Funktionen W_1 .

Betrachtet man zunächst die Funktionen

$$(17) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{y_1 + 1}{y_1 - 1}} \quad \text{für } n = 4\mu + 1 \\ w_1 &= \sqrt{\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1}} \quad \text{für } n = 4\mu + 3, \end{aligned}$$

so sind ihre Ableitungen

$$(18) \quad \frac{dw_1}{dx} = \pm a \frac{\sqrt{k_1^2 y_1^2 - 1}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \frac{1}{y_1 + (-1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Im Intervall $|x| \leq 1$ ist $|y_1| \leq 1$ und daher w_1 rein imaginär.

Extremstellen. Die Ableitung verschwindet an den Stellen, wo $y_1 = \pm \frac{1}{k_1}$ und gleichzeitig $x \neq \pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$ ist. Das sind wegen (15) die Stellen

$$(19) \quad x = \pm \frac{1}{k s \left(\frac{\omega}{2} + 2 v \frac{\omega}{n} \right)}, \quad v = 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Für Pole von y_1 ist die Ableitung $\neq 0$, jedoch $= 0$ für $x \rightarrow \infty$. Der w_1 -Wert der Maxima bzw. Minima ist

$$\sqrt{\frac{1+k_1}{1-k_1}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}}.$$

Diese Werte werden wegen (14) auch für $x = \frac{1}{k}$ bzw. $x = -\frac{1}{k}$ angenommen.

Eins-Stellen. Es ist $w_1 = 1$, wo y_1 Pole hat, das sind wegen (6) die Stellen

$$(20) \quad x = \pm \frac{1}{k s \left(v \frac{\omega}{n} \right)}, \quad v = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

$v = 0$ ergibt die Asymptote $w_1 = 1$ parallel zur x -Achse.

Aus (6) folgt, daß $y_1 + 1$ und $y_1 - 1$ rationale Funktionen von x sind, deren Zähler höchstens vom n -ten Grad in x sind. $y_1 + 1$ bzw. $y_1 - 1$ haben

die Nullstellen x_β bzw. x_α , die mit Ausnahme von $\nu = 0$ wegen (15) doppelt zu zählen sind. Daher ist

$$(21) \quad y_1 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} = C_1(x+1) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left[x + s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right) \right]^2}{1 - k^2 s^2 \left(\nu \frac{\omega}{n} \right) x^2},$$

$$y_1 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} = C_2(x-1) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left[x - s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right) \right]^2}{1 - k^2 s^2 \left(\nu \frac{\omega}{n} \right) x^2}$$

Daraus ergibt sich

$$(22) \quad w_1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x + s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right)}{x - s \left(\frac{\omega}{2} - 2\nu \frac{\omega}{n} \right)} = W_1^{12}.$$

In Fig. 1 sind die Extremwerte und die Eins-Stellen von W_1 und y_1 durch Nullkreise gekennzeichnet.

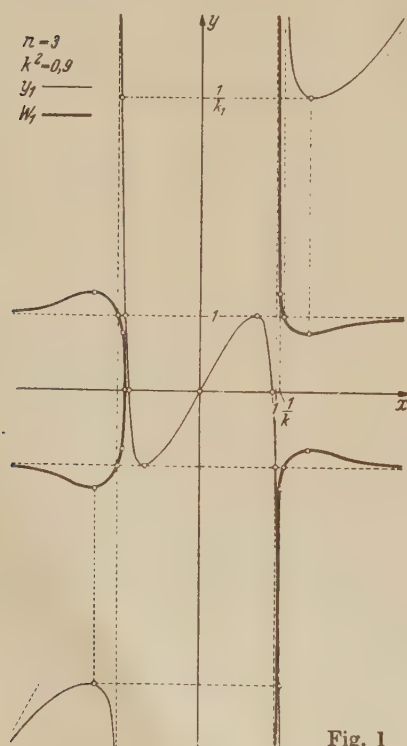


Fig. 1

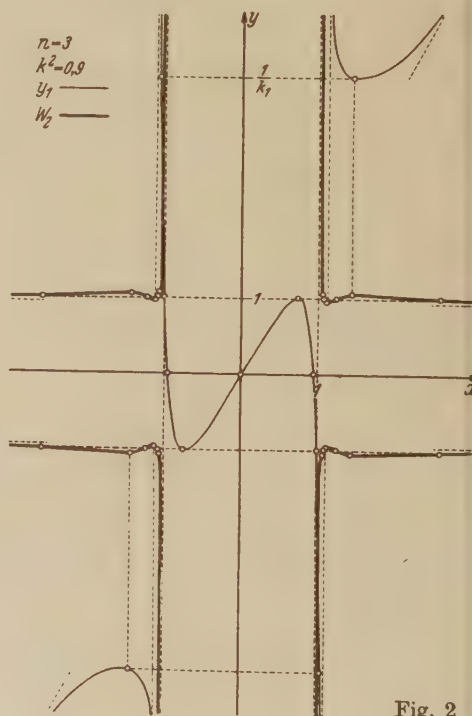


Fig. 2

¹²⁾ Für $x \rightarrow \infty$ muß $y \rightarrow 1$ streben. Daher ist der konstante Faktor richtig bestimmt.

2. Die Funktionen W_2

Betrachtet man die Funktionen

$$(23) \quad w_2 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \prod_{v=1}^{n-1} \frac{x^2 - s^2 \left(v \frac{\omega}{n} \right)}{x^2 - s^2 \left(\frac{\omega}{2} - 2 v \frac{\omega}{n} \right)} \quad (\text{wegen (21)}),$$

so hat w_2 bis auf einen konstanten Faktor die Form (B). Im Intervall $|x| \leq 1$ ist $|y_1| \leq 1$ und daher w_2 rein imaginär.

Extremstellen. Es ist

$$(24) \quad \frac{dw_2}{dx} = \pm a \frac{\sqrt{k_1^2 y_1^2 - 1}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \frac{1}{y_1^2 - 1}.$$

Die Ableitung verschwindet an den Stellen (19) und an den Polen (20) von y_1 . Das sind daher die Stellen

$$(25) \quad x = \pm \frac{1}{ks \left(v \frac{\omega}{2n} \right)}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$

$v = 0$ ergibt die Asymptote $w_2 = 1$ parallel zur x -Achse. Die Werte der Maxima bzw. Minima sind

$$\frac{1}{\sqrt{1-k_1^2}} \text{ bzw. } 1.$$

Der erste wird auch für $x = \pm \frac{1}{k}$ wegen (14) angenommen.

Will man erreichen, daß die Maxima und Minima wie bei der Funktion W_1 reziprok sind, dann erhält man, wenn man $\tilde{w}_2 = Cw_2$ setzt, für C die Gleichung

$$C^2 = \sqrt{1-k_1^2}.$$

Damit ist

$$(26) \quad \tilde{w}_2 = 4\sqrt{1-k_1^2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \prod_{v=1}^{n-1} \frac{x^2 - s^2 \left(v \frac{\omega}{n} \right)}{x^2 - s^2 \left(\frac{\omega}{2} - 2 v \frac{\omega}{n} \right)} = W_2.$$

Eins-Stellen. Es muß sein

$$\tilde{w}_2 = 4\sqrt{1-k_1^2} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-1}} = 1, \quad \text{d. h.} \quad y_1^2 = \frac{1}{1-\sqrt{1-k_1^2}}$$

und wegen (VII) und (VIII) sind die zugehörigen Werte $\Theta_1 = \frac{\omega}{4n} + i\omega' + v \frac{\omega}{n}$ und die zugehörigen x -Werte

$$(27) \quad \begin{aligned} x = s(\Theta_1) &= \frac{1}{ks \left(\frac{\omega}{4n} + v \frac{\omega}{n} \right)}, \quad v = 0, 1, \dots, 2n-1, \\ &= \pm \frac{1}{ks \left(\frac{4\lambda+1}{4n} \omega \right)}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Fig. 2 gibt den ungefähren Verlauf für $n = 3$ wieder. Die Extremstellen und Eins-Stellen sind durch Nullkreise gekennzeichnet.

3. Die Funktionen W_3 .

Betrachtet man die Funktionen

$$(28) \quad w_3 = \frac{\sqrt{y_2^3 - 1}}{y_2},$$

so sind ihre Ableitungen

$$(29) \quad \frac{dw_3}{dx} = \pm a \frac{1}{y_2^3} \frac{\sqrt{k_1^3 y_2^3 - 1}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Im Intervall $|x| \leq 1$ ist $|y_2| \leq 1$ und daher w_3 rein imaginär.

Extremstellen. Die Ableitung verschwindet an den Stellen, wo $y_2 = \pm \frac{1}{k_1}$ und an den Polen von y_2 , falls $x \neq \pm 1, \pm \frac{1}{k}$ ist. Das sind wegen (16) und (7) die Stellen

$$(30) \quad x = \pm \frac{1}{k s \left(\frac{\nu}{2n} \omega \right)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\nu = 0$ ergibt die Asymptote $w_3 = 1$ parallel zur x -Achse. Die Werte der Maxima bzw. Minima sind

$$1 \text{ bzw. } \sqrt{1 - k_1^2}.$$

Der erste Wert wird auch für $x = \pm \frac{1}{k}$ angenommen.

$y_2^2 - 1$ ist wegen (7) eine rationale Funktion in x , deren Zähler höchstens vom Grade $2n$ in x ist und die wegen (10) die Nullstellen

$$(31) \quad x = \pm s \left(\frac{2\nu-1}{2n} \omega \right), \quad \nu = 1, \dots, \frac{n}{2}$$

hat, die wegen (16) doppelt zu zählen sind. Daher erhält man wegen (7)

$$(32) \quad w_3 = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \frac{\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(x^2 - s^2 \left(\frac{2\nu-1}{2n} \omega \right) \right)}{\prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(x^2 - s^2 \left(\frac{\nu}{n} \omega \right) \right)}.$$

Will man erreichen, daß die Maxima und Minima wie bei W_1 und W_2 reziprok sind, dann erhält man, wenn man wieder $w_3 = C w_3$ setzt, für C die Gleichung

$$C^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}}.$$

Damit ist

$$(33) \quad \tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k_1^2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \frac{\prod_{v=1}^{\frac{n}{2}} \left(x^2 - s^2 \left(\frac{2v-1}{2n} \omega \right) \right)}{\prod_{v=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(x^2 - s^2 \left(\frac{v}{n} \omega \right) \right)} = W_3.$$

Die *Eins-Stellen* sind die gleichen wie bei W_2 (27).

Fig. 3 gibt den ungefähren Verlauf für $n = 2$. Die Extremstellen und Eins-Stellen sind durch Nullkreise gekennzeichnet.

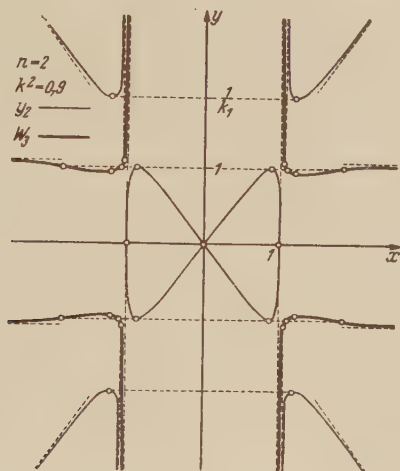


Fig. 3

§ 5.

Die Funktionen W_1 , W_2 , W_3 als Approximationsfunktionen.

Bisher wurde nur gezeigt, daß die Funktionen W_1 (22), W_2 (26), W_3 (33) die Gestalt (A), (B), (C) besitzen. Es ist noch zu beweisen, daß die angegebenen Funktionen die gesuchten Approximationsfunktionen sind.

1. Die Funktionen W_i (22), (26), (33) haben im Intervall $|x| \geq \frac{1}{k}$ die größtmögliche Anzahl von Extremwerten. Denn wegen (22), (26), (33) haben die algebraischen Gleichungen $f_1(W_1, x) = 0$, $f_2(W_2, x) = 0$, $f_3(W_3, x) = 0$ in x die Grade n bzw. $2n$ bzw. $2n$. Aus (19), (25), (30) folgt die Behauptung.

2. Für jede einzelne der Funktionen W_i sind die Extremwerte reziprok. Durch Multiplikation mit einer Konstanten läßt sich erreichen, daß die Ab-

weichungen der Extremwerte von 1 dem absoluten Betrage nach gleich sind¹³⁾. Eine kurze Rechnung zeigt, daß diese Konstanten für W_1 die Werte $\sqrt{1 - k_1^2}$, für W_2 und W_3 die Werte $2 \frac{\sqrt{1 - k_1^2}}{1 + \sqrt{1 - k_1^2}}$ haben.

Unter allen Funktionen der Form (A), (B), (C) weichen die Funktionen W_i (22), (26), (33) mit der Normierung von 2. am wenigsten von 1 ab.

Dies soll zunächst für W_1 gezeigt werden.

a) Es gibt keine Funktion V_1 der Form (A) mit kleinerem absoluten Betrag der maximalen Abweichung von 1.

Es sei V_1 eine Funktion mit kleinerer maximaler Abweichung. Betrachtet man die Funktion

$$W_1 - V_1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} \right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{P_1}{Q_1},$$

so haben die Polynome P_1 und Q_1 höchstens den Grad $n - 1$ in x . Im Intervall $|x| \geq \frac{1}{k}$ besitzt die Funktion $W_1 \frac{n+1}{2}$ Maxima und $\frac{n+1}{2}$ Minima und daher hat $W_1 - V_1$ n Zeichenwechsel. Dann muß aber P_1 identisch verschwinden.

b) Es gibt auch keine von W_1 verschiedene Funktion V_1 mit gleicher maximaler Abweichung.

Denn nimmt V_1 die maximale Abweichung an anderen Stellen wie W_1 an, dann geht keiner der n Zeichenwechsel verloren. Nimmt V_1 mitunter an gleichen Stellen wie W_1 dasselbe Extremum im Innern des Intervalls an, dann tritt an die Stelle der zwei verlorenen Zeichenwechsel eine doppelte Nullstelle. Hat V_1 denselben Randwert wie W_1 , dann wird der verlorene Zeichenwechsel durch die Randnullstelle ersetzt.

Für W_2 erhält man

$$W_2 - V_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{P_2}{Q_2},$$

wobei die Polynome P_2, Q_2 höchstens die Grade $2n - 1$ und $2n - 2$ in x haben. $W_2 - V_2$ hat jedoch mindestens $2n$ Nullstellen.

Für W_3 erhält man

$$W_3 - V_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{P_3}{Q_3},$$

wobei die Polynome P_3, Q_3 höchstens die Grade $2n - 1$ und $2n - 2$ in x haben. $W_3 - V_3$ hat jedoch mindestens $2n$ Nullstellen. Die Überlegungen von b) bleiben die gleichen.

Mit zunehmendem n strebt k_1 wegen (3) rasch gegen Null und daher konvergieren die Extremwerte der W_i (§ 4) sehr schnell gegen 1, so daß sich, wie die Figuren zeigen, schon für kleine n eine gute Approximation ergibt.

¹³⁾ Beläßt man die bisherige Normierung, dann wird $\ln |W_i|$ an Null approximiert. Die weiteren Überlegungen bleiben im wesentlichen dieselben.

Formeln.

(I) Definition

$$\Theta = \int_0^{x=s(\Theta)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad 0 < k < 1.$$

Für reelle Θ gilt $-1 \leq s(\Theta) \leq 1$.

(II) $s(\Theta + 2\omega) = s(\Theta + 2i\omega') = s(\Theta)$,

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad \omega' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}}.$$

$s(\Theta)$ hat die Nullstellen $\Theta = \nu\omega$ und die Pole $\Theta = \nu\omega + i\omega'$, alle einfach.

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad & s(\Theta + \omega) = -s(\Theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = u - \frac{\omega}{2} \text{ ergibt } s\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = s\left(\frac{\omega}{2} - u\right). \\ \text{(IV)} \quad s(-\Theta) = -s(\Theta) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{(V)} \quad s(\Theta + u) s(\Theta - u) = \frac{s^2(\Theta) - s^2(u)}{1 - k^2 s^2(\Theta) s^2(u)}.$$

$$\text{(VI)} \quad s\left(\Theta + \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - s^2(\Theta)}{1 - k^2 s^2(\Theta)}} \quad \text{für} \quad -\frac{\omega}{2} \leq \Theta \leq \frac{\omega}{2}.$$

Speziell ist $s\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$.

$$\text{(VII)} \quad s(\Theta + i\omega') = \frac{1}{k s(\Theta)}.$$

$$\text{(VIII)} \quad s\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{k} \sqrt{1 - 1 - k^2}.$$

(Eingegangen am 22. Januar 1938.)

Zur Theorie der quadratfreien Zahlen.

Von

Sigmund Selberg in Sauda (Norwegen).

Einleitung.

Es bezeichne $S(n)$ die Anzahl der Primfaktoren von n , S_n die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n .

Weiter bezeichne

a) $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$,

b) $\pi_k(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq x$, die aus k -Primfaktoren zusammengesetzt sind,

c) $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq x$,

d)
$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Für a), b), c) d) haben wir die bekannten Beziehungen

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\log x} = 1 \quad (\text{der Primzahlsatz}),$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_k(x)}{\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x (\log \log x)^{k-1}}{\log x}} = 1,$$

$$(3) \quad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} \cdot x + o(\sqrt{x}),$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

(4) ist bekanntlich mit (1) äquivalent¹⁾.

In der folgenden Arbeit machen wir nur von (3) und (4) Gebrauch. Mit Hilfe von (4) beweisen wir den

Satz 1. Sei h eine natürliche Zahl. Dann ist

$$(5) \quad \pi_l(x) + \pi_{h+l}(x) + \pi_{2h+l}(x) + \pi_{3h+l}(x) + \dots \sim \frac{6x}{h \cdot \pi^2} \\ (l = 0, 1, 2, 3, \dots, h-1).$$

Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

¹⁾ Betreffs (1), (2), (3), (4) siehe E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.

Es sei $Q^{(l)}(x)$ ($l = 0, 1, 2, \dots, h-1$) die Anzahl der quadratfreien Zahlen $n \leq x$, für die $s_n \equiv l \pmod{h}$ ist. Dann sind $Q^{(0)}(x)$, $Q'(x)$, $\dots$, $Q^{(h-1)}(x)$ asymptotisch gleich.

Um Satz 1 zu beweisen, führen wir die zahlentheoretische Funktion $\nu(n; \Delta)$ ein, die definiert ist durch:

$$\nu(1; \Delta) = 1,$$

$$\nu(n; \Delta) = 0 \text{ für jede nicht quadratfreie Zahl } n,$$

$$\nu(n; \Delta) = \Delta^{s(n)} \text{ für jede quadratfreie Zahl } n.$$

Ferner setzen wir

$$(6) \quad N(x; \Delta) = \sum_1^x \nu(n; \Delta),$$

$$(7) \quad H(x; \Delta) = \sum_1^x \frac{\nu(n; \Delta)}{n},$$

$$(8) \quad J(x; \Delta) = \sum_1^x \frac{\nu(n; \Delta)}{n} \log n,$$

$\nu(n; \Delta)$ wird für $\Delta = -1$ identisch mit der Möbiusschen Funktion $\mu(n)$, während $N(x; \Delta)$, $H(x; \Delta)$, $J(x; \Delta)$ in

$$(9) \quad M(x) = \sum_1^x \mu(n),$$

$$(10) \quad g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(n)}{n},$$

$$(11) \quad f(x) = \sum_1^x \frac{\mu(n)}{n} \log n$$

übergehen.

Die Funktionen $M(x)$, $g(x)$ und $f(x)$ sind von verschiedenen Verfassern eingehend studiert worden²⁾.

²⁾ Von Mangoldt (Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0$, Sitzungsber. d. Preuß.

Akad. d. Wiss., Berlin 1897) bewies mit Hilfe der Zetafunktion, daß

(1) $g(x) = o(1)$,

(2) $M(x) = o(x)$.

Laudau (Neuer Beweis der Gleichung $\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} = 0$, Inauguraldissertation, Berlin

1899) hat (1) und (2) elementar unter lediglicher Verwendung des Primzahlsatzes bewiesen. Landau (Contribution a la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, C. R.,

Satz 2. Es sei $F(n)$ eine beliebige zahlentheoretische Funktion, $G(n)$ sei durch die Gleichung

$$G(n) = \sum_{d|n} F(d)$$

erklärt. Dann ist

$$\sum_{d|n} (1 + \Delta)^{s_d} \cdot F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \nu(d; \Delta) \cdot G\left(\frac{n}{d}\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \nu(d; \Delta) \cdot G\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \nu(d; \Delta) \cdot \sum_{d'|\frac{n}{d}} F\left(\frac{n}{dd'}\right) = \sum_{m|n} F\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \sum_{d|m} \nu(d; \Delta) \\ &= \sum_{m|n} F\left(\frac{n}{m}\right) \cdot (1 + \Delta)^{s_m}. \end{aligned}$$

Satz 3. Sei $F(x)$ eine beliebige Funktion, die für alle $x \geq 1$ definiert ist; sei

$$G(x) = \sum_1^x F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Dann ist

$$\sum_1^x (1 + \Delta)^{s_n} \cdot F\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot G\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \sum_{n'=1}^{\frac{x}{n}} F\left(\frac{x}{nn'}\right) = \sum_1^x F\left(\frac{x}{m}\right) \cdot \sum_{n|m} \nu(n; \Delta) \\ &= \sum_1^x F\left(\frac{x}{m}\right) \cdot (1 + \Delta)^{s_m}. \end{aligned}$$

Setzen wir in Satz 3 $F(x) = 1$, so ergibt sich $G(x) = [x]$, und wir erhalten

$$(1) \quad \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_1^x (1 + \Delta)^{s_n}$$

oder, indem $w_k(x)$ die Anzahl der positiven Zahlen $\leq x$ bezeichnet, die k verschiedene Primfaktoren enthalten,

$$(2) \quad \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \left[\frac{x}{n}\right] = 1 + (1 + \Delta) w_1(x) + (1 + \Delta)^2 \cdot w_2(x) + \dots$$

§ 2.

Die Hilfsfunktion $\Theta(x; \Delta)$.

Wir führen jetzt die Hilfsfunktion $\Theta(x; \Delta)$ ein; sie ist definiert durch

$$(1) \quad \Theta(x; \Delta) = \sum_{p^m \leq x} (-\Delta)^m \cdot \log p.$$

Fassen wir alle Glieder rechts in (1), für welche m denselben Wert hat, zusammen, so bekommen wir

$$(2) \quad \Theta(x; \Delta) = -\Delta \cdot \vartheta(x) + \Delta^2 \cdot \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) - \Delta^3 \cdot \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Da $\vartheta(x) = 0$ für $x < 2$, enthält die Reihe rechts nur eine endliche Anzahl Glieder, die von Null verschieden sind. Sei M diese Anzahl; dann ist

$$x^{\frac{1}{M}} \geq 2 > x^{\frac{1}{M+1}} \quad): \quad M = \left[\frac{\log x}{\log 2} \right].$$

Satz 1. *Es ist*

$$\Theta(x; \Delta) = -\Delta \cdot x + o(x) \quad \text{für} \quad |\Delta| < 2.$$

Infolge von (4) in der Einleitung ist $\vartheta(x) = x + o(x)$; ferner ist gemäß (2)

$$(2') \quad \begin{aligned} \Theta(x; \Delta) &= -\Delta \cdot \vartheta(x) + \Delta^2 \cdot \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \dots + (-\Delta)^{n-1} \cdot \vartheta(\sqrt[n-1]{x}) \\ &\quad + \{(-\Delta)^n \vartheta(\sqrt[n]{x}) + \dots\} = -\Delta \cdot x + o(x) + \{(-\Delta)^n \cdot \vartheta(\sqrt[n]{x}) \\ &\quad + (-\Delta)^{n+1} \cdot \vartheta(\sqrt[n+1]{x}) + \dots\}. \end{aligned}$$

Setzen wir $\eta = \text{Max. } (1, |\Delta|)$, so ergibt sich, da die Anzahl der nichtverschwindenden Glieder auf der rechten Seite von (2) gleich $\left[\frac{\log x}{\log 2} \right]$ ist,

$$\begin{aligned} |(-\Delta)^n \cdot \vartheta(\sqrt[n]{x}) + (-\Delta)^{n+1} \cdot \vartheta(\sqrt[n+1]{x}) + \dots| \\ \leq \eta^{\left[\frac{\log x}{\log 2} \right]} \cdot \{\vartheta(\sqrt[n]{x}) + \vartheta(\sqrt[n+1]{x}) + \dots\} \\ \leq x^{\frac{\log \eta}{\log 2}} \cdot \{\sqrt[n]{x} + o(\sqrt[n]{x})\} = x^{\frac{\log \eta}{\log 2} + \frac{1}{n}} + o(x^{\frac{\log \eta}{\log 2} + \frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

Wegen $\eta < 2$ läßt sich n so bestimmen, daß

$$\frac{\log \eta}{\log 2} + \frac{1}{n} < 1;$$

dadurch wird

$$\{(-\Delta)^n \cdot \vartheta(\sqrt[n]{x}) + (-\Delta)^{n+1} \cdot \vartheta(\sqrt[n+1]{x}) + \dots\} = o(x)$$

woraus der Satz hervorgeht.

Wir setzen jetzt, indem wir fortfahrend $|\Delta| < 2$ annehmen,

$$(3) \quad l(s) = \prod_p \frac{1}{1 + \frac{\Delta}{p^s}} = \sum_1^{\infty} \frac{(-\Delta)^{S(n)}}{n^s} \quad (s > 1)$$

Nehmen wir den Logarithmus von $l(s)$, so erhalten wir

$$(4) \quad \log l(s) = - \sum_p \log \left(1 + \frac{\Delta}{p^s} \right) = \sum_{p, m} \frac{(-\Delta)^m}{m \cdot p^{m \cdot s}},$$

wo p alle Primzahlen, m alle ganzen positiven Zahlen durchläuft. Aus (4) ergibt sich durch Derivation

$$- \frac{l'(s)}{l(s)} = \sum_{p, m} \frac{(-\Delta)^m \cdot \log p}{p^{m \cdot s}}$$

oder, indem $\Lambda(n; \Delta)$ für $n = p^m$ gleich $(-\Delta)^m \cdot \log p$, für alle anderen n gleich 0 gesetzt wird,

$$(5) \quad - \frac{l'(s)}{l(s)} = \sum_1^{\infty} \frac{\Lambda(n; \Delta)}{n^s}$$

Aus der Definition von $\Theta(x; \Delta)$ folgt unmittelbar

$$(6) \quad \Theta(x; \Delta) = \sum_1^x \Lambda(n; \Delta).$$

Weiter folgt aus (3)

$$(7) \quad \frac{1}{l(s)} = \prod_p \left(1 + \frac{\Delta}{p^s} \right) = \sum_1^{\infty} \frac{v(n; \Delta)}{n^s}$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus

$$(8) \quad \frac{l'(s)}{l^2(s)} = \sum_1^{\infty} \frac{v(n; \Delta)}{n^s} \log n.$$

Aus (5), (7), (8) folgt jetzt

$$(9) \quad \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{v(n; \Delta)}{n^s} \right\} \cdot \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{\Lambda(n; \Delta)}{n^s} \right\} = - \sum_1^{\infty} \frac{v(n; \Delta)}{n^s} \log n.$$

Wir wollen jetzt aus (9) einige Formeln ableiten, die später zur Verwendung kommen.

Satz 2. Es ist

$$\sum_1^x v(n; \Delta) \log n = - \sum_1^x v(n; \Delta) \cdot \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right).$$

Beweis. Aus (9) ergibt sich

$$\sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \sum_1^{\frac{x}{n}} \Lambda(m; \Delta) = - \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \log n,$$

woraus der Satz hervorgeht.

Satz 3. *Es ist*

$$J(x; \Delta) = \sum_1^x \frac{\Theta(n; \Delta) - \Theta(n-1; \Delta)}{n} \cdot H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right).$$

Beweis. Nach (9) ist

$$\sum_1^x \frac{\Lambda(n; \Delta)}{n} \cdot \sum_1^{\frac{x}{n}} \frac{\nu(n; \Delta)}{n} = - \sum_1^x \frac{\nu(n; \Delta)}{n} \log n,$$

was zusammen mit (6) den Satz liefert.

§ 3.

Untersuchung der Funktion $H(x; \Delta)$.

Satz 1. *Es ist*

$$|H(x; \Delta)| \leq |1 + \Delta| + |\Delta| \quad \text{für} \quad |\Delta| \leq 1, \quad |1 + \Delta| \leq 1.$$

Beweis. Wegen $H(x; \Delta) = H([x]; \Delta)$ dürfen wir voraussetzen, daß x eine ganze positive Zahl ist. Gemäß (2), § 1 ist dann

$$\begin{aligned} x \cdot |H(x; \Delta)| &= \left| \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \frac{x}{n} \right| \leq \left| \sum_1^x \nu(n; \Delta) \left[\frac{x}{n} \right] \right| + (x-1) \cdot |\Delta| \\ &= |1 + (1 + \Delta)w_1(x) + (1 + \Delta)^2 \cdot w_2(x) + \dots| + (x-1) \cdot |\Delta| \\ &\leq |1 + \Delta + (1 + \Delta)w_1(x) + (1 + \Delta)^2 \cdot w_2(x) + \dots| + x \cdot |\Delta| \\ &\leq |1 + \Delta| \cdot \{1 + w_1(x) + w_2(x) + \dots\} + x \cdot |\Delta| \\ &= |1 + \Delta| \cdot x + |\Delta| \cdot x, \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2. *Es ist*

$$\sum_1^x \frac{1}{n} H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) = \sum_1^x \frac{1}{n} \cdot (1 + \Delta)^{S_n}.$$

Beweis.

$$\sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{S_n} = \sum_1^x \frac{1}{n} \cdot \sum_{d|n} \nu(d; \Delta) = \sum_{n \cdot m \leq x} \frac{\nu(n; \Delta)}{n \cdot m} = \sum_1^x \frac{1}{m} \cdot H\left(\frac{x}{m}; \Delta\right).$$

Satz 3. Für $|\Delta| \leq 1$ ist

$$(1) \quad H(x; \Delta) = \frac{1 + \Delta}{\log x + C} \cdot \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} + o(1),$$

also nach Satz 2

$$(2) \quad H(x; \Delta) = \frac{1 + \Delta}{\log x + C} \cdot \sum_1^x \frac{1}{n} \cdot H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) + o(1),$$

dabei bezeichnet C die Eulersche Konstante.

Beweis. Wir haben

$$\sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} = \sum_{n \cdot m \leq x} \frac{v(n; \Delta)}{n \cdot m} = \sum_1^x \frac{v(n; \Delta)}{n} \cdot \sum_1^{\frac{x}{n}} \frac{1}{m}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sum_1^y \frac{1}{m} = \log y + C + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Eingetragen in die obige Formel gibt dies

$$\begin{aligned} \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} &= \sum_1^x \frac{v(n; \Delta)}{n} \left\{ \log \frac{x}{n} + C + O\left(\frac{n}{x}\right) \right\} \\ &= (\log x + C) \cdot H(x; \Delta) - J(x; \Delta) + O(1), \end{aligned}$$

woraus

$$(3) \quad H(x; \Delta) = \frac{1}{\log x + C} \cdot \left\{ \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} + J(x; \Delta) \right\} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Mit Satz 3, § 2 zusammen gibt (3)

$$(4) \quad H(x; \Delta) = \frac{1}{\log x + C} \cdot \left\{ \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} - \sum_1^x \frac{\Theta(n; \Delta) - \Theta(n-1; \Delta)}{n} \cdot H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right\} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Setzen wir hier gemäß Satz 1, § 2

$$\Theta(x; \Delta) = -\Delta \cdot x + o(x) = -\Delta \cdot x + x \cdot \varepsilon(x) \quad (\varepsilon(0) = 0),$$

so erhalten wir

$$(5) \quad H(x; \Delta) = \frac{1 + \Delta}{\log x + C} \cdot \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} - \frac{1}{\log x + C} \left\{ \sum_1^x \varepsilon(n) \cdot \left\{ H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) - H\left(\frac{x}{n+1}; \Delta\right) \right\} + \sum_1^x \frac{\varepsilon(n)}{n+1} \cdot H\left(\frac{x}{n+1}; \Delta\right) \right\} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Nun ist

$$(6) \quad \sum_1^x \frac{\varepsilon(n)}{n+1} \cdot H\left(\frac{x}{n+1}; \Delta\right) = o\left(\sum_1^x \frac{1}{n}\right) = o(\log x),$$

und

$$(7) \quad \left| \sum_1^x \varepsilon(n) \cdot \left\{ H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) - H\left(\frac{x}{n+1}; \Delta\right) \right\} \right| \\ \leq \sum_1^{\sqrt{x}} |\varepsilon(n)| \cdot \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} + \sum_{\sqrt{x}+1}^x |\varepsilon(n)| \cdot \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k}.$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung schätzen wir jetzt weiter ab, indem wir bemerken, daß

$$(8) \quad \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} \leq \frac{3}{n} \quad (n \leq \sqrt{x}).$$

Die Anzahl der Glieder in $\sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k}$ ist nämlich

$$\left[\frac{x}{n} \right] - \left[\frac{x}{n+1} \right] \leq \frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} + 1 = \frac{x}{n(n+1)} + 1.$$

Das größte Glied ist

$$\frac{1}{\left[\frac{x}{n+1} \right] + 1} \leq \frac{n+1}{x}$$

Es ist folglich

$$\sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} \leq \left\{ \frac{x}{n(n+1)} + 1 \right\} \cdot \frac{n+1}{x} = \frac{1}{n} + \frac{n}{x} + \frac{1}{x};$$

hieraus folgt (8) wegen $n \leq \sqrt{x}$. Mit Hilfe von (8) ergibt sich jetzt

$$(9) \quad \sum_1^{\sqrt{x}} |\varepsilon(n)| \cdot \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} \leq 3 \cdot \sum_1^{\sqrt{x}} \frac{|\varepsilon(n)|}{n} = o(\log x).$$

Ferner ist

$$(10) \quad \sum_{\sqrt{x}+1}^x |\varepsilon(n)| \cdot \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} = o(\log x)$$

wegen $\sqrt{x} < n \leq x$; denn zu jedem δ läßt sich ein ξ bestimmen, so daß $|\varepsilon(n)| < \delta$ für alle $x \geq \xi$; es wird also

$$\sum_{\sqrt{x}+1}^x |\varepsilon(n)| \cdot \sum_{\frac{x}{n+1}+1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{k} < \delta \cdot \sum_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{k} \sim \frac{\delta}{2} \cdot \log x,$$

woraus (10).

Nach (9) und (10) ist die rechte Seite von (7) gleich $o(\log x)$. Mit (5) und (6) zusammen gibt dies (1).

Satz 4. Sei $|\Delta| \leq 1$, $|1 + \Delta| \leq 1$, k eine natürliche Zahl. Es gibt dann zu jedem positiven ε ein ξ , so daß

$$|H(x; \Delta)| < |1 + \Delta|^k + \varepsilon$$

für alle $x \geq \xi$.

Beweis. Zuvor Satz 3 ist

$$H(x; \Delta) = \frac{1 + \Delta}{\log x + C} \cdot \sum_1^x \frac{1}{n} \cdot H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) + o(1).$$

Wir nehmen an, daß der Satz für alle natürlichen Zahlen $\leq (k-1)$ bewiesen ist. Dann ist

$$|H(x; \Delta)| < |1 + \Delta|^{k-1} + \varepsilon' \text{ für alle } x \geq \xi'.$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} |H(x; \Delta)| &\leq \frac{|1 + \Delta|}{\log x + C} \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi'}} \frac{1}{n} \cdot \left| H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right| \\ &\quad + \frac{|1 + \Delta|}{\log x + C} \cdot \sum_{\frac{x}{\xi'}+1}^x \frac{1}{n} \cdot \left| H\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right| + o(1) \\ &< \frac{|1 + \Delta|^k}{\log x + C} \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi'}} \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon' \cdot |1 + \Delta|}{\log x + C} \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi'}} \frac{1}{n} \\ &\quad + \frac{|1 + \Delta| \{ |1 + \Delta| + |\Delta| \}}{\log x + C} \cdot \sum_{\frac{x}{\xi'}+1}^x \frac{1}{n} + o(1) \\ &= |1 + \Delta|^k + \varepsilon' \cdot |1 + \Delta| + o(1). \end{aligned}$$

Da der Satz nach Satz 3 für $k = 1$ richtig ist, indem

$$\begin{aligned} |H(x; \Delta)| &\leq \frac{|1 + \Delta|}{\log x + C} \cdot \left| \sum_1^x \frac{1}{n} (1 + \Delta)^{s_n} \right| + o(1) \\ &\leq \frac{|1 + \Delta|}{\log x + C} \cdot \sum_1^x \frac{1}{n} + o(1) = |1 + \Delta| + o(1), \end{aligned}$$

so ist hiermit alles bewiesen.

Satz 5. Es ist $H(x; \Delta) = o(1)$ für $|\Delta| \leq 1$, $|1 + \Delta| < 1$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 4.

Nach Satz 5 ist die Reihe

$$1 + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{3} + \frac{\Delta}{5} + \frac{\Delta^2}{6} + \frac{\Delta}{7} + \frac{\Delta^2}{10} + \frac{\Delta}{11} + \frac{\Delta}{13} + \frac{\Delta^2}{14} + \frac{\Delta^2}{15} + \frac{\Delta}{17} + \dots$$

konvergent mit der Summe Null für $|\Delta| \leq 1$ und $|1 + \Delta| < 1$.

Satz 6. Es ist $H(x; \Delta) = o(\log x)$ für $|\Delta| \leq 1$ und $\Delta \neq 1$.

Beweis. Wir gehen von der folgenden Identität aus

$$\prod_1^{\infty} \left\{ 1 + \frac{\Delta}{p^s} \right\} = \prod_1^{\infty} \left\{ 1 + \frac{\Delta + \eta}{p^s} + \frac{\eta(\Delta + \eta)}{p^{2s}} + \frac{\eta^2 \cdot (\Delta + \eta)}{p^{3s}} + \dots \right\} \cdot \prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\eta}{p^s} \right\}.$$

Nach dieser Identität ist

$$(11) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\nu(n; \Delta)}{n^s} = \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{\eta^{S(n) - S_n} \cdot (\Delta + \eta)^{S_n}}{n^s} \right\} \cdot \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{\nu(n; -\eta)}{n^s} \right\},$$

also

$$(12) \quad H(x; \Delta) = \sum_1^x \frac{\eta^{S(n) - S_n} \cdot (\Delta + \eta)^{S_n}}{n} \cdot H\left(\frac{x}{n}; -\eta\right).$$

Wir bestimmen jetzt η , so daß $|\eta| \leq 1$, $|1 - \eta| < 1$, $|\Delta + \eta| \leq 1$, was immer möglich ist, da $|\Delta| \leq 1$ und $\Delta \neq 1$. Nach Satz 1 ist dann

$$\left| H\left(\frac{x}{n}; -\eta\right) \right| \leq |1 - \eta| + |\eta|.$$

Nach Satz 5 läßt sich zu jedem positiven ε ein ξ bestimmen, so daß

$$\left| H\left(\frac{x}{n}; -\eta\right) \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \frac{x}{n} \geq \xi; \quad n \leq \frac{x}{\xi}.$$

Mit (12) zusammen gibt dies

$$|H(x; \Delta)| < \varepsilon \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{1}{n} + \{|1 - \eta| + |\eta|\} \cdot \sum_{\frac{x}{\xi} + 1}^x \frac{1}{n} \sim \varepsilon \cdot \log x,$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 4.

Wir sind jetzt imstande, den Satz 2 der Einleitung zu beweisen.

Satz. Es ist $N(x; \Delta) = o(x)$ für $|\Delta| \leq 1$ und $\Delta \neq 1$.

Beweis. Wir setzen

$$(1) \quad \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \log n = X(x; \Delta).$$

Nach Satz 2, § 2 ist dann

$$(2) \quad X(x; \Delta) = - \sum_1^x \nu(n; \Delta) \cdot \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right).$$

Da $\Theta(x; \Delta) = -\Delta \cdot x + o(x)$, können wir zu jedem positiven ε ein ξ bestimmen, so daß

$$(3) \quad |\Theta(x; \Delta) + \Delta \cdot x| < \varepsilon \cdot x \quad \text{für alle } x \geq \xi.$$

In (2) eingetragen gibt dies

$$\begin{aligned} |X(x; \Delta)| &\leq \left| \sum_1^{\frac{x}{\xi}} \nu(n; \Delta) \cdot \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right| + \left| \sum_{\frac{x}{\xi}+1}^x \nu(n; \Delta) \cdot \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right| \\ &\leq \left| \sum_1^{\frac{x}{\xi}} \nu(n; \Delta) \cdot \left\{ \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) + \Delta \cdot \frac{x}{n} \right\} \right| + \left| \Delta \cdot x \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\nu(n; \Delta)}{n} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\frac{x}{\xi}+1}^x \nu(n; \Delta) \cdot \Theta\left(\frac{x}{n}; \Delta\right) \right| \\ &< \varepsilon \cdot x \cdot \sum_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{1}{n} + x \cdot |\Delta| \cdot \left| H\left(\frac{x}{\xi}; \Delta\right) \right| + \Theta\left(\xi; -|\Delta|\right) \cdot \left(x - \frac{x}{\xi}\right) \end{aligned}$$

Nach Satz 6, § 3 ist $H(x, \Delta) = o(\log x)$, wir erhalten schließlich

$$X(x; \Delta) = o(x \cdot \log x).$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} N(x; \Delta) &= 1 + \sum_2^x \frac{X(n; \Delta) - X(n-1; \Delta)}{\log n} \\ &= 1 + \sum_2^x X(n; \Delta) \cdot \left\{ \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right\} + \frac{X(x; \Delta)}{\log([x]+1)} \\ &= o\left(\sum_2^x \frac{n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right) + o(x) \\ &= o\left(\sum_2^x \frac{1}{\log n}\right) + o(x) = o\left(\frac{x}{\log x}\right) + o(x) = o(x). \end{aligned}$$

§ 5.

Wir haben in den zwei letzten Paragraphen u. a. bewiesen:

- I. $H(x; \Delta) = o(1)$ für $|\Delta| \leq 1$ und $|1 + \Delta| < 1$.
 II. $H(x; \Delta) = o(\log x)$ für $|\Delta| \leq 1$ und $\Delta \neq 1$.
 III. $N(x; \Delta) = o(x)$ für $|\Delta| \leq 1$ und $\Delta \neq 1$.

Diese Abschätzungen bleiben sicher auch gültig für gewisse Werte von Δ vom absoluten Betrag größer als 1; für II und III ist das ohne weiteres aus dem Beweis ersichtlich; Δ war nämlich bestimmt durch

$$|\eta| \leq 1, \quad |1 - \eta| < 1 \quad \text{und} \quad |\eta + \Delta| \leq 1,$$

woraus

$$|\Delta| \leq 2 \quad \text{und} \quad |1 + \Delta| < 2.$$

Da diese Fragen für den Beweis von Satz 1 der Einleitung belanglos sind, bin ich in dieser Arbeit nicht näher auf sie eingegangen. Ich erwähne auch eine Formel, die ich für $J(x; \Delta)$ gefunden habe:

$$J(x; \Delta) = \Delta \cdot \left\{ 1 + \sum_2^x \frac{(1 + \Delta)^{S_n}}{n} \right\} + o(1) \quad \text{für} \quad |\Delta| \leq 1 \quad \text{und} \quad |1 + \Delta| < 1.$$

Ich hoffe auf diese Fragen später zurückzukommen.

(Eingegangen am 27. Januar 1938.)

Beweis eines Satzes von A. S. Besicovitch über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen.

Von

Hans-Heinrich Ostmann in Breslau.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, die 0 und 1 enthalten, so versteht man unter der *Summe* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Menge aller Zahlen $a + b$ mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$. Weiter bezeichne $A(n)$ die Anzahl der positiven Zahlen von $\mathfrak{A}$, die die ganze Zahl n nicht übertreffen, $\Delta(\mathfrak{A})$ die *Dichte* der Menge $\mathfrak{A}$, d. h. die untere Grenze der Folge

$$\frac{A(1)}{1}, \frac{A(2)}{2}, \frac{A(3)}{3}, \dots$$

$$\Delta(\mathfrak{A}) = \alpha = \underline{\text{fin}} \frac{A(n)}{n},$$

entsprechend

$$\Delta(\mathfrak{B}) = \beta = \underline{\text{fin}} \frac{B(n)}{n}, \quad \Delta(\mathfrak{C}) = \gamma = \underline{\text{fin}} \frac{C(n)}{n}.$$

Setzt man schließlich

$$\alpha^* = \underline{\text{fin}} \frac{A(n)}{n+1}, \quad \beta^* = \underline{\text{fin}} \frac{B(n)}{n+1},$$

so gilt nach A. S. Besicovitch¹⁾:

$$\gamma \geq \text{Max}(\alpha + \beta^*, \alpha^* + \beta).$$

Diese Beziehung läßt sich sehr einfach wie folgt beweisen²⁾:

Sind $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2, \dots, a_{k+1}$ sämtliche Zahlen aus $\mathfrak{A}$, die die positive ganze Zahl n nicht übertreffen, so ist $B(a_{x+1} - a_x - 1)$ die Anzahl der ganzen Zahlen x , für die

$$a_x < x \leq a_{x+1} - 1 \quad \text{und} \quad (x - a_x) \in \mathfrak{B} \quad (x = 1, 2, \dots, k)$$

gilt; ebenso ist $B(n - a_{k+1})$ die Anzahl der ganzen Zahlen x , für die

$$a_{k+1} < x \leq n \quad \text{und} \quad (x - a_{k+1}) \in \mathfrak{B}$$

¹⁾ Vgl. A. S. Besicovitch, On the density of the sum of two sequences of integers; Journ. London Math. Soc. **10** (1935), S. 246–248.

²⁾ Ich benutze dabei ein Verfahren von L. Schnirelmann, Additive Eigenschaften von Zahlen; Math. Annalen **107** (1933), S. 649–690, insbesondere S. 652.

gilt. Da diese Zahlen x sicher zu $\mathfrak{C}$ gehören, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n} &\geq \frac{1}{n} (A(n) + B(n - a_{k+1}) + \sum_{x=1}^k B(a_{x+1} - a_x - 1)) \\ &\geq \frac{1}{n} (\alpha n + \beta^* (n - a_{k+1} + 1) + \beta^* \cdot \sum_{x=1}^k (a_{x+1} - a_x)) \\ &= \frac{1}{n} (\alpha n + \beta^* (n - a_{k+1} + 1 + a_{k+1} - a_1)),\end{aligned}$$

mithin $\gamma \geq \alpha + \beta^*$. Ebenso findet man $\frac{C(n)}{n} \geq \alpha^* + \beta$, also $\gamma \geq \alpha^* + \beta$.

(Eingegangen am 13. März 1938.)

Über nicht beweisbare und doch entbehrliche Axiome.

Von

Richard Baldus in München.

1. Fügt man zu einem Axiomensystem ein Axiom hinzu, das mit den in den übrigen Axiomen verwendeten Begriffen gar nichts zu tun hat, z. B. zu den Axiomen der Euklidischen Geometrie ein solches über die Existenz von Primzahlen, dann ist dieses Axiom zwar aus den übrigen Axiomen nicht beweisbar, aber doch entbehrlich. Solche Axiome werden vermieden, indem man jedes Axiom so formuliert, daß es aus einem die Voraussetzungen enthaltenden Vordersatz und einem die Forderung des Axioms aussprechenden Nachsatze besteht, wobei die Möglichkeit des Vordersatzes durch vorausgehende Axiome gewährleistet ist, und indem man festlegt, daß nur dann eine zulässige Deutung des Axiomensystems vorliegen soll, wenn jedes Axiom benötigt wird, d. h. die Voraussetzungen seines Vordersatzes erfüllt sind.

Von diesem einfachen Sachverhalte möge im folgenden *nicht* die Rede sein, wenn es sich um nicht beweisbare und doch entbehrliche Axiome handeln soll.

2. Wohl kein anderes mathematisches Axiomensystem ist so eingehend untersucht worden, wie D. Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie¹, sowohl von D. Hilbert selbst als auch von anderen Mathematikern², insbesondere auch darauf hin, ob nicht Axiome oder Teile von solchen eingespart werden können, weil sie aus den übrigen Axiomen beweisbar sind. Das Endergebnis ist die Fassung der Axiome in der 7. Auflage der „Grundlagen“, auf die weiterhin Bezug genommen wird, wenn von D. Hilberts Axiomensystem die Rede ist.

Begrifflich lassen sich einige Axiome der „Grundlagen“ noch insofern vereinfachen, als man sie nicht für die Gesamtheit aller möglichen Fälle auszusprechen braucht, so das Archimedische Axiom, das man nur für eine bestimmte Strecke und ihre Teilstrecken zu fordern braucht³). Es empfiehlt

¹) D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“, 7. Aufl., Leipzig u. Berlin 1930, 326 S., weiterhin zitiert als „Grundlagen“.

²) Angaben darüber finden sich in den „Grundlagen“, vor allem in den Anmerkungen.

³) R. Baldus, „Zur Axiomatik der Geometrie III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom“. (Weiterhin kurz „A. G. III“). Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, 1930, 5. Abh., 12 S.

sich, das Euklidische Parallelenaxiom an den Schluß des Axiomensystems zu stellen. Auch das Parallelenaxiom braucht man nur für eine einzige Gerade und nur einen nicht auf ihr liegenden Punkt auszusprechen, z. B. in der Form: „Es gibt eine Ebene α , in dieser eine Gerade a und einen ihr nicht angehörenden Punkt A derart, daß in α höchstens eine Gerade, welche A enthält, zu a parallel ist“⁴⁾. Daraus folgt dann ohne weiteres, daß man das Axiomensystem der absoluten Geometrie nur entweder durch das Euklidische Parallelenaxiom oder durch das Parallelenaxiom der hyperbolischen Geometrie abschließen kann, daß es also z. B. keine mit den übrigen Axiomen verträgliche gemischt Euklidisch-hyperbolische Geometrie gibt.

Auf diese Möglichkeit, Axiome, statt sie für alle denkbaren Fälle auszusprechen, nur auf eine Auswahl aus ihnen zu beschränken, hat D. Hilbert, außer in seinen beiden ersten Axiomgruppen, bewußt verzichtet⁵⁾.

Gegen das Vollständigkeitsaxiom lassen sich sehr ernst zu nehmende Einwände erheben⁶⁾, zu denen auch gehört, daß es sicher nicht die Forderung „möglichst einfaches Axiom“⁷⁾ erfüllt, so daß es sich empfiehlt, es durch ein anderes Axiom zu ersetzen, etwa durch eine unmetrische Form des Cantorsche Axioms⁸⁾. Dadurch entfällt dann auch die Schwierigkeit, die darin liegt, daß man mit dem sonst üblichen Verfahren grundsätzlich nichts darüber entscheiden kann, ob in dem Vollständigkeitsaxiom genannte Axiome, z. B. V 1, nicht eine Folge des Vollständigkeitsaxioms, d. h. aus diesem und anderen Axiomen beweisbar sind⁹⁾.

3. Ersetzt man das Vollständigkeitsaxiom durch das Cantorsche Axiom, dann hat man nach dem Anfange von Nr. 2 ein Axiomensystem, in dem wohl — von der erwähnten Möglichkeit der Beschränkung auf eine Auswahl der Fälle für einzelne Axiome abgesehen — kein Axiom oder Teil eines solchen beweisbar und daher entbehrlich ist. Trotzdem ist es möglich, das Axiomensystem D. Hilberts noch wesentlich zu vereinfachen, und zwar in folgender Weise¹⁰⁾:

⁴⁾ Vgl. des Verfassers „Nichteuklidische Geometrie“, Sammlung Götschen Nr. 970, Berlin u. Leipzig 1927, 152 S., insbesondere Nr. 37 u. 38, sowie D. Hilberts „Grundlagen“, S. 38.

⁵⁾ „Grundlagen“, S. 38, Anm. 1.

⁶⁾ Vgl. des Verfassers „A. G. I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom“, Math. Annalen 100 (1928), S. 321—333. Darin ist von der Fassung des Vollständigkeitsaxioms in der 6. Aufl. der „Grundlagen“, 1923, die Rede, doch gelten die grundsätzlichen Einwände auch für die Fassung in der 7. Aufl.

⁷⁾ Vgl. „Grundlagen“, S. 1.

⁸⁾ Siehe „A. G. III“.

⁹⁾ „A. G. I“, Nr. 14 u. 15.

¹⁰⁾ Dies ist vom Verfasser durchgeführt in „A. G. V. Vereinfachung des Hilbertschen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie“, Sitz-Ber. d. Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Math.-naturw. Abt., 1937, S. 189—228. Dort sind auf S. 227 folgende

D. Hilbert denkt drei verschiedene Systeme von Dingen, die Punkte, Geraden, Ebenen. Man führt statt dessen nur *ein* System von Dingen, die Punkte, ein, erklärt eine Beziehung „zwischen“ und beginnt mit den Anordnungsaxiomen als erster Axiomgruppe. Sind A, B irgend zwei Punkte, dann bilden, wie man weiter erklärt, die Punkte A und B sowie die Punkte, welche mit A und B in einer zwischen-Beziehung stehen, die „Punktreihe AB “. Nun beweist man, daß man die Punktreihe AB statt durch A und B durch irgend zwei ihrer Punkte definieren kann. Drei Punkte A, B, C , welche nicht zur gleichen Punktreihe gehören, bestimmen ein Dreieck ABC , die Punkte der Strecken AB, BC, CA und die Eckpunkte bilden die „Seiten des Dreiecks“. Das „Punktfeld ABC “ erklärt man als die Gesamtheit der Punkte derjenigen Punktreihen, welche irgendeinen Eckpunkt des Dreiecks und einen Punkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite enthalten und beweist jetzt, daß man statt des Dreiecks ABC irgendein Dreieck des Punktfeldes, dessen Eckpunkte und Gegenseiten zur Erklärung desselben Punktfeldes wählen kann.

Damit hat man den wesentlichen Anfang für das Axiomensystem der Euklidischen Geometrie, das jetzt angeführt werden soll, und das sich, von den beiden ersten Axiomgruppen abgesehen, an D. Hilberts Axiomensystem anschließt, unter Berücksichtigung der in Nr. 2 gemachten Bemerkungen.

4. Im folgenden sind unter zwei, drei, ... Punkten immer zwei, drei, ... *verschiedene* Punkte gemeint¹¹⁾. Die Buchstaben in den Axiomen auftretender Punkte, auf die später zurückgegriffen wird, sind durch Überstreichen hervorgehoben. Diese Punkte können durch andere ersetzt werden, nur muß das gleichzeitig in allen Axiomen geschehen, die von ihnen handeln¹²⁾.

1. Erklärung. Die Euklidische Geometrie handelt von einem System von Dingen, die man „Punkte“ nennt und mit großen, lateinischen Buchstaben bezeichnet. Punkte können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „zwischen“ bezeichnet wird.

A. Anordnungsaxiome.

A 1. Es gibt drei Punkte $\bar{R}, \bar{S}, \bar{T}$, die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen.

A 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es wenigstens einen dritten Punkt C derart, daß B zwischen A und C liegt, in Zeichen ABC .

Ergänzungen einzufügen: Zeile 11 von oben ist nach „Tetraeders“ einzufügen „oder welche zwei Punkte zweier Gegenkanten“ und Zeile 16 von oben ist nach „Gegentetraeders“ einzufügen „oder einen Punkt einer Kante und einen Punkt der Gegenfläche“.

¹¹⁾ Zwei verschiedene Buchstaben können denselben Punkt bezeichnen, aber zwei Punkte können nicht zusammenfallen, denn dann wären es eben nicht *zwei* Punkte.

¹²⁾ Es handelt sich also nicht um Punktindividuen, wie in der Arithmetik um Zahlenindividuen.

A 3. Aus ABC folgt CBA .

A 4. Unter drei Punkten gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

A 5. Liegt einer der Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen und einer der Punkte A, B, D zwischen den beiden anderen, dann liegt auch einer der Punkte B, C, D zwischen den beiden anderen.

2. Erklärung. Sind A, B irgend zwei Punkte, dann bilden die Punkte A und B sowie die Punkte, welche mit A und B in einer zwischen-Beziehung stehen, die „Punktreihe AB “. Punktreihen werden auch mit kleinen, lateinischen Buchstaben bezeichnet.

3. Erklärung. Das System zweier Punkte A, B nennt man, ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge, „Strecke AB “. Die Punkte zwischen A und B heißen „Punkte der Strecke AB “, A und B heißen „Endpunkte der Strecke AB “; alle übrigen Punkte der Punktreihe AB heißen „außerhalb der Strecke AB “ gelegen.

A 6. Sind A, B, C drei Punkte, die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen, ist D ein Punkt der Strecke AB und E ein außerhalb der Strecke AC liegender Punkt der Punktreihe AC , dann enthält die Punktreihe DE mindestens einen Punkt der Strecke BC .

4. Erklärung. Sind O, A, B drei Punkte einer Punktreihe, dann liegen A und B „auf der gleichen Seite von O “, wenn O nicht zwischen A und B liegt, „auf verschiedenen Seiten von O “, wenn AOB gilt. Die Punkte auf der gleichen Seite von O bilden eine von O ausgehende „Halb-punktreihe“.

5. Erklärung. Drei Punkte A, B, C , die miteinander in keiner zwischen-Beziehung stehen, bestimmen ein „Dreieck“, „ $\triangle ABC$ “. Die drei Punkte heißen dessen „Ecken“. Die Punkte der Strecke AB heißen „innere Punkte der Gegenseite von C “, diese Punkte sowie A und B heißen „Punkte der Gegenseite von C “.

6. Erklärung. Es sei ein $\triangle ABC$ gegeben. Die Punkte derjenigen Punktreihen, welche irgendeine Ecke des Dreiecks und einen Punkt der zugehörigen Gegenseite enthalten, bilden das „Punktfeld ABC “. Punktfelder werden auch mit kleinen, griechischen Buchstaben bezeichnet.

7. Erklärung. Eine Punktreihe zerlegt ein Punktfeld, dem sie angehört, in zwei „Halb-felder“. Die Punktreihe gehört zu keinem der beiden Halb-felder.

B. Dimensionsaxiome.

B 1. Es gibt einen Punkt $\bar{U}$, der nicht zum Punktfeld $\bar{R}\bar{S}\bar{T}$ gehört.

B 2. Haben zwei Punktfelder einen Punkt gemeinsam, dann haben sie noch einen Punkt gemeinsam.

8. Erklärung. Strecken können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „kongruent“ bezeichnet wird.

C. Kongruenzaxiome.

C 1. Ist eine Strecke AB gegeben, ferner ein Punkt A' , dann kann man in jeder Punktreihe, zu der A' gehört, mindestens zwei Punkte B' , B'_1 derart angeben¹³⁾, daß $B'A'B'_1$ gilt und daß die Strecke AB den Strecken $A'B'$ und $A'B'_1$ kongruent ist, in Zeichen $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'_1$.

C 2. Aus $A'B' \equiv AB$ und $A''B'' \equiv AB$ folgt $A'B' \equiv A''B''$.

C 3. Ist B Punkt einer Strecke AC und B' Punkt einer Strecke $A'C'$, ist überdies $AB \equiv A'B'$ sowie $BC \equiv B'C'$, dann ist $AC \equiv A'C'$.

9. Erklärung. Das System zweier von einem Punkt O ausgehenden Halb-punktreihen h, k , die nicht zu derselben Punktreihe gehören, nennt man, ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge, „Winkel“ und bezeichnet es mit „ $\angle(h, k)$ “ oder „ $\angle(k, h)$ “. h und k heißen die „Schenkel“ des Winkels, O heißt dessen „Scheitel“. Ist A ein Punkt von h und B ein Punkt von k , dann bezeichnet man den Winkel auch mit „ $\angle AOB$ “ oder „ $\angle BOA$ “.

Sind $\bar{h}$ und $\bar{k}$ die Punktfolgen, deren Halb-punktreihen h und k sind, dann bildet die Gesamtheit der Punkte des Punktfeldes AOB , welche zugleich demselben von $\bar{h}$ begrenzten Halb-felde wie die Punkte von k und demselben von $\bar{k}$ begrenzten Halb-felde wie die Punkte von h angehören, das „Innere“ des Winkels. Die übrigen von O verschiedenen und nicht zu h oder k gehörenden Punkte des Punktfeldes bilden das „Äußere“ des Winkels.

10. Erklärung. Winkel können in einer Beziehung stehen, die durch das Wort „kongruent“ bezeichnet wird.

C 4. Es sei $\angle(h, k)$ gegeben sowie in einem Punktfeld eines der beiden Halb-felder α' , in die eine gegebene Punktreihe a' des Feldes dieses zerlegt; h' sei eine Halb-punktreihe von a' . Dann gibt es genau eine Halb-punktreihe k' so, daß $\angle(h, k)$ dem $\angle(h', k')$ kongruent ist und zugleich ein Punkt von k' zu α' gehört, in Zeichen $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

C 5. $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$.

C 6. Es seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ mit den Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ gegeben, dann ist auch $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

11. Erklärung. Zwei Punktfolgen desselben Punktfeldes, welche keinen Punkt gemeinsam haben, heißen zueinander „parallel“.

D. Axiome des Messens.

D 1. Es gibt eine Strecke AB einer Punktfolge a von folgender Art: A_1 sei ein beliebiger Punkt in der Strecke; in a gibt es dann $n-1$ Punkte $A_2, A_3, \dots, A_n$, so daß die Strecken $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ einander kongruent sind und B zwischen A_{n-1} und A_n liegt.

¹³⁾ Ob A' in der Punktfolge AB liegt oder nicht, ob die Punktfolge $A'B'$ dieselbe ist wie die Punktfolge AB oder nicht, ist dabei gleichgültig.

D 2. Es gibt eine Strecke A_1B_1 folgender Art: $A_\nu B_\nu$, $\nu = 2, 3, \dots$ sei eine Folge von Strecken derart, daß die Endpunkte der ν -ten Strecke in der $\nu-1$ -ten liegen und daß es keine Strecke gibt, deren Endpunkte in allen Strecken $A_\nu B_\nu$ liegen; dann gibt es einen Punkt, der in allen Strecken $A_\nu B_\nu$ liegt.

E. Das Euklidische Parallelenaxiom.

E. Es gibt ein Punktfeld α , in diesem eine Punktreihe a und einen ihr nicht angehörenden Punkt A derart, daß in α höchstens eine Punktreihe, welche A enthält, zu a parallel ist.

5. Das hier eingeführte Axiomensystem, über das man nähere Einzelheiten in „A. G. V“ findet, unterscheidet sich wesentlich von dem Axiomensystem D. Hilberts in den beiden ersten Axiomgruppen:

Bezeichnet man die beiden Axiome, welche in D. Hilberts Axiom I 3 zusammengefaßt sind, mit I 3a und I 3b, entsprechend die beiden Axiome in I 4 mit I 4a und I 4b, dann stimmen die hier eingeführten Axiome der beiden Gruppen A und B mit folgenden Axiomen D. Hilberts überein, oder hängen mit ihnen auf das engste zusammen: Axiom A 1 mit I 3b, Axiom A 2 mit II 2, Axiom A 3 mit II 1, Axiom A 4 mit II 3, Axiom A 5 mit I 2, Axiom A 6 mit II 4, Axiom B 1 mit I 8, Axiom B 2 mit I 7, während die übrigen Axiome der ersten Gruppe D. Hilberts, nämlich I 1, I 3a, I 4a, I 4b, I 5, I 6 beweisbar sind, wenn man „Punktreihe“ statt „Gerade“ und „Punktfeld“ statt „Ebene“ setzt.

Man hat also durch Einführung nur eines Systems von Dingen statt dreier Systeme das Axiomensystem wesentlich vereinfachen können. Die zuletzt genannten sechs Axiome D. Hilberts sind entbehrlich, obwohl sie, worauf noch einmal hingewiesen sei, dann nicht beweisbar sind, wenn man die drei Systeme von Dingen „Punkte“, „Gerade“, „Ebenen“ einführt. *Dadurch, daß man die Unbeweisbarkeit eines Axioms feststellt, ist demnach noch nichts darüber gesagt, ob man es nicht doch einsparen kann.* Auf diese sehr beunruhigende Tatsache der Axiomatik soll nun näher eingegangen werden.

6. Die Erklärungen D. Hilberts gelten folgenden Worten und Ausdrücken: „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“, „zwischen“, „Strecke“, „innerhalb einer Strecke“, „Endpunkte einer Strecke“, „außerhalb einer Strecke“, „Seiten einer Geraden in einer Ebene“, „Seiten von einem Punkt aus in einer Geraden“, „kongruent (bei Strecken)“, „Winkel“, „Schrenkel“, „Scheitel“, „Inneres eines Winkels“, „Äußeres eines Winkels“, „kongruent (bei Winkeln)“.

Während I 1 heißt „Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört“, lautet der zweite Satz von I 3 „Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden

„liegen“. Es ist daher hier „*liegen*“ *vollständig gleichbedeutend mit* „*zusammengehören*“ gebraucht. Das ist sprachlich nicht glücklich, denn „*zusammengehören*“ ist viel besser als das an bestimmte räumliche Vorstellungen anknüpfende „*liegen*“; es entsteht die Gefahr, daß man bei einer räumlichen Deutung des Axiomensystems an diese räumlich mehr aussagende Bedeutung von „*liegen*“ denkt. Somit ist es bedenklich und auch ganz überflüssig, in einem Axiomensystem zwei verschiedene Worte für den gleichen Tatbestand zu gebrauchen. Man wählt am besten das Wort, das am wenigsten an bestimmte Deutungen erinnert, das unverbindlichste, und das ist hier „*zusammengehören*“.

7. Dann kommt man zu einer wichtigen Eigenschaft des Axiomensystems D. Hilberts, von der jetzt die Rede sein soll.

Es sei $\{\mathfrak{D}\}$ die übliche, Euklidische Deutung des Axiomensystems. Nun leitet man daraus eine Deutung $\{\mathfrak{E}\}$ in folgender Weise ab:

Die Punkte von $\{\mathfrak{D}\}$ läßt man unverändert, die Ebenen verschiebt man parallel um eine Strecke $s > 0$ in einer bestimmten Richtung r_1 , die Geraden, abermals parallel, in derselben Richtung um eine Strecke $t \neq s$, $t > 0$, während man die Bestimmungeigenschaften und alle übrigen axiomatischen Beziehungen von $\{\mathfrak{D}\}$ unverändert läßt. Damit hat man eine Deutung $\{\mathfrak{E}\}$, welche alle Axiome D. Hilberts erfüllt.

In $\{\mathfrak{E}\}$ enthält eine Gerade, die zu r_1 nicht parallel ist, räumlich keinen der Punkte, mit denen sie „*zusammengehört*“, eine Ebene, die zu r_1 nicht parallel ist, keinen der Punkte und keine der Geraden, mit denen sie „*zusammengehört*“, während die Längen von Strecken, die Winkelgrößen, die Kongruenzbeziehungen nicht verändert worden sind¹⁴⁾. Nimmt man ein Dreieck in einer zu r_1 nicht parallelen Ebene, dann enthält keine seiner Seiten räumlich einen der zu ihr gehörenden Punkte, die Dreiecksebene enthält räumlich keine Dreiecksseite, keinen Eckpunkt des Dreiecks, keinen Punkt einer Dreiecksseite.

Wählt man die positive x -Achse eines rechtwinkligen, räumlichen Koordinatensystems parallel zu r_1 und gleichgerichtet mit der Verschiebung, dann hat die Gleichung einer Ebene, die mit den Punkten (x, y, z) zusammengehört, in $\{\mathfrak{D}\}$ die Form

$$ax + by + cz + d = 0,$$

während sie in $\{\mathfrak{E}\}$ heißt

$$(1) \quad ax + by + cz + d + as = 0.$$

¹⁴⁾ Man könnte auch die Ebenen in einer anderen Richtung als die Geraden verschieben oder, statt wie hier mit Parallelverschiebungen, mit Dehnungen des Raumes von einem Punkt aus arbeiten, und zwar für die Geraden, und mit ebensolchen (von demselben oder einem anderen Punkt aus) für die Ebenen, vgl. „A. G. V“, Nr. 7.

Die Gerade, welche in $\{\mathfrak{E}\}$ mit den Punkten der Punktreihe $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ zusammengehört, hat die Gleichungen

$$(2) \quad \frac{x + t - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Obwohl bei $\{\mathfrak{E}\}$ die zu Beginn von Nr. 6 genannten Worte und Ausdrücke „Punkt“, „Gerade“, . . . , „kongruent“ im Sinne Euklids verwendet sind, liegt hier eine Deutung vor, die Euklid zweifellos nicht gemeint hat, weil die räumliche Inzidenz zwischen einer Ebene und deren Punkten sowie Geraden gestört ist, ebenso die zwischen einer Geraden und ihren Punkten. *D. Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie liefert daher selbst bei Euklidischer Deutung aller dieser Worte und Ausdrücke nicht nur die Geometrie Euklids¹⁵⁾*. Eine rein axiomatische Beschreibung des Ausdruckes „zusammengehören“, welche bei der Euklidischen Deutung dieser Worte und Ausdrücke auch die räumlichen Inzidenzen zwischen „Punkten“, „Geraden“ und „Ebenen“ im Sinne Euklids liefert, ist bei D. Hilberts Axiomensystem nicht möglich.

Für die Gesamtheit dieser Geometrien, welche dem Axiomensystem D. Hilberts genügen, ist keines seiner Axiome entbehrlich; beschränkt man sich aber unter ihnen auf die Geometrie Euklids, indem man „Gerade“ gleichbedeutend mit „Punktreihe“ auffaßt, ebenso „Ebene“ gleichbedeutend mit „Punktfeld“, wie es in dem Axiomensystem von Nr. 4 geschehen ist, dann hat man aus der Gesamtheit dieser Geometrien eine bestimmte herausgegriffen (die, bei der in den Gleichungen (1) und (2) $s = t = 0$ ist), und bei dieser kann man die in Nr. 5 genannten sechs Axiome Hilberts als beweisbar einsparen, nämlich I 1, I 3a, . . . , I 6.

8. Was soeben über D. Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie gesagt wurde, gilt sinngemäß für alle Axiomensysteme der reellen und komplexen Euklidischen, reellen und komplexen projektiven, reellen und komplexen Nichteuklidischen Geometrien, in denen, wie es oft geschieht, *verschiedene Systeme von Dingen eingeführt werden: in allen diesen Axiomensystemen ist das Auftreten zwar nicht beweisbarer, aber doch entbehrlicher Axiome möglich*, die dann wegfallen, wenn man nur ein System von Dingen einführt. Der Grund ist immer wieder der, daß diese Axiomensysteme nicht nur die eine Geometrie beschreiben, die man treffen will, sondern bei gleichbleibender Deutung der im Axiomensystem erklärten Worte und Ausdrücke eine Menge von Geometrien.

Mit der Beschränkung auf ein System von Dingen ist gleichzeitig noch ein weiterer Vorteil verknüpft: während man bei der Ausdehnung des Hilbertschen Axiomensystems auf vier Dimensionen ein neues System von Dingen

¹⁵⁾ Es ist hier unterschieden zwischen der „Euklidischen Geometrie“ im Sinne D. Hilberts und der „Geometrie Euklids“.

eingeführen muß, nämlich dreidimensionale Räume, bei fünf Dimensionen wieder ein neues, nämlich vierdimensionale Räume usw., kann man, wenn man als das einzige System von Dingen das der Punkte eingeführt hat, un schwer um je eine Dimension weitergehen, selbst *ein Axiomensystem für die Euklidische Geometrie von abzählbar unendlich vielen Dimensionen* angeben. Das Entsprechende gilt für alle im vorigen Absatze genannten Geometrien¹⁶⁾.

¹⁶⁾ Vgl. für die komplexe und die reelle projektive Geometrie des Verfassers „Ein Axiomensystem der komplexen, projektiven Geometrie“, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akademie d. Wissenschaften, 1933, S. 149—191, insbesondere Nr. 46, sowie für die reelle, Euklidische Geometrie „A. G. V“, Nr. 28 (siehe die hier vorhergehende Anm. 10, S. 322 u. 323).

(Eingegangen am 13. Februar 1938.)

Die Invarianten von Streifen auf Flächen in der Bewegungsgeometrie.

Von

Heinrich Schatz in Innsbruck.

Die Differentialgeometrie der Streifen im Raum ist im ersten Band der Vorlesungen über Differentialgeometrie von W. Blaschke (3. Auflage, 1930, S. 67ff.)¹⁾ behandelt. Der Streifen wird durch eine Raumkurve $\mathfrak{x}(t)$ und den Normalenvektor $\mathfrak{v}(t)$ der Streifenebene gegeben, wobei noch die Streifenbedingung $\dot{\mathfrak{x}} \mathfrak{v} = 0$ erfüllt sein muß. Führen wir als neuen Parameter die Bogenlänge s der Streifenkurve ein, bezeichnen wir die Ableitungen nach dieser Bogenlänge mit Strichen und legen wir die Streifenebene durch ihren Normalenvektor fest, dann lautet Streifenbedingung $\mathfrak{x}' \mathfrak{v} = 0$ und zwischen $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}$ und dem zu $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{v}$ senkrechten Vektor $\mathfrak{w}$ ²⁾ bestehen folgende inneren und äußeren Produkte:

	$\mathfrak{x}'$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$		$\mathfrak{x}' \times$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{w}$
(1)	$\mathfrak{x}'$	1	0		$\mathfrak{x}' \times$	0	$-\mathfrak{w}$
	$\mathfrak{v}$	0	1		$\mathfrak{v} \times$	$\mathfrak{w}$	0
	$\mathfrak{w}$	0	0		$\mathfrak{w} \times$	$-\mathfrak{v}$	$\mathfrak{x}'$
		1				0	

Die Ableitungsgleichungen des Streifens erhalten die Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{x}'' &= -b\mathfrak{v} + c\mathfrak{w}, \\
 \mathfrak{v}' &= b\mathfrak{x}' - a\mathfrak{w}, \\
 \mathfrak{w}' &= -c\mathfrak{x}' + a\mathfrak{v}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen sind die Invarianten des Streifens. Sie sind durch

$$\begin{aligned}
 a &= \mathfrak{v} \mathfrak{w}' = -\mathfrak{v}' \mathfrak{w}, \\
 b &= \mathfrak{x}' \mathfrak{v}' = -\mathfrak{x}'' \mathfrak{v}, \\
 c &= \mathfrak{x}'' \mathfrak{w} = -\mathfrak{x}' \mathfrak{w}'
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

erklärt und sind als innere Produkte von Vektoren gegenüber Bewegungen invariant. Die Invariante a heißt die geodätische Windung, b die Normalenkrümmung und c die Tangentenkrümmung des Streifens. Projizieren wir die

¹⁾ Weiterhin als Bl. 1 bezeichnet.

²⁾ In Bl. 1 heißen unsere Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ entsprechend $\mathfrak{x}'$, ξ , η .

Streifenkurve senkrecht auf die Ebenen $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}' \rangle$ und $\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}' \rangle$, so sind b und c die Krümmungen der Projektionen der Streifenkurve auf diese Ebenen. Zu einer Deutung von a kommen wir, wenn wir die Richtung der Schnittgeraden zweier konsekutiver Streifenebenen (die zu $\mathbf{x}'$ „konjugierte“ Richtung $\mathbf{f}$) aufsuchen. Für den Winkel β zwischen $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{f}$ gilt:

$$(4) \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Für $a = 0$ entstehen Krümmungstreifen, für $b = 0$ Schmiegestreifen und für $c = 0$ geodätische Streifen.

Wir betrachten jetzt eine Fläche im Raum, die wir durch $\mathbf{x}(u, v)$ beschreiben. Eine Kurve auf der Fläche entsteht durch $u = u(t)$ und $v = v(t)$. Der Streifen sei jetzt durch die Flächenkurve und durch die Tangentenebenen an die Fläche längs dieser Kurve festgelegt. Für die Fläche gilt:

$$(5) \quad \begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v^2, \quad W^2 = EG - F^2, \\ L &= \frac{1}{W} (\mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v), \quad M = \frac{1}{W} (\mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v), \quad N = \frac{1}{W} (\mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v), \\ A^2 &= E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2, \\ B^2 &= L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2, \end{aligned}$$

und wir erhalten für unsere Flächenstreifen die begleitenden Vektoren:

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}}{A}, \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{W}, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{v} \times \mathbf{x}' = \frac{1}{WA} [(E \mathbf{x}_v - F \mathbf{x}_u) \dot{u} + (F \mathbf{x}_v - G \mathbf{x}_u) \dot{v}]. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{v}'$ ergibt sich:

$$(7) \quad \mathbf{v}' = \left(\frac{1}{W} \right)' (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) + \frac{1}{WA} [(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v) \dot{u} + (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_{uv}) \dot{v} + (\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \dot{v} + (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_{vv}) \dot{v}],$$

somit für $a = -\mathbf{v}' \mathbf{w}$ unter Benutzung von (5):

$$(8) \quad a = -\mathbf{v}' \mathbf{w} = -\frac{1}{WA^2} [(FL - EM) \dot{u}^2 + (LG - EN) \dot{u} \dot{v} + (MG - FN) \dot{v}^2],$$

oder in anderer Bezeichnung:

$$(9) \quad a = \frac{1}{WA^2} \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u} \dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}.$$

Für $a = 0$ kommen Krümmungstreifen heraus und die Flächenkurven, längs deren die Streifen Krümmungstreifen sind, sind die Krümmungslinien, deren Differentialgleichung aus (9) durch Nullsetzen hervorgeht.

Für die Normalenkrümmung b des Streifens gilt nach (3) $b = \mathbf{x}' \mathbf{v}' = -\mathbf{x}'' \mathbf{v}$. Aus (6) und (7) erhalten wir:

$$(10) \quad b = \mathbf{x}' \mathbf{v}' = -\frac{1}{A^2} (L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2) = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Für die Schmiegestreifen ($b = 0$) kommt für die zugehörigen Flächenkurven die Differentialgleichung der Asymptotenlinien heraus.

Die geodätische Krümmung c ist nach (3) durch $c = \mathbf{x}'' \mathbf{w} = -\mathbf{x}' \mathbf{w}'$ erklärt. Aus (6) erhalten wir:

$$(11) \quad \mathbf{x}'' = \left(\frac{1}{A}\right)' (\mathbf{x}_u \dot{u} + \mathbf{x}_v \dot{v}) + \frac{1}{A^2} [(\mathbf{x}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{x}_{vv} \dot{v}^2) + (\mathbf{x}_u \ddot{u} + \mathbf{x}_v \ddot{v})],$$

und weiter:

$$(12) \quad c = \mathbf{x}'' \mathbf{w} = \frac{1}{A^3 W} [- (F \dot{u} + G \dot{v}) (\mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{x}_u \mathbf{x}_{vv} \dot{v}^2) + \\ + (E \dot{u} + F \dot{v}) (\mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{vv} \dot{v}^2)] + \\ + \frac{1}{A^3 W} [- (F \dot{u} + G \dot{v}) (E \ddot{u} + F \ddot{v}) + \\ + (E \dot{u} + F \dot{v}) (F \ddot{u} + G \ddot{v})].$$

Für die inneren Produkte der Vektoren in (12) folgt aus (5) durch Ableitung³⁾:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} E_u, & \mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_v &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} E_v, & \mathbf{x}_{uv} \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} G_u, \\ \mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_u &= F_v - \frac{1}{2} G_u, & \mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} G_v; \end{aligned}$$

somit für c die Formel von Beltrami-Bonnet⁴⁾:

$$(14) \quad c = \frac{1}{A^3 W} [- (F \dot{u} + G \dot{v}) (\frac{1}{2} E_u \dot{u}^2 + E_v \dot{u} \dot{v} + (F_v - \frac{1}{2} G_u) \dot{v}^2) + \\ + (E \dot{u} + F \dot{v}) ((F_u - \frac{1}{2} E_v) \dot{u}^2 + G_u \dot{u} \dot{v} + \frac{1}{2} G_v \dot{v}^2)] + \\ + \frac{W}{A^3} [\dot{u} \ddot{v} - \dot{v} \ddot{u}].$$

Für $c = 0$, also für geodätische Streifen ergeben sich als zugehörige Flächenkurven die geodätischen Linien auf der Fläche.

Die Ausdrücke a , b und c sind nach ihrer Bedeutung invariant gegenüber Bewegungen, gegenüber der Einführung neuer Parameter $u = u(\lambda, \mu)$, $v = v(\lambda, \mu)$ auf der Fläche und gegenüber Änderungen des Parameters s . Dies läßt sich direkt bestätigen. Wir schreiben:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

³⁾ Bl. 1, S. 93.

⁴⁾ Bl. 1, S. 175.

dann heißen die beiden Fundamentalformen in der in der Tensorrechnung üblichen Bezeichnung:

$$(16) \quad A^2 = a_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k, \quad B^2 = b_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k.$$

Verwenden wir weiter den schiefsymmetrischen Tensor ⁵⁾

$$(17) \quad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -W \\ W & 0 \end{vmatrix},$$

so erhalten wir durch Herausziehen der Indizes mittels a_{ik} und aus der bekannten Eigenschaft der a_{ik} :

$$(18) \quad \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{G}{W}, -\frac{F}{W} \\ -\frac{F}{W}, \frac{E}{W} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} e^{11} & e^{12} \\ e^{21} & e^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{W} \\ -\frac{1}{W} & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Christoffelschen Dreizeigersymbole

$$\Gamma_{ik}^l = \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}$$

haben nach ihrer Erklärung

$$(19) \quad \Gamma_{ik}^l = a^{lq} \Gamma_{ik,q} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ik,q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{iq}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{kq}}{\partial u^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^q} \right)$$

hier die Bedeutung ⁶⁾:

$$(20) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2 W^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-F E_u + 2 E F_u - E E_v}{2 W^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{G E_v - F G_u}{2 W^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{E G_u - F E_v}{2 W^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-F G_v + 2 G F_v - G G_u}{2 W^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2 W^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke können wir jetzt, wie man leicht bestätigen kann, a , b und c in der folgenden Form schreiben:

$$(21) \quad \begin{aligned} a &= \frac{e^{q\sigma} a_{iq} b_{m\sigma} \dot{u}^l \dot{u}^m}{a_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k}, \\ b &= -\frac{b_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k}{a_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k}, \\ c &= \frac{e_{\lambda\mu} (\ddot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) \dot{u}^\mu}{(a_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k)^{3/2}}. \end{aligned}$$

⁵⁾ Der Tensorcharakter der e_{ik} läßt sich leicht nachweisen.

⁶⁾ Bl. I, S. 115.

Es läßt sich zeigen, daß $\ddot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$ ein kontravarianter Vektor h^λ ist, damit ist die Invarianz der Ausdrücke in (21) bei allgemeinen Parametertransformationen nachgewiesen. Führen wir statt s einen neuen Kurvenparameter σ durch $s = \varphi(\sigma)$ ein, so bleiben die Zähler und Nenner in (21) ebenfalls invariant, weil sie bezüglich $\frac{ds}{d\sigma}$ entsprechend dasselbe Gewicht haben. Endlich folgt für die Bogenlänge s als Parameter für die geodätischen Linien ⁷⁾:

$$\ddot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$$

daß $c = 0$ ist.

⁷⁾ Blaschke, Vorl. über Differentialgeometrie, Bd. 2, S. 145.

(Eingegangen am 23. Februar 1938.)

On the representation of numbers as the sums of the powers of primes¹⁾.

By

Loo-keng Hua in Cambridge²⁾.

Let k be an integer ≥ 4 , $a = 1/k$,

$$b = \begin{cases} k^3 (\log k + 1, 25 \log \log k^2) & \text{for } k \geq 15, \\ 2^{k-1} & \text{for } k < 15, \end{cases}$$

and

$$m = \left\lfloor \frac{\log \frac{1}{2} b + \log (1 - 2a)}{\log k - \log (k-1)} \right\rfloor.$$

Let³⁾ $p^u || k$ and

$$\gamma = \begin{cases} \theta + 2 & \text{for } p = 2, 2 | k, \\ 0 + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K = \prod_{(p-1) | k} p^\gamma.$$

Theorem. Every sufficiently large integer $N \equiv s \pmod{K}$ is a sum of s k -th powers of primes, provided $s \geq s_0$, where $s_0 = s_0(k) = 2k + 2m + 7$.

It is worthwhile to note that for large k , the order of s_0 is $6k \log k$ which is as good as Vinogradov's result⁴⁾ for Waring's problem; for small k , $s_0(4) = 19$, $s_0(5) = 31$ which is very close to the results of Davenport, Estermann and Heilbronn⁵⁾. The present method can also be used to prove that almost all integers $N \equiv s \pmod{K}$ are sums of s k -th powers of primes, provided $s \geq k + m + 4 (\sim 3k \log k)$.

As to $k = 3$, the present method gives $s_0(3) = 11$ ⁶⁾.

¹⁾ A preliminary account of the results has been published in *Comptes Rendus de l'USSR*, xvii, no. 5, 1937.

²⁾ Research fellow of the China Foundation for the promotion of Education and Culture.

³⁾ $p^t || n$ means that $p^t | n$ and $p^{t+1} \nmid n$.

⁴⁾ On the upper bound of $G(n)$ in Waring's problem, *Bull. de l'Acad. de l'URSS, VII Serie, Classe des sciences math. naturelles*, 1934, p. 1455–1469; Une nouvelle variante de la demonstration du theoreme de Waring, *Compte Rendus* **200** (1935), p. 182–184; On Waring's problem, *Annals of Math.* **36** (1935), p. 395–405.

⁵⁾ *Proc. of London Math. Soc.* (2) **41** (1936), p. 26–150.

⁶⁾ The author has obtained a new method by which he can prove that every sufficiently large odd integer is a sum of nine cubes of the primes. It will be published elsewhere separately.

The present paper consists of three parts:

1. Study of singular series.
2. A lemma on Waring's problem.
3. Proof of the theorem.

1. Study of singular series.

Let

$$W_{h,q} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e_q(h l^k), \quad e_q(x) = e^{\frac{2\pi i x}{q}},$$

$$B_s(N, q) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^s e_q(-a N),$$

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} B_s(N, q).$$

Lemma 1.1. If $(q_1, q_2) = 1$, then

$$W_{h, q_1 q_2} = W_{h q_1^{k-1}, q_2} W_{h q_2^{k-1}, q_1}$$

and

$$B_s(N, q_1 q_2) = B_s(N, q_1) B_s(N, q_2).$$

Proof. Let $l = l_1 q_2 + l_2 q_1$. Then

$$\begin{aligned} W_{h, q_1 q_2} &= \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1 q_2}(h q_2^k l_1^k + h q_1^k l_2^k) \\ &= W_{h q_1^{k-1}, q_2} W_{h q_2^{k-1}, q_1}. \end{aligned}$$

The second is an immediate consequence of the first.

Lemma 1.2. If $t > \gamma$, then

$$W_{h, p^t} = 0.$$

Proof. Let $l = l_1 + l_2 p^{t-\gamma-1}$. By Landau⁷⁾, Satz 290 (with an easy modification for $p = 2$) we have

$$W_{h, p^t} = \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, p)=1}}^{p^{t-\gamma-1}} \sum_{l_2=1}^{p^{\gamma+1}} e_{p^t}(h(l_1^k + p^{t-\gamma-1} k l_1^{k-1} l_2)) = 0$$

since $p \nmid l_1 k p^{-\gamma}$.

Lemma 1.3.

$$W_{h, q} = O(q^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

⁷⁾ Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, This foot-note will not be repeated on similar occasions.

where the constants implied by the symbol O depend on k and ε .

Proof. By lemma 1.2

$$\begin{aligned} W_{h,p^t} &= O(1) && \text{for } p \mid k, \\ W_{h,p^t} &= 0 && \text{for } p \nmid k \text{ and } t > 1. \end{aligned}$$

Further, by Landau, Satz 311, we have

$$\begin{aligned} |W_{h,p}| &\leq k \sqrt[p]{p} && \text{for all } p, \\ &\leq p^{\frac{1}{2} + \varepsilon} && \text{for } p \geq k^{1/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Let $q = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r}$ and $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Then by lemma 1.1

$$\begin{aligned} |W_{h,q}| &= \prod_{p_i \leq k^{1/s}} |W_{h_i, p_i^{t_i}}| \prod_{p_i > k^{1/s}} |W_{h_i, p_i^{t_i}}| \\ &= O(q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}). \end{aligned}$$

Lemma 1.4. If $s > 4$, then

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p \chi_p(N),$$

where

$$\chi_p(N) = 1 + \sum_{t=1}^{\gamma} B_s(N, p^t).$$

Proof. Lemmas 1.1, 1.2 and 1.3.

Lemma 1.5. Let $M_s(p^t, N)$ be the number of solutions of the congruence

$$x_1^t + \dots + x_s^t \equiv N \pmod{p^t}, \quad p \nmid x_1 \dots x_s, \quad 0 < x_i < p^t.$$

Then

$$\varphi(p^t)^{-s} p^t M_s(p^t, N) = 1 + \sum_{d=1}^t B_s(N, p^d).$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} M_s(p^t, N) &= p^{-t} \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, p)=1}}^{p^t} \dots \sum_{\substack{l_s=1 \\ (l_s, p)=1}}^{p^t} \sum_{h=1}^{p^t} e_{p^t}(h(l_1^k + \dots + l_s^k - N)) \\ &= p^{-t} \sum_{h=1}^{p^t} W_{h,p^t}^s e_{p^t}(-hN) \\ &= p^{-t} \varphi^s(p^t) \left(1 + \sum_{d=1}^t B_s(N, p^d) \right). \end{aligned}$$

Lemma 1.6. Let $x_1, \dots, x_m$ belong to m different residue classes, mod p^l , and $y_1, \dots, y_n$ belong to n different residue classes, mod p^l and no two y 's are congruent each other, mod p . Then the number of different residue classes represented by

$$x_i + y_j \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

is greater than or equal to

$$\text{Min}(m + n - 1, p^k).$$

(I. Chowla and Davenport)⁸⁾.

Lemma 1.7. For $s \geq 4k$ and $(p-1) \nmid k$, then

$$M_s(p^\gamma, N) > 0.$$

Proof. 1) $p \nmid k$, then $\gamma = 1$. Since $(p-1) \nmid k$, x^k gives

$$d = \frac{p-1}{(k, p-1)} > 0$$

different values, mod p , when x runs over $1, 2, \dots, p-1 \pmod{p}$. By lemma 1.6, $x_1^k + \dots + x_s^k$, $p \nmid x_1, \dots, x_s$, gives

$$\text{Min}(d + (d-1)(s-1), p) = p$$

different values, mod p , since

$$s \geq 4k \geq \frac{p^\gamma - 1}{\frac{1}{d}} \geq \frac{p^\gamma - 1}{d - 1}.$$

2) $k = p^v k_0$, $p \nmid k_0$. Then x^k gives at least $p-1$ different values no two of which are congruent each other, mod p , since

$$x^{p^v k_0} \equiv x^{k_0} \pmod{p} \quad \text{and} \quad (k_0, p-1) = 1.$$

Therefore $x_1^k + \dots + x_s^k$ gives

$$\text{Min}(p-1 + (p-2)(s-1), p^\gamma) = p^\gamma$$

different values, mod p^γ , since

$$s \geq 4k \geq 4p^v \geq \frac{p^\gamma - p + 1}{p-2} + 1.$$

Lemma 1.8. If $s \equiv N \pmod{p^\gamma}$ and $(p-1) \mid k$, then

$$M_s(p^\gamma, N) > 0.$$

Evident.

Lemma 1.9. If $s \geq 4k$ and $s \equiv N \pmod{p^\gamma}$ for all p satisfying $(p-1) \mid k$, then

$$\mathfrak{S}(N) \geq A \text{ (independent of } N) > 0.$$

Proof. Using lemmas 1.5, 1.7 and 1.8 we obtain

$$\chi_p > 0 \quad \text{for all } p.$$

By Landau, Satz 311, we have

$$|B_s(N, p)| \leq \frac{(k \sqrt{p})^s}{(p-1)^{s-1}} \leq (2k)^s p^{-\frac{s}{2} + 1}$$

⁸⁾ See, for example, Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tracts, no. 35, p. 8.

Therefore, for $p > (2k)^{4s}$,

$$\chi_p > 1 - p^{-\frac{s}{2} + 1 + \frac{1}{4}}.$$

Consequently

$$\mathfrak{S}(N) \geq \prod_{p \leq (2k)^{4s}} \chi_p \prod_{p > (2k)^{4s}} \left(1 - p^{-\frac{5}{4}}\right) \geq A > 0.$$

Remark. We can prove in the same way that if $k = 3$ and $s = 11$ or 9, then

$$\mathfrak{S}(N) \geq A > 0$$

for all odd N .

2. A lemma on Waring's problem.

Let N be a large integer and $P = \frac{1}{2}N^a$.

$$T(\alpha, P) = \sum_{P < n < 2P} e(n^k \alpha), \quad e(x) = e^{2\pi i x}.$$

$$T_i(\alpha) = T(\alpha, \alpha^{-i} P^{(1-a)^i}), \quad i = 0, \dots, m+1.$$

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= T_1(\alpha) \dots T_m(\alpha) T_{m+1}^3(\alpha) \\ &= \sum_n r_{m+2}(n) e(n\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= T_0(\alpha) Q(\alpha) \\ &= \sum_n r_{m+3}(n) e(n\alpha), \end{aligned}$$

$$T_0^k(\alpha) R(\alpha) = \sum_n r_{k+m+3}(n) e(n\alpha).$$

Let $c_1, c_2, \dots$ be numbers depending only on k . Then

$$c_1 P^{k-1-(k-2)(1-a)^{m+1}} \leq Q(0) \leq c_2 P^{k-1-(k-2)(1-a)^{m+1}}.$$

The constants implied by the symbol O depend only on k and ε , where ε is an arbitrary small positive number.

The purpose of this section is to prove that

$$\sum_n r_{k+m+3}^2(n) = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

We divide the interval $0 \leq \alpha \leq 1$ in the usual way into Farey arcs belonging to all rational points h/q with $1 \leq q \leq P^{h-1+\varepsilon}$, $0 < h < q$, $(h, q) = 1$. Each arc has the form

$$\alpha = h/q + \beta, \quad -\vartheta_1 q^{-1} P^{-k+1-\varepsilon} \leq \beta \leq \vartheta_2 q^{-1} P^{-k+1-\varepsilon},$$

where $\frac{1}{2} \leq \vartheta_i \leq 1$.

Let $\mathfrak{M}_{h,q}$ denote an arc (or a part of an arc) with

$$q \leq P^{k/b}, \quad |\beta| \leq q^{-1} P^{-k(1-1/b)}.$$

Let E be the set of the points which do not belong to any $\mathfrak{M}_{h,q}$.

Let

$$S_{h,q} = \sum_{v=1}^q e_q(v^k h),$$

and

$$T^*(\alpha, h, q) = q^{-1} S_{h,q} \int_P^{2P} e^{2\pi i y^k \beta} dy.$$

Lemma 2.1⁹⁾. If $(h, q) = 1$, then

$$S_{h,q} = O(q^{1-a}).$$

Lemma 2.2 (Davenport and Heilbronn)¹⁰⁾

$$\sum_{x=1}^m e_q(h x^k) = \frac{m}{q} S_{h,q} + O(q^{3/4+\epsilon}).$$

Consequently, if $m \leq q$, then, for $k \geq 4$,

$$\sum_{x=1}^m e_q(h x^k) = O(q^{1-a+\epsilon}).$$

Lemma 2.3 (Weyl¹¹⁾ and Vinogradow¹²⁾). If α belongs to the arc corresponding $P^{1-\epsilon} < q \leq P^{k-1+\epsilon}$, then

$$T(\alpha) = O(P^{1-\frac{1}{b}+\epsilon}).$$

Lemma 2.4.

$$\int_0^1 |R(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_n r_{m+s}^2(n) = O(P^{1+\epsilon} Q(0)).$$

Proof. $\sum_n r_{m+s}^2(n)$ is the number of solutions of

$$x_0^k + \dots + x_m^k + x_{m+1}^k + x_{m+1}'^k = y_0^k + \dots + y_m^k + y_{m+1}^k + y_{m+1}'^k$$

where

$$2^{-P^{(1-a)^i}} \leq x_i, y_i \leq 2^{1-i} P^{(1-a)^i}.$$

(1) implies $x_i = y_i$ (for $i = 0, \dots, m$) when P is large enough. For, if v is the first one of the suffixes for which $x_v \neq y_v$, then

$$|x_v^k - y_v^k| \geq k(P^{(1-a)^v} 2^{-v})^{k-1}$$

is certainly greater than

$$y_{v+1}^2 + \dots + y_{m+1}'^k$$

as P large enough. It is well-known that the number of solutions of

$$x_{m+1}^k + x_{m+1}'^k = y_{m+1}^k + y_{m+1}'^k$$

⁹⁾ Landau, Satz 315.

¹⁰⁾ Proc. of London Math. Soc. (2) 41 (1936), S. 449-453.

¹¹⁾ Landau, Satz 267.

¹²⁾ I am indebted to Prof. Vinogradow for communicating this new result to me.

is $O(P^{2(1-a)^m+1+\varepsilon})$. The lemma is proved.

Lemma 2. 5.

$$T^*(\alpha, h, q) = O(q^{-a} \text{Min}(P, |\beta|^{-a})).$$

Proof. Since

$$S_{h,q} = O(q^{1-a}),$$

and

$$\int_P^{2P} e^{2\pi i \beta y^k} dy = O(P)$$

it suffices to prove that

$$\int_P^{2P} e^{2\pi i \beta y^k} dy = O(|\beta|^{-a}).$$

This inequality follows at once by changing variables.

Lemma 2. 6. If $q \leq P^{1-\varepsilon}$, $|\beta| \leq q^{-1} P^{-k+1-\varepsilon}$, then

$$T(\alpha) - T^*(\alpha, h, q) = O(q^{1-a+\varepsilon}).$$

Proof. The lemma can be proved by Estermann's argument (§§ 2. 4—2. 7)¹³⁾ by replacing Weyl's estimation by lemma 2. 2.

Lemma 2. 7.

$$\int_E |T_0^k(\alpha) R(\alpha)|^2 d\alpha = O(P^{k+2-c_3} Q^2(0)).$$

Proof. Since α is not on $\mathfrak{M}_{h,q}$, at least one of the following three conditions is satisfied:

- (i) $P^{1-\varepsilon} < q \leq P^{k-1+\varepsilon},$
- (ii) $P^{k/b} < q \leq P^{1-\varepsilon},$
- (iii) $q \leq P^{k/b}, \quad |\beta| > q^{-1} P^{-k(1-1/b)}.$

By lemmas 2. 3, 2. 5 and 2. 6 we have on E

$$T_0(\alpha) = O(P^{1-\frac{1}{b}}).$$

By lemma 2. 4, we have

$$\begin{aligned} \int_E |T_0^{2k}(\alpha) R^2(\alpha)| d\alpha &= O\left(P^{2k\left(1-\frac{1}{b}\right)} \int_0^1 |R(\alpha)|^2 d\alpha\right) \\ &= O\left(P^{2k\left(1-\frac{1}{b}\right)+1+\varepsilon} Q(0)\right), \\ &= O\left(P^{2k\left(1-\frac{1}{b}\right)+2-k+(k-2)(1-a)^m+1} Q^2(0)\right) = O(P^{k+2-c_3} Q^2(0)), \end{aligned}$$

¹³⁾ Proc. of London Math. Soc. (2) 41 (1936), S. 126—143.

since

$$-\frac{2k}{b} + (k-2)(1-a)^{m+1} < -\frac{2k}{b} + (k-2)(1-a)^{\log \frac{1}{2} b(1-2a)/\log(1-a)^{-1}} \\ = -\frac{2k}{b} + (k-2)\left(\frac{1}{2}b(1-2a)\right)^{-1} = 0.$$

Lemma 2.8.

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |T_0^k(\alpha) R(\alpha)|^2 d\alpha = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

Proof. By lemmas 2.5 and 2.6, we have, on $\mathfrak{M}$,

$$T_0(\alpha) = O(q^{-a} \text{Min}(P, |\beta|^{-a})) + O(q^{1-a+\epsilon}) \\ = O(q^{-a} \text{Min}(P, |\beta|^{-a})).$$

The summation in question does not exceed

$$O\left(\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} q^{-2(k+1)a} \text{Min}(P^{2(k+1)}, |\beta|^{-2(1+a)}) Q^2(0) d\beta\right) \\ = O\left(\sum_q q^{-1-2a} P^{k+2} Q^2(0)\right) = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

Lemma 2.9.

$$\sum_n r_{k+m+3}^2(n) = O(P^{k+2} Q^2(0)).$$

Proof. The lemma follows from lemmas 2.7 and 2.8.

3. Proof of the theorem.

Let

$$\mathfrak{I}(\alpha, P) = \sum_{P < p < 2P} e(p^k \alpha).$$

Correspondingly we define $\mathfrak{I}_i(\alpha)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m, m+1$), $\mathfrak{Q}(\alpha)$ and $\mathfrak{R}(\alpha)$. Let

$$\mathfrak{I}_0^{k+1}(\alpha) \mathfrak{Q}(\alpha) = \sum_n r'_{m+k+3}(n) e(n\alpha)$$

and

$$\mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) \mathfrak{Q}^2(\alpha) = \sum_n r'_{3m+2k+7}(n) e(n\alpha),$$

so that $r'_{2m+2k+7}(n)$ is the number of the solutions of

$$n = p_1^k + \dots + p_{2m+2k+7}^k$$

where p 's satisfy certain conditions.

Let

$$\mathfrak{I}_0^*(\alpha, h, q) = \frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \sum_{P^k \leq n \leq (2P)^k} \frac{e(n\beta)}{n^{1-a} \log n}.$$

We divide the interval $0 \leq \alpha \leq 1$ into Farey arcs belonging to all rational points h/q with $1 \leq q \leq NL^{-\sigma_0}$, $0 \leq h \leq q$, $(h, q) = 1$, where

$L = \log N$ and σ_0 is the number so chosen that lemma 3.1 holds. We divide these arcs into major arcs $\mathfrak{M}(1 \leq q \leq L^{\sigma_0})$ and minor arcs $\mathfrak{m}(L^{\sigma_0} < q \leq NL^{-\sigma_0})$. In either case the arc has the form

$$\alpha = \frac{h}{q} + \beta, \quad -\vartheta_1 q^{-1} N^{-1} L^{\sigma_0} \leq \beta \leq \vartheta_2 q^{-1} N^{-1} L^{\sigma_0}$$

where $\frac{1}{2} \leq \vartheta_i \leq 1$.

Lemma 3.1 (Vinogradov)¹⁴. *There exists an integer σ_0 such that on $\mathfrak{m}$*

$$\mathfrak{I}_0(\alpha) = O(PL^{-\sigma}).$$

In particular we can choose σ_0 so that $\sigma \geq 2k + 2m + 8$.

Lemma 3.2.

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |\mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) \Omega^2(\alpha)| d\alpha = O(P^{k+3} Q^2(0) L^{-\sigma}).$$

Proof. By lemma 2.9 and 3.1 we have

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |\mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) \Omega^2(\alpha)| d\alpha &= O(PL^{-\sigma} \int_0^1 |\mathfrak{I}_0^{k+1}(\alpha) \Omega(\alpha)|^2 d\alpha) \\ &= O(PL^{-\sigma} \sum_n r_{m+k+3}'^2(n)) = O(PL^{-\sigma} \sum_n r_{m+k+3}^2(n)) \\ &= O(P^{k+2} Q^2(0) PL^{-\sigma}). \end{aligned}$$

Lemma 3.3 (Siegel-Walfisz)¹⁵. *If $q \leq L^{\sigma_0}$, $(l, q) = 1$, $n \leq N$, then*

$$\pi(n; l, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \text{li } n + O(Ne^{-c_4 \sqrt{L}}).$$

Lemma 3.4. On $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{I}_0(\alpha) - \mathfrak{I}_0^*(\alpha, a, q) = O(Pe^{-c_5 \sqrt{L}}).$$

This is a consequence of lemma 3.3¹⁶.

Lemma 3.5.

$$\mathfrak{I}_0^*(\alpha, h, q) = O(q^{-\frac{1}{2} + \epsilon} \text{Min}(P, |\beta|^{-a})).$$

This is a consequence of lemma 1.2.

Lemma 3.6.

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |\mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) - \mathfrak{I}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q)| \Omega^2(\alpha) d\alpha = O(P^{k+3} Q^2(0) e^{-c_6 \sqrt{L}}).$$

Proof. By lemma 3.4 and 3.5 on $\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) - \mathfrak{I}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q) &= O((PL^{-\frac{1}{2}\sigma_0})^{2k+2} Pe^{-c_5 \sqrt{L}}) \\ &= O(P^{2k+3} e^{-c_7 \sqrt{L}}). \end{aligned}$$

¹⁴) Comptes Rendus de l'URSS, XVI, No. 3, 1937.

¹⁵) Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 592–601, Hilfssatz 3.

¹⁶) See, for example, Davenport and Heilbronn, Proc. of London Math. Soc. (2)

Therefore the summation in question does not exceed

$$O\left(\sum_{q \leq L^{c_0}} q \cdot P^{2k+3} e^{-c_7 \sqrt{L}} \cdot q^{-1} N^{-1} L^{c_0} Q^2(0)\right) = O(P^{k+3} Q^2(0) e^{-c_8 \sqrt{L}}).$$

Lemma 3.7.

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |\mathfrak{I}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q)| \left| \Omega^2(\alpha) - \Lambda^2 \left(\frac{W_{a,q}}{\varphi(q)} \right)^{2m+2} \right| d\alpha = O(P^{k+3} Q^2(0) e^{-c_8 \sqrt{L}})$$

where

$$c_9 \frac{Q(0)}{L^{m+2}} \leq \Lambda \leq c_{10} \frac{Q(0)}{L^{m+2}}.$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} \left| \Omega(\alpha) - \Omega\left(\frac{h}{q}\right) \right| &\leq \sum_n r'_{m+2}(n) |e(n\alpha) - e(nh/q)| \\ &\leq |\beta| \sum_n n r'_{m+2}(n) = O(P^{h-1} |\beta| Q(0)) \\ &= O(P^{-1} L^{c_0} Q(0)). \end{aligned}$$

Further by lemma 3.3,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_i\left(\frac{h}{q}\right) &= \sum_{2^{-i} P^{(1-a)^i} \leq p \leq 2^{-i+1} P^{(1-a)^i}} e_q(h p^k) \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q e_q(h l^k) (\pi(2^{-i} P^{(1-a)^i}; l, q) - \pi(2^{-i+1} P^{(1-a)^i}; l, q)) + O(q^s) \\ &= \frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \int_{2^{-i} P^{(1-a)^i}}^{2^{-i+1} P^{(1-a)^i}} \frac{dx}{\log x} + O(P^{(1-a)^i} e^{-c_{11} \sqrt{L}}). \end{aligned}$$

Therefore

$$\Omega\left(\frac{h}{q}\right) = \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)}\right)^{m+2} \Lambda + O(Q(0) e^{-c_{12} \sqrt{L}}),$$

where

$$\Lambda = \left(\prod_{i=1}^{m+1} \int_{2^{-i} P^{(1-a)^i}}^{2^{-i+1} P^{(1-a)^i}} \frac{dx}{\log x} \right) \left(\int_{2^{-(m+1)} P^{(1-a)^{m+1}}}^{2^{-m} P^{(1-a)^{m+1}}} \frac{dx}{\log x} \right).$$

It is evident that Λ satisfies the inequality in the lemma.

Thus

$$\begin{aligned} \left| \Omega^2(\alpha) - \Lambda^2 \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^{2(m+2)} \right| &\leq \left| Q(\alpha) - \Lambda \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^{m+2} \right| Q(0) \\ &= O(Q^2(0) e^{-c_{13} \sqrt{L}}). \end{aligned}$$

The sum in question, by lemma 3.5, does not exceed

$$O\left(\sum_{q \leq L^h} q \cdot Q^2(0) e^{-c_{12} \sqrt{L}} q^{-\frac{2k+3}{2} + \varepsilon}\right) \left(\int_0^{P^{-k}} P^{2k+3} d\beta + \int_{P^{-k}} |\beta|^{-\frac{2k+3}{k}} d\beta\right) \\ = O(P^{k+3} Q^2(0) e^{-c_3 \sqrt{L}}).$$

Lemma 3.8.

$$\sum_{\mathfrak{M}} \left(\int_0^1 - \int_{\mathfrak{M}} \right) \left| \mathfrak{I}_0^{*2k+3}(\alpha, h, q) \Lambda^2 \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^{2m+4} \right| d\alpha = O(P^{k+3} Q^2(0) L^{-\sigma_0(1-3a)}).$$

Proof. The left hand side does not exceed

$$O\left(\sum_{q \leq L^{\sigma_0}} q \cdot Q^2(0) q^{-m-2} \cdot q^{-\frac{1}{2}(2k+3)} \int_{q^{-1} N^{-1} L^{\sigma_0}} |\beta|^{-\frac{2k+3}{k}} d\beta\right) \\ = O(P^{k+3} Q^2(0) L^{-\sigma_0(1-3a)}).$$

Lemma 3.9.

$$r_{2k+2m+7}(N) = \Lambda^2 \mathfrak{I}(N) \psi(N) + O(P^{k+3} L^{-\sigma} Q^2(0))$$

where

$$c_{13} P^{k+3} L^{-2k-2m-7} < \psi(N) < c_{14} P^{k+3} L^{-2k-2m-7}.$$

Proof. By lemmas 3.2, 3.6, 3.7 and 3.8, we have

$$r'_{2m+2k+7}(N) = \int_0^1 \mathfrak{I}_0^{2k+3}(\alpha) \Omega^2(\alpha) e^{-2\pi i N \alpha} d\alpha \\ = \sum_{q \leq L^{\sigma_0}} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q \Lambda^2 \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^{2k+2m+7} e_q(-Nh) \Psi(N) \\ + O(P^{k+3} L^{-\sigma} Q^2(0))$$

where

$$\Psi(N) = \sum_{n_1 + \dots + n_{2k+3} = N} \frac{1}{\prod_{i=1}^{2k+3} n_i^{1-a} \log n_i}.$$

It is obviously satisfy the inequality stated in the lemma.

The lemma follows, since

$$\sum_{q > L^{\sigma_0}} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^q \left(\frac{W_{h,q}}{\varphi(q)} \right)^{2k+2m+7} e_q(-Nh) = O\left(\sum_{q > L^{\sigma_0}} q^{-k-m-2}\right) \\ = O(L^{-(k+m+1)\sigma_0}).$$

The theorem is proved by lemmas 1.9 and 3.9.

Appendix. Distribution of K .

The congruence condition in the theorem is essential and can not be replaced by weaker one.

If k is an odd integer, then $K = 2$. Consequently we have

Theorem. *Let k be an odd integer. Every sufficiently large odd integer is a sum of $2k + 2m + 7$ k -th powers of primes. Every sufficiently large integer can be expressed as a sum of at most $2k + 2m + 8$ k -th powers of primes.*

When k is even, the distribution of K is very irregular and its order of magnitude is very large. To illustrate this, I give the following table.

k	K	k	K
2	$2^3 \cdot 3$	52	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53$
4	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	54	$2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$
6	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	56	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$
8	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	58	$2^3 \cdot 3 \cdot 59$
10	$2^3 \cdot 3 \cdot 11$	60	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$
12	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	62	$2^3 \cdot 3$
14	$2^3 \cdot 3$	64	$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$
16	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	66	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 67$
18	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 19$	68	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$
20	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$	70	$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 71$
22	$2^3 \cdot 3 \cdot 23$	72	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
24	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	74	$2^3 \cdot 3$
26	$2^3 \cdot 3$	76	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$
28	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$	78	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 79$
30	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31$	80	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 41$
32	$2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	82	$2^3 \cdot 3 \cdot 83$
34	$2^3 \cdot 3$	84	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 43$
36	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$	86	$2^3 \cdot 3$
38	$2^3 \cdot 3$	88	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 89$
40	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 41$	90	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
42	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 43$	92	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 47$
44	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$	94	$2^3 \cdot 3$
46	$2^3 \cdot 3 \cdot 47$	96	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97$
48	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	98	$2^3 \cdot 3$
50	$2^3 \cdot 3 \cdot 11$	100	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 101$

(Eingegangen am 28. Februar 1938.)

Sulla trasformazione di Laplace di alcune notevoli funzioni e su alcuni noti sviluppi in serie.

Di

Giuseppe Palamà a Lecce (Italia).

In questo lavoro si danno le trasformate die Laplace di alcune interessanti funzioni e si utilizzano alcuni noti risultati relativi alla detta trasformazione per ottenere due importanti e noti sviluppi, l'uno in serie di polinomi sferici generalizzati e l'altro in serie di polinomi di Laguerre. Emergerà così ancora una volta, anche da questo breve lavoro, l'importanza che ha per l'analisi la classica trasformazione di Laplace.

I risultati trovati in questa Nota nei Nⁱ 1, 2, 3, 4 non si trovano nell'ottimo e prezioso libro, di recentissima pubblicazione, di G. Doetsch relativo alla trasformazione di Laplace¹⁾, e perciò abbiamo stimato che valga la pena di far conoscere i risultati ottenuti in questo lavoro, perche molto probabilmente essi sono nuovi²⁾.

¹⁾ Cfr. G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin Julius Springer, 1937. Questo lavoro in seguito lo citeremo solamente così: G. D. Cfr. inoltre: Pierre Humbert, *le calcul symbolique*, Paris 1934; Tefferey, *operational methodes*, Cambridge 1927.

Si tenga presente, in ciò che segue di questa Nota, il seguente significato dello operatore L.

La

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx = f(s),$$

ove $f(s)$ si dice la trasformata di Laplace di $F(x)$, si suole scrivere anche in uno dei seguenti modi:

$$L_s[F(x)] = f(s), \quad L_s(F) = f(s), \quad L(F, s) = f(s),$$

oppure più semplicemente

$$L(F) = f(s), \quad L[F(x)] = f(s).$$

²⁾ La trasformazione di Laplace da noi è stata utilizzata in altri precedenti lavori per ottenere, fra l'altro, degli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre e delle formule relative a questi polinomi, che con la detta trasformazione si dominano molto bene. Cfr. perciò: G. Palamà, *La trasformazione di Laplace e i polinomi di Laguerre e di Hermite*. Rend. Ist. Lombardo di Sc. e let., Vol. LXX, fasc. III, 1937; Sui polinomi di Laguerre, di prossima pubblicazione nel Boll. dell'U. M. I.

1. Per la prima parte del nostro lavoro ci serviranno quasi esclusivamente le due seguenti formule³⁾

$$(1) \quad J_\nu(x) J_\varrho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu + \varrho + 2n + 1) x^{\nu + \varrho + 2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1) \Gamma(\nu + \varrho + n + 1) 2^{\nu + \varrho + 2n}},$$

$$(2) \quad Q^{\nu', \varrho'}(y) = \sqrt{\pi} 2^{2\nu' - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho' + 2\nu' + 2n)}{n! \Gamma(\varrho' + \nu' + n + 1)} \cdot \frac{1}{(2y)^{\varrho' + 2\nu' + 2n}},$$

indicando nella prima di queste con $J_\nu(x)$, $J_\varrho(x)$ rispettivamente la funzione di Bessel di 1^a specie e di ordine ν e ϱ , e nella seconda con $Q^{\nu'}, \varrho'(y)$ la funzione ultrasferica di 2^a specie.

Dalla (1), si ha subito, a mezzo della

$$(3) \quad L(x^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha + 1}}, \quad R(s) > 0,$$

$$L[x^{\nu - \varrho + 1} J_\nu(x) J_\varrho(x)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu + \varrho + 2n + 1) \Gamma(2\nu + 2n + 2)}{n! \Gamma(\nu + n + 1) \Gamma(\varrho + n + 1) \Gamma(\nu + \varrho + n + 1) 2^{\nu + \varrho + 2n} s^{2\nu + 2n + 2}}$$

che dà, per $\varrho = \nu + \frac{1}{2}$, qualora si tenga presente la

$$(4) \quad \sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \tfrac{1}{2}) 2^{2\alpha - 1},$$

$$L\left[\sqrt{x} J_\nu(x) J_{\nu + \frac{1}{2}}(x)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(2\nu + 2n + \frac{3}{2})}{n! \Gamma(2\nu + n + \frac{3}{2}) s^{2\nu + 2n + 2}}.$$

Se noi confrontiamo il 2° membro della precedente con il 2° membro della (2), essi, a meno di un fattore, sono identici se si fa

$$\begin{cases} \varrho' + 2\nu' = 2\nu + \frac{3}{2}, \\ \varrho' + \nu' = 2\nu + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$y = \frac{is}{2},$$

cioè

$$\begin{cases} \nu' = 1, \\ \varrho' = 2\nu - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad y = \frac{is}{2}$$

e risulta quindi

$$L\left[\sqrt{x} J_\nu(x) J_{\nu + \frac{1}{2}}(x)\right] = \frac{i^{2\nu + \frac{3}{2}}}{\pi \sqrt{2s}} Q^{1, 2\nu - \frac{1}{2}}\left(\frac{is}{2}\right).$$

Si noti ad es il valore particolare assunto dalla precedente per $\nu = -\frac{1}{4}$, perchè è semplicemente

$$(5) \quad Q^{1, -1}\left(\frac{is}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{i\sqrt{s^2 + 4}}.$$

³⁾ Cfr. Nielsen, Fonctions Métasphériques (1911), p. 173 e p. 60.

2. Poniamo ancora nella (1) $\nu = \frac{1}{2}$ e da essa tenute presenti (3) e (4), si ha

$$L \left[x^{\varrho + \frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) J_{\varrho}(x) \right] = \frac{2^{\varrho + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho + 2n + \frac{3}{2})}{n! \Gamma(n + \frac{3}{2}) s^{2\varrho + 2n + 2}}.$$

Il secondo membro della precedente si identifica con quello della (2), a meno di un fattore, se si pone

$$\begin{cases} \varrho' + 2\nu' = \varrho + \frac{3}{2}, \\ \varrho' + \nu' = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad y = \frac{is}{2},$$

cioè se è

$$\begin{cases} \nu' = \varrho + 1, \\ \varrho' = -\varrho - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad y = \frac{is}{2},$$

e perciò si ottiene

$$L \left[x^{\varrho + \frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) J_{\varrho}(x) \right] = \frac{i^{\varrho + \frac{3}{2}}}{\pi (2s)^{\varrho + \frac{1}{2}}} \cdot Q^{\varrho+1, -\varrho - \frac{1}{2}} \left(\frac{is}{2} \right)$$

che ricordando la

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x,$$

dà infine

$$(6) \quad L [x^{\varrho} \operatorname{sen} x J_{\varrho}(x)] = \frac{i^{\varrho + \frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} 2^{\varrho+1}} \cdot \frac{1}{s^{\varrho + \frac{1}{2}}} Q^{\varrho+1, -\varrho - \frac{1}{2}} \left(\frac{is}{2} \right).$$

3. La (1) inoltre, se si fa $\nu = -\frac{1}{2}$, dà per le (3) e (4)

$$(7) \quad L \left[x^{\varrho + \frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) J_{\varrho}(x) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho + 2n + \frac{1}{2})}{n! \Gamma(n + \frac{1}{2}) s^{2\varrho + 2n + 1}}.$$

Invece dalla (2) facendovi

$$\begin{cases} \nu' = \varrho + 1, \\ \varrho' = -\varrho - \frac{3}{2}, \\ y = \frac{is}{2}, \end{cases}$$

si ottiene

$$Q^{\varrho+1, -\varrho - \frac{3}{2}} \left(\frac{is}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2\varrho+1}}{i^{\varrho + \frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho + \frac{1}{2} + 2n)}{n! \Gamma(n + \frac{1}{2}) s^{\varrho + \frac{1}{2} + 2n}}.$$

Dal confronto di questa con la (7), si ricava

$$L \left[x^{\varrho + \frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) J_{\varrho}(x) \right] = \frac{i^{\varrho + \frac{1}{2}}}{\pi 2^{2\varrho + \frac{1}{2}} s^{\varrho + \frac{1}{2}}} Q^{\varrho+1, -\varrho - \frac{3}{2}} \left(\frac{is}{2} \right)$$

che, essendo

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

può scriversi

$$L[x^\varrho \cos x J_\varrho(x)] = \frac{i^{\varrho+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} 2^{\varrho+1}} \cdot \frac{1}{s^{\varrho+\frac{1}{2}}} Q^{\varrho+1, -\varrho-\frac{3}{2}}\left(\frac{is}{2}\right).$$

4. Infine diamo in questo N° due trasformate di Laplace di funzioni del tipo del 1° membro della (1), a meno di un fattore che è potenza di x , mediante funzioni ipergeometriche di Gauss.

Dalla (1) per $\nu = \varrho + 1$, a mezzo di (3) e (4), si ha

$$L\left[x^{2\varrho+2} J_{\varrho+1}\left(\frac{x}{2}\right) J_\varrho\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2^{2\varrho+2}}{\pi s^{4\varrho+4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho + \frac{3}{2} + n) \Gamma(2\varrho + \frac{5}{2} + n)}{n! \Gamma(\varrho + 2 + n) s^{2n}},$$

ossia

$$L\left[x^{2\varrho+2} J_{\varrho+1}\left(\frac{x}{2}\right) J_\varrho\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2^{2\varrho+2} \Gamma(\varrho + 2)}{\pi \Gamma(\varrho + \frac{3}{2}) \Gamma(2\varrho + \frac{5}{2})} \cdot \frac{1}{s^{4\varrho+4}} F\left(\varrho + \frac{3}{2}, 2\varrho + \frac{5}{2}, \varrho + 2, -\frac{1}{s^2}\right),$$

(con $Rs > 0, |s| > 1$)

che è il primo dei risultati cui si voleva pervenire. Per il secondo, si metta nella (1) $\nu = -\varrho - 1$, e si ha al solito per la (4) e la (3)

$$L\left[x^{2\varrho+2} J_{-\varrho-1}\left(\frac{x}{2}\right) J_\varrho\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2^{2\varrho+2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\varrho + \frac{3}{2} + n)}{n! \Gamma(-\varrho + n) s^{2\varrho+2n+2}}$$

e quindi infine

$$L\left[x^{2\varrho+2} J_{-\varrho-1}\left(\frac{x}{2}\right) J_\varrho\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\Gamma(-\varrho)}{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\varrho + \frac{3}{2})} \cdot \left(\frac{2}{s}\right)^{2\varrho+2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \varrho + \frac{3}{2}, -\varrho, -\frac{1}{s^2}\right),$$

(con $Rs > 0, |s| > 1$)

che è il secondo risultato che si cercavo.

5. Le formule ricavate nei N° 1, 2, 3 possono anche scriversi in modo che risulti affetto dall'unità immaginaria l'argomento della funzione di Bessel, anzicchè quello della funzione ultrasferica $Q^{\nu, \varrho}$ del 2° membro. A tal fine basta tener presente la seguente relazione

$$(8) \quad L[F(ax)] = \frac{1}{a} L_s[F(x)].$$

Difatti se, per es., nel 1° membro della (6) cambiamo x in $\frac{ix}{2}$, da essa per la precedente, si ha

$$L\left[x^{\varrho} \operatorname{sen} \frac{ix}{2} J_{\varrho}\left(\frac{ix}{2}\right)\right] = \frac{i^{\varrho+1}}{2^{\varrho} \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{s^{\varrho+\frac{1}{2}}} Q^{\varrho+1, -\varrho-\frac{1}{2}}(s);$$

poichè

$$Q^{\frac{1}{2}, 0}(s) = \frac{1}{2} \log \frac{s+1}{s-1},$$

dall'ultima per $\nu = -\frac{1}{2}$, discende la seguente elegante formula particolare

$$(9) \quad L\left(\frac{\operatorname{sen} ix}{x}\right) = \frac{i}{2} \log \frac{s+1}{s-1}.$$

Quest'ultima formula particolare può stabilirsi facilmente e subito a mezzo della

$$(10) \quad L\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

di p. 152 del c. libro del Doetsch, quando si tiene presente la (8) e la successiva formula (12), come inversamente è facile stabilire a mezzo della (9) la (10).

6. Vogliamo far vedere, in questo N° e nel successivo, come la trasformazione di Laplace si presta in modo assai elegante per determinare alcuni noti e importanti sviluppi in serie.

È noto che⁴⁾

$$L[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} (s^2 + 1)^{-\nu - \frac{1}{2}}$$

e da questa per la (8)

$$L[a^{\nu} x^{\nu} J_{\nu}(ax)] = \frac{1}{a} \cdot \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot a^{2\nu+1} (s^2 + a^2)^{-\nu - \frac{1}{2}}$$

che per $a = \sqrt{1-t^2}$, dà

$$(11) \quad L\left[x^{\nu} J_{\nu}(x \sqrt{1-t^2})\right] = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi} (1-t^2 + s^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}.$$

Ma è

$$(12) \quad L_s[e^{tx} F(x)] = L_{s-t}[F(x)],$$

quindi dalla (11), si ha

$$L\left[e^{tx} x^{\nu} J_{\nu}(x \sqrt{1-t^2})\right] = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(1-2st+s^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}.$$

⁴⁾ Cfr. G. D., p. 313.

Sviluppando l'ultimo fattore del 2° membro secondo le potenze crescenti di t , si ottiene

$$L\left[e^{tx} x^\nu J_\nu(x\sqrt{1-t^2})\right] = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi} s^{2\nu+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(t)}{s^n}$$

ove, come si sa, $P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(t)$ indica il polinomio sferico generalizzato d'indice n e di parametro $\nu + \frac{1}{2}$.

La precedente può scriversi

$$L\left[e^{tx} x^\nu J_\nu(x\sqrt{1-t^2})\right] = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(t) L(x^{2\nu+n})}{\Gamma(2\nu+n+1)},$$

da cui si ha infine lo sviluppo cercato

$$\sqrt{\pi} e^{tx} J_\nu(x\sqrt{1-t^2}) = 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+n} P^{\nu+\frac{1}{2}, n}(t)}{\Gamma(2\nu+n+1)}$$

della funzione del 1° membro in serie di polinomi sferici generalizzati.

Questo sviluppo in serie si trova ad esempio nel lavoro citato del Nielsen⁵⁾ in cui però vi sono alcuni errori materiali.

7. Per dare infine un altro esempio del metodo da noi seguito nel N° precedente, ritroviamo con il detto metodo la seguente nota formula⁶⁾

$$(tx)^{-\frac{\nu}{2}} e^t J_\nu(2\sqrt{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_n^{(\nu)}(x)}{\Gamma(\nu+n+1)}$$

in cui con $L_n^{(\nu)}(x)$ si indica il polinomio di Laguerre generalizzato.

Da una nota formula⁷⁾, si ha

$$L\left[x^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xt})\right] = \frac{t^{\frac{\nu}{2}}}{s^{\nu+1}} e^{-\frac{t}{s}}$$

e quindi per la (12)

$$L\left[e^x x^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xt})\right] = \frac{t^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x}{s-1}}}{(s-1)^{\nu+1}}$$

che può scriversi

$$L\left[e^x x^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xt})\right] = t^{\frac{\nu}{2}} s^{-(\nu+1)} \cdot \left[(s-1)^{-(\nu+1)} \cdot s^{\nu+1} e^{-\frac{t}{s-1}}\right]$$

⁵⁾ Cfr. Nielsen, l. c., p. 202, formula (7).

⁶⁾ Cfr. G. D., p. 182, formula (2). Questa formula è una manifestata generalizzazione di un'altra stabilita da F. Tricomi nei Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, seduta del 17 febbraio 1935. Cfr. però la nota 114 di G. D.

⁷⁾ Cfr. G. D., p. 178.

ove il fattore del 2° membro, messo fra parentesi quadra, rappresenta, se si cambia s in $\frac{1}{s}$, la funzione generatrice dei polinomi di Laguerre. Sviluppando perciò quel fattore secondo le potenze crescenti di $\frac{1}{s}$, si ha

$$L\left[e^x x^{\frac{v}{2}} J_v(2\sqrt{xt})\right] = \frac{t^{\frac{v}{2}}}{s^{v+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(v)}(t)}{s^n},$$

ossia

$$L\left[e^x x^{\frac{v}{2}} J_v(2\sqrt{xt})\right] = t^{\frac{v}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(v)}(t) L(x^{v+n})}{\Gamma(v+n+1)}$$

e quindi infine il noto sviluppo che si cercava

$$e^x J_v(2\sqrt{xt}) = t^{\frac{v}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{v}{2}+n} L_n^{(v)}(t)}{\Gamma(v+n+1)}.$$

(Eingegangen am 27. Februar 1938.)

Über eine Eigenschaft der Charakteristik von meromorphen Funktionen in einer Halbebene.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1.

In der vorliegenden Arbeit werde ich einige Sätze über das Wachstum von ganzen transzendenten Funktionen in einer Halbebene, die ich an anderem Ort¹⁾ im Anschluß an Ahlfors²⁾ bewiesen habe, durch eine andere Methode begründen, welche zugleich einige Verallgemeinerungen auf meromorphe Funktionen zuläßt. Es handelte sich dort um folgende Sätze:

I. *Es sei $f(z)$ eine im $Rz > 0$ reguläre und dort nicht beschränkte Funktion so daß in jedem Punkt der imaginären Achse die Ungleichung*

$$(1.1) \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq 1$$

gilt. Es sei ferner

$$(1.12) \quad m(r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi.$$

Dann ist $m^2(r)$ eine konvexe Funktion von r^2 .

II. *Es sei $f(z)$ eine in $Rz \geq 0$ reguläre Funktion von z und dort von der Ordnung $\varrho < 1$. Ist*

$$(1.2) \quad \mu(r) = \frac{1}{2} \{ \log |f(-ir)| + \log |f(ir)| \}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \infty,$$

so ist:

$$(1.3) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(r)}{m(r)} \geq \frac{1 - \varrho^2}{2}.$$

III. *Gilt außer der Voraussetzung von II noch die Ungleichung*

$$(1.4) \quad \mu(r) \leq \frac{1}{2} m(r)$$

¹⁾ Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und einige andere verwandte Sätze, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. d. Math.-Phys. Klasse (1938).

²⁾ On Phragmén-Lindelöf Principle, Trans. A. M. S. **35** (1937), S. 1–8.

überall, so ist die Dichte der Menge E , wo

$$\mu \leq \frac{1 - \varrho'^2}{2} m \quad (\varrho < \varrho' < 1)$$

gilt, mindestens

$$1 - \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Es war zu vermuten, daß im Satz I eine allgemeine Eigenschaft der Charakteristik $T_\pi(r)$ einer im $Rz \geq 0$ meromorphen Funktion steckt, aus der man auch die Sätze II und III folgern könnte. Dies konnte ich nun unter Benutzung des Carlemanschen Satzes und eines Kunstgriffes von Henri Cartan³⁾ verhältnismäßig leicht bestätigen. Man kann nämlich folgendes beweisen:

IV. Ist $T_\pi(r)$ die Charakteristik einer im $Rz \geq 0$ meromorphen und dort nicht beschränkten Funktion $f(z)$, so ist $(r T_\pi(r))^2$ konvex in r^2 .

2. Die Formel von Green-Nevanlinna und der Satz von Carleman.

Es sei $f(z)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Bereich B meromorphe Funktion mit den Nullstellen a und Polen b und $u(z)$ eine in demselben Bereich reguläre harmonische Funktion. Man umgebe a und b mit Kreisen K_a und K_b vom Radius ϱ , so daß jeder Kreis eine solche Stelle enthält, und daß sie den Rand Γ nicht treffen. Den nach Entfernung dieser Kreise bleibenden Bereich nenne man B_ϱ . Man wende nun auf B_ϱ die Greensche Formel

$$(2.1) \quad \int_{\Gamma + \Sigma K_\varrho + \Sigma K_b} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = 0$$

an, setze dort $u = \log |f|$ und $v = u(z)$ und mache den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$. So erhält man die Formel⁴⁾:

$$(2.2) \quad \sum_a u(a) - \sum_b u(b) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left(\log |f| \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \log |f| \right) ds,$$

wobei ν die innere Normalrichtung von Γ bedeutet, und das Integral im positiven Sinne zu nehmen ist.

Ist nun B der Halbkreis

$$(2.3) \quad |z| \leq r \quad Rz \geq 0,$$

³⁾ Henri Cartan, Sur la fonction de croissance attaché à une fonction meromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions d'une variable, C. R. Acad. sc. Paris 189 (1929).

⁴⁾ F. und R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen oder Linien, Acta Soc. Sc. Fenn. 50 (1922), Nr. 5.

so wähle man $u = x$ und setze ferner

$$\sum_{0 < |a| < r} Ra = R(r, 0) \quad \text{und} \quad \sum_{0 < |b| < r} Rb = R(r, \infty).$$

Nach einfacher Rechnung erhält man

$$(2.4) \quad R_{\pi}(r, 0) - R_{\pi}(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \log |f(iy)| dy \\ + r^3 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{2\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi \right\}.$$

Nun verstehe man unter $\Gamma_{r_0, r}$ wobei $r_0 > 0$, den Weg, den man erhält, wenn man aus dem Rand des Halbkreises (2.3) die Strecke $-ir_0$ bis ir_0 entfernt. Setzt man dann

$$m_{\pi}(r) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{r_0, r}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right\} \frac{dz}{z} \quad (r > r_0),$$

so wird

$$R_{\pi}(r, 0) - R_{\pi}(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r_0}^{r_0} \log |f(iy)| dy + r^3 \frac{dm_{\pi}(r)}{dr},$$

also durch Integration von $r = r_0$ bis $r = r$

$$\int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, 0)}{t^3} dt - \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, \infty)}{t^3} dt = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \int_{-r_0}^{+r_0} \log |f(iy)| dy \\ + m_{\pi}(r) - m_{\pi}(r_0).$$

Setzen wir nun:

$$C(r, \log |f|) = \frac{1}{2\pi r_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(r_0 e^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \int_{-r_0}^{+r_0} \log |f(iy)| dy,$$

so wird

$$(2.5) \quad \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, 0)}{t^3} dt - \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, \infty)}{t^3} dt + C(r, \log |f|) \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{r_0, r}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right\} \frac{dz}{z},$$

was den Inhalt des Carlemanschen Satzes ausmacht.

Wir setzen jetzt

$$(2.6) \quad T_{\pi}(r, f) = -C(r, \log^+ |f|) + m_{\pi}(r, f) + N_{\pi}(r, f) \\ = -C(r, \log^+ |f|) + \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{r_0, r}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right\} \frac{dz}{z} \\ + \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, \infty)}{t^3} dt,$$

und definieren $T_{\pi}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ entsprechend. Wegen (2.5) erhalten wir

$$T_{\pi}(r, f) = T_{\pi}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

was dem ersten Fundamentalsatz⁵⁾ entspricht.

Allgemein sei $g = f - c$, wobei c eine beliebige komplexe Zahl bedeutet. Aus

$$N_{\pi}(r, g) = N_{\pi}(r, f), \\ m_{\pi}(r, g) = m_{\pi}(r, f) + O(1), \\ C(r, g) = C(r, f) + O(1)$$

folgt wegen

$$T_{\pi}(r, g) = T_{\pi}\left(r, \frac{1}{g}\right) \\ T_{\pi}\left(r, \frac{1}{f-c}\right) = T_{\pi}(r, f) + O(1).$$

3. Die Integraldarstellung von $T_{\pi}(r)$.

Speziell sei nun $g = f - e^{i\vartheta}$, wobei ϑ eine reelle Zahl ist. Aus

$$C(r, \log |f - e^{i\vartheta}|) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{r_0, r}} \log |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right\} \frac{dz}{z} \\ + \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, \infty)}{t^3} dt - \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, e^{i\vartheta})}{t^3} dt,$$

folgt durch Multiplikation mit $\frac{d\vartheta}{2\pi}$ und Integration von 0 bis 2π

$$C(r, \log^+ |f|) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_{r_0, r}} \log^+ |f(z)| \left\{ \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right\} \frac{dz}{z} \\ + \int_{r_0}^r \frac{R_{\pi}(t, \infty)}{t^3} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_{\pi}(r, e^{i\vartheta}) d\vartheta,$$

⁵⁾ R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften von meromorphen Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sc. Fenn. 50 (1925), Nr. 12.

denn bekanntlich gilt nach dem Gaußschen Mittelwertsatz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f - e^{i\vartheta}| d\vartheta = \log^+ |f|.$$

Diese letzte Formel besagt nun folgendes:

Es ist

$$(3.1) \quad T_\pi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_\pi(r, e^{i\vartheta}) d\vartheta,$$

oder noch

$$(3.2) \quad T_\pi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^r \frac{dt}{t^3} \int_0^{2\pi} R_\pi(t, e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

Diese Gleichung bildet das Gegenstück einer ähnlichen Beziehung⁶⁾, die Henri Cartan für die Charakteristik $T(r)$ gegeben hat.

4. Eine Ungleichung.

Betrachten wir näher die rechte Seite von (3.2).

Es ist

$$L_\pi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\pi(r, e^{i\vartheta}) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_s x|f'| ds$$

erstreckt über alle Kurvenstücke s innerhalb des Halbkreises (2.3), wo $|f| = 1$ ist. Wie man leicht bestätigt, ist L_π eine nicht abnehmende Funktion von r , die in jedem Intervall nur endlich viele positive Sprünge aufweist.

Bezeichnet man also mit $T'(r+0)$ und $T'(r-0)$ die rechte und linke Derivierte von T_π , so wird zuerst

$$(4.1) \quad T'_\pi(r-0) = \frac{L_\pi(r-0)}{r^3} \leq \frac{L_\pi(r+0)}{r^3} = T'_\pi(r+0),$$

wo das Ungleichheitszeichen nur für endlich viele r stehen kann. Nun ist ferner

$$r T'_\pi(r+0) = \frac{L_\pi(r+0)}{r^2},$$

⁶⁾ Wir schreiben $C(r, g)$ statt $C(r, \log |f|)$.

⁷⁾ R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 168. Berlin 1937.

also

$$(4.2) \quad 2 T_{\pi} + r T'_{\pi}(r+0) = \frac{L_{\pi}(r+0)}{r^2} + 2 \int_{r_0}^r \frac{L_{\pi}(t)}{t^3} dt \\ = \frac{L_{\pi}(r_0-0)}{r_0^2} + \int_{r_0}^r \frac{d L_{\pi}}{t^2} {}^8).$$

Es sei jetzt eine Stelle r , wo $L'_{\pi}(r)$ existiert. Dann ist $T'_{\pi}(r+0) = T'_{\pi}(r)$ und es folgt aus (4.2) durch Differentiation

$$(4.3) \quad r T''_{\pi} + 3 T'_{\pi} = (2 T_{\pi} + r T'_{\pi})' = \frac{L'_{\pi}(r)}{r^2} \geq 0.$$

Diese Differentialungleichung verschärft eine ältere Ungleichung von R. Nevanlinna⁹⁾, der schon $T'_{\pi}(r) \geq 0$ bewiesen hat. Setzen wir nun $rT = \sqrt{\omega}$. Wegen (4.3) ist

$$(\sqrt{\omega})'' + 3 \left(\frac{\sqrt{\omega}}{r} \right)' \geq 0$$

und nach einfachen Rechnungen

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \omega'' - \frac{1}{4} \frac{\omega'^2}{\omega} + \frac{\omega'}{2r} - \frac{\omega}{r^2} \geq 0$$

oder

$$\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{r\omega} \right) \geq \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{r^2} + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \right\} \geq \frac{2\omega'}{\omega},$$

also schließlich

$$\omega'' - \frac{\omega'}{r} \geq 0.$$

Dies besagt aber, daß die zweite Ableitung von ω nach r^2 bis auf endlich viele Punkte positiv ist¹⁰⁾. Da nun $T'_{\pi}(r)$ in diesen Punkten positive Sprünge erleidet, so hat man folgenden Satz:

Ist $T_{\pi}(r)$ die Charakteristik des Wachstums der in $Rz \geq 0$ meromorphen Funktion $f(z)$, so ist $(rT_{\pi})^2$ eine konvexe Funktion von r^2 .

5.

Es ist nun leicht zu sehen, daß I schon in diesem letzten Satz enthalten ist. Gilt nämlich für $f(z)$ die Bedingung

$$(5.1) \quad |f(z)| \leq 1$$

⁸⁾ Vgl. z. B. Saks, *Theory of the Integral*, S. 108, Warschau 1937.

⁹⁾ R. Nevanlinna, I. c., S. 7.

¹⁰⁾ Man könnte auch direkt ausrechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{d^2}{(dr^2)^2} (r T_{\pi})^2 = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} T_{\pi} (r T'_{\pi} + T) = \frac{1}{2r} \{ T_{\pi} (3 T'_{\pi} + r T''_{\pi}) + r T_{\pi}^2 \} \geq 0.$$

auf der imaginären Achse, so ist nach (2. 6)

$$2\pi T_\pi = -\frac{m(r_0)}{r_0} + \frac{m(r)}{r},$$

wobei $m(r)$ durch (1. 1) gegeben ist, also wegen (4. 3)

$$r\left(\frac{m}{r}\right)'' + 3\left(\frac{m}{r}\right)' \geq 0,$$

d. h.

$$m'' + \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \geq 0,$$

eine Ungleichung, welche durch die Substitution $m^2 = \omega$ die Form (4. 5) annimmt. Gilt nun statt (5. 1) nur (1. 1), so kann dasselbe Resultat durch einen wohlbekannten Grenzübergang erhalten werden. Wir kehren nun zum allgemeinen Fall einer ganzen transzendenten Funktion zurück und rechnen den Ausdruck $rT_\pi'' + 3T_\pi' \geq 0$ aus. Aus (2. 4) findet man

$$2\pi T_\pi' = \left(\frac{m}{r}\right)' + \frac{2}{r^3} \int_0^r \mu dy$$

mit

$$\mu(r) = \frac{1}{2} \{ \log |f(-ir)| + \log |f(ir)| \},$$

und daraus

$$2\pi T_\pi'' = \left(\frac{m}{r}\right)'' + \frac{2}{r^3} \mu(r) - \frac{6}{r^4} \int_0^r \mu dy.$$

Es wird also

$$rT_\pi'' + 3T_\pi' = r\left(\frac{m}{r}\right)'' + 3\left(\frac{m}{r}\right)' + \frac{2}{r^2} \mu(r),$$

d. h.

$$r\left(\frac{m}{r}\right)'' + 3\left(\frac{m}{r}\right)' \geq -\frac{2\mu}{r^2}$$

oder

$$(5.3) \quad m'' + \frac{m'}{r} \geq \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{m}\right),$$

eine Ungleichung, die inhaltlich mit der Ungleichung (8. 2) meiner Arbeit übereinstimmt. Dort wurde auch gezeigt, wie aus (5. 3) die Sätze II und III folgen.

Aus (5. 3) können wir noch folgenden Satz ableiten. Ist $f(z)$ im $Rz \geq 0$ ganz und gilt dort

$$(5.4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu}{m} \leq \frac{1 - \varrho^2}{2} \quad (0 < \varrho < 1),$$

so ist $f(z)$ mindestens von der Ordnung ϱ .

Denn wegen (5.4) ist von einem r ab

$$\mu \leq \frac{1 - \varrho'^2}{2} m \quad (\varrho' < \varrho),$$

also

$$m'' + \frac{m'}{r} \geq \frac{m}{r^2} \varrho'^2.$$

Durch die Transformation $m = \sqrt{\eta}$ erhalten wir nun

$$2 \left(\frac{\eta''}{\eta} + \frac{\eta'}{r\eta} \right) - \left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^2 \geq \frac{4\varrho'^2}{r^2},$$

oder wegen

$$\left(\frac{\eta'}{\eta} \right)^2 + \frac{4\varrho'^2}{r^2} \geq \frac{4\varrho'\eta'}{\eta r},$$

$$(5.5) \quad \frac{\eta''}{\eta} + \frac{\eta'}{r\eta} (1 - 2\varrho') \geq 0,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Aus (5.5) sieht man übrigens, daß im Falle, wo (5.4) gilt, sogar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log m(r)}{\log r} \geq \varrho \text{ ist.}$$

(Eingegangen am 3. März 1938.)

Fastrhombische Kurvennetze und Vierecksnetze.

Von

H. Graf in Darmstadt und R. Sauer in Aachen.

§ 1.

Definition und Struktur der fastrhombischen Netze.

1. Die Arbeit beschäftigt sich mit gewissen „Kurvennetzen“ und „Vierecksnetzen“ auf einer Fläche $x = x(u, v)$; ($u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$). Wir unterscheiden dabei *Kurvennetze*, bestehend aus zwei Kurvenscharen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, und *Vierecksnetze*, bestehend aus irgend zwei diskreten Kurvenfolgen dieser Kurvenscharen.

Die Deutung der Parameter u, v als affine Punktkoordinaten in einer (u, v) -Ebene liefert eine Abbildung eines Parallelogrammbereichs dieser Ebene auf die Fläche: Die Bilder der Parallelen zu den Koordinatenachsen sind die Netzkurven auf der Fläche. Wir setzen voraus, daß die Abbildung topologisch ist, d. h. zwei Kurven der gleichen Schar bzw. Folge sollen sich in keinem Punkt, zwei Kurven verschiedener Scharen bzw. Folgen sollen sich in genau einem Punkt schneiden (nicht berühren). Ferner verabreden wir: Die Funktionen $x(u, v)$ seien stets reell und regulär.

Diese Voraussetzungen bedingen gewisse Einschränkungen bezüglich der später in die Rechnungen eingehenden willkürlichen Funktionen und Konstanten sowie eine Beschränkung des Netzbereichs; um nicht jedesmal hierauf ausdrücklich hinweisen zu müssen, sei dies hier ein für allemal vorweggenommen.

2. Nach Nr. 1 wird jeder achsenparallele Rhombus bzw. jedes achsenparallele Rhombennetz der (u, v) -Ebene in ein Kurvenviereck bzw. ein Vierecksnetz der Fläche $x = x(u, v)$ abgebildet (vgl. Fig. 1). Zur Definition der „fastrhombischen“ Netze stellen wir nunmehr folgende Forderung:

Jeder beliebige achsenparallele Rhombus der (u, v) -Ebene mit der beliebigen Seitenlänge h werde in ein „fastrhombisches“ Kurvenviereck auf der Fläche abgebildet; fastrhombisch nennen wir ein Kurvenviereck dann, wenn die Bogenlängen seiner Gegenseiten „im Mittel“ gleich sind, also das Viereck gleiche Gegenseitensummen besitzt.

Aus dieser Forderung folgt unmittelbar, daß dann jedes achsenparallele Rhombennetz der (u, v) -Ebene mit gleich großen „Rhombenmaschen“ von beliebiger

Seitenlänge ε in ein Vierecksnetz mit lauter fastrhombischen Einzelmaschen abgebildet wird; ε bezeichnen wir als „Weite“ der Einzelmaschen. Darüber hinaus sind aber auch alle größeren Netzwiercke von der Maschenweite $h = 2\varepsilon$, 3ε , $\dots$, $n\varepsilon$ (Vierermaschen, Neunermaschen, $\dots$, n^2 -Maschen) fastrhombisch.

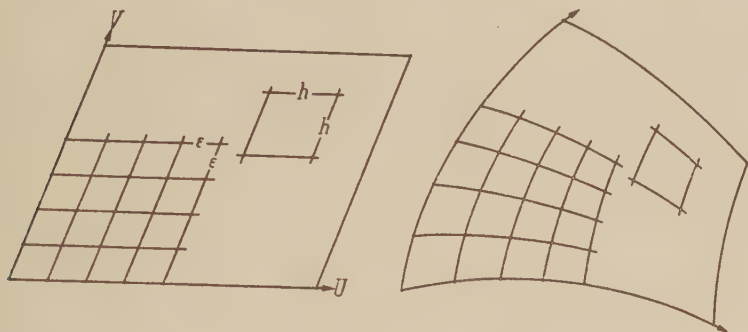


Fig. 1.

Wir werden künftig die Bezeichnung *fastrhombisch* jedem Vierecksnetz der beschriebenen Art geben, desgleichen aber auch jedem Kurvennetz, aus dem sich (der beliebigen Wahl eines Netzknotenpunktes und der Maschenweite ε entsprechend) unendlich viele fastrhombische Vierecksnetze herausgreifen lassen.

Die fastrhombischen Kurvennetze gehören definitionsgemäß zu den schon mehrfach untersuchten infinitesimalen Rhombennetzen¹⁾; denn für $\varepsilon \rightarrow 0$ werden alle fastrhombischen Maschenvierecke „infinitesimale Rhomben“. Jedoch ist umgekehrt nicht jedes infinitesimale Rhombennetz ein fastrhombisches Kurvennetz, da sich aus einem infinitesimalen Rhombennetz im allgemeinen kein fastrhombisches Vierecksnetz herausgreifen läßt.

Die fastrhombischen Netze sind lediglich ihrer „Struktur“ nach definiert, d. h. durch Forderungen bezüglich der Bogenlängen der Netzkurven. Von der Trägerfläche und den Winkeln zwischen den Netzkurven wird hierbei abgesehen. Wir fragen jetzt nach Struktureigenschaften der Kurven- und Vierecksnetze.

3. Struktureigenschaften der Vierecksnetze.

Bereits unter Nr. 2 haben wir die Zusammenfassungen von je $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $\dots$, $n \cdot n$ Einzelmaschen als Vierermaschen, Neunermaschen, $\dots$, n^2 -Maschen bezeichnet. Im Innern einer Vierermasche kreuzen sich zwei Kurvenbogen, die wir als „Maschenkreuz“ zusammenfassen wollen; es besteht aus zwei „Balken“ oder vier „Armen“. Das Randviereck einer Vierermasche mitsamt dem Maschenkreuz nennen wir gelegentlich „Maschenfenster“.

¹⁾ Vgl. z. B. A. Voß, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. 36 (1906), S. 247–296.

Für Vierecksnetze gelten nun die beiden folgenden Sätze:

a) Wenn die vier an einen Netzknoten angrenzenden Maschenvierecke und die daraus aufgebaute Vierermasche fastrhombisch sind, dann ist das durch die vier Maschen bestimmte Maschenkreuz gleichbalkig (vgl. Fig. 2, links).

Entsprechend:

Wenn die vier an einen Netzknoten angrenzenden Maschenkreuze und das daraus aufgebaute größere Maschenkreuz gleichbalkig sind, dann ist die durch die vier Kreuze bestimmte Vierermasche fastrhombisch (vgl. Fig. 2, rechts).

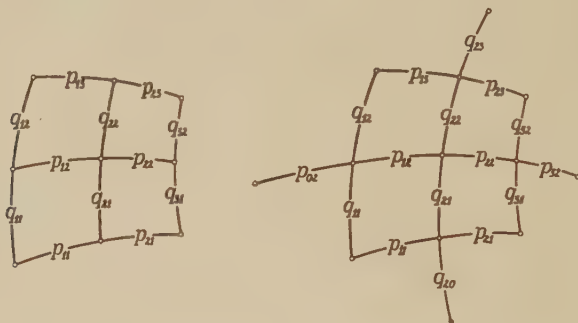


Fig. 2.

Beweis.

Aus der Forderung

für die fastrhombischen Maschen

$$p_{11} + p_{12} = q_{11} + q_{21}$$

$$p_{12} + p_{13} = q_{12} + q_{22}$$

$$p_{21} + p_{22} = q_{21} + q_{31}$$

$$p_{22} + p_{23} = q_{22} + q_{32}$$

$$p_{11} + p_{21} + p_{13} + p_{23} = q_{11} + q_{12} + q_{31} + q_{32}$$

für die gleichbalkigen Kreuze

$$p_{02} + p_{12} = q_{11} + q_{12}$$

$$p_{22} + p_{32} = q_{31} + q_{32}$$

$$p_{11} + p_{21} = q_{20} + q_{21}$$

$$p_{13} + p_{23} = q_{22} + q_{23}$$

$$p_{02} + p_{12} + p_{22} + p_{32} = q_{20} + q_{21} + q_{22} + q_{23}$$

folgt die Bedingung

$$p_{12} + p_{22} = q_{21} + q_{22}$$

für gleichbalkige Kreuze.

$$p_{11} + p_{21} + p_{13} + p_{23} = q_{11} + q_{12} + q_{31} + q_{32}$$

für fastrhombische Maschen.

b) Wenn in irgendeinem Vierecksnetz alle Einzelmaschen und alle Vierermaschen fastrhombisch sind, dann ist auch jede weitere Masche (n^2 -Masche, $n = 3, 4, 5, \dots$) und somit nach Definition Nr. 2 das Netz selbst fastrhombisch.

Beweis (vgl. Fig. 3). Entsprechend der Zahl der Einzelmaschen und Vierermaschen, die in einer n^2 -Masche enthalten sind, gelten n^2 Gleichungen der Form $p_{11} + p_{12} = q_{11} + q_{21}$ und $(n-1)^2$ Gleichungen der Form $p_{12} + p_{22} = q_{21} + q_{22}$. Analog Satz a) folgt daraus die Beziehung

$$p_{11} + p_{21} + \dots + p_{n1} + p_{1n} + p_{2n} + \dots + p_{nn} \\ = q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n} + q_{n1} + q_{n2} + \dots + q_{nn}$$

für das fastrhombische Randviereck der n^2 -Masche.

4. Struktureigenschaften der Kurvennetze.

Da Satz a) von Nr. 3 für jedes in einem fastrhombischen Kurvennetz enthaltene Vierecksnetz von beliebiger Maschenweite ε gilt, lassen sich die fastrhombischen Kurvennetze an Stelle der unter Nr. 2 gegebenen Definition auch durch folgende gleichwertige Eigenschaft kennzeichnen:

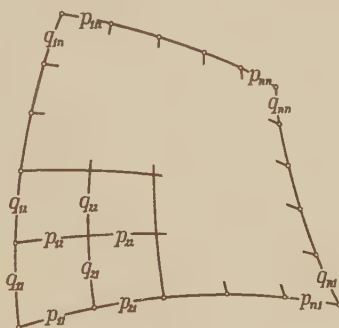


Fig. 3.

Jedes beliebige achsenparallele Maschenkreuz der (u, v) -Ebene mit vier gleichen Armen von der beliebigen Länge h wird in ein „fastgleicharmiges“ (= gleichbalkiges) Kurvenkreuz auf der Fläche abgebildet; fastgleicharmig bedeutet „im Mittel gleicharmig“, d. h. die Bogensummen je zweier Kreuzarme, die paarweise die Kreuzbalken liefern, sind gleich.

§ 2.

Bestimmung der allgemeinsten fastrhombischen Netze.

5. Kurvennetze.

Ein fastrhombisches (u, v) -Kurvennetz mit dem Linienelement

$$s^2 = E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2$$

ist nach Nr. 2 durch die Forderung gleicher Gegenseitensummen für jedes Maschenviereck definiert, d. h. es muß

$$(1) \int_{u_0}^{u_0+h} \{\sqrt{E(u, v_0)} + \sqrt{E(u, v_0+h)}\} du = \int_{v_0}^{v_0+h} \{\sqrt{G(u_0, v)} + \sqrt{G(u_0+h, v)}\} dv$$

für jede beliebige Stelle u_0, v_0 und Maschenweite h identisch erfüllt sein. Durch Entwicklung der Funktionen E und G nach Potenzen von h erhält man für (1)

$$2h\sqrt{E} + \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2} \right\} + \dots = 2h\sqrt{G} + \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial v^2} + 3 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right\} + \dots,$$

wobei unter E , G und deren Ableitungen die Funktionswerte an der Stelle u_0, v_0 zu verstehen sind, und daraus weiter durch Koeffizientenvergleichung

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2}.$$

Schreibt man für die beliebige Stelle u_0, v_0 wieder u, v , dann ergibt sich schließlich als notwendige Bedingung eines fastrhombischen Kurvennetzes

$$(2) \quad \sqrt{E} = \sqrt{G} = \varphi(u+v) + \psi(u-v),$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen bedeuten.

Die Bedingung (2) ist aber auch hinreichend, da (1) durch (2) tatsächlich befriedigt wird.

Für $\varphi = \psi = \text{const}$ spezialisieren sich die fastrhombischen Netze in die genau rhombischen sogenannten Tschebyscheff-Netze²⁾.

6. Vierecksnetze aus Streckenzügen.

Da bei der Definition fastrhombischer Vierecksnetze lediglich ihre Struktur maßgebend ist, können wir ein fastrhombisches Vierecksnetz aus Kurven ersetzen durch ein strukturgleiches Vierecksnetz aus Streckenzügen; die geradlinigen Vierecksseiten des letztgenannten Netzes sind dann mit den entsprechenden, im allgemeinen krummlinigen Vierecksseiten des zuerstgenannten Netzes längengleich.

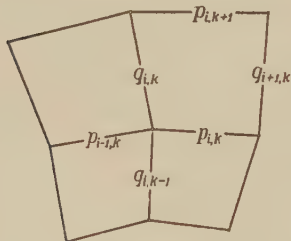


Fig. 4.

Die Seitenstrecken der Vierecksmaschen eines Streckenzugnetzes seien nach Fig. 4 systematisch mit $p_{i,k}$ und $q_{i,k}$ ($i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) bezeichnet. Dann liefert die zu (1) analoge Forderung fastrhombischer Vierecksmaschen beliebiger Größe (Einzelmaschen, Vierermaschen, $\dots$, n^2 -Maschen) die Bedingung

$$(3) \quad \sum_{i_0}^{i_0+m-1} \{p_{i_0,k_0} + p_{i_0,k_0+m}\} = \sum_{k_0}^{k_0+m-1} \{q_{i_0,k_0} + q_{i_0,k_0+m}\},$$

die für jede, durch die beliebigen ganzen Zahlen i_0, k_0 bzw. m gekennzeichnete Ecke bzw. Weite einer Netzmasche identisch erfüllt sein muß. Schreibt

²⁾ P. L. Tschebyscheff, Sur la coupe des vêtements, Oeuvres II, S. 708; ferner A. Voß, Math. Annalen 19 (1882), S. 1–26 und L. Bieberbach, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1926, S. 294–321.

man für die beliebige Stelle i_0, k_0 wieder i, k , dann ergibt sich aus (3) schließlich als Bedingung eines fastrhombischen Streckenzugnetzes — analog zu (2):

$$(4) \quad p_{i,k} = \varphi_{i+k} + \psi_{i-k}, \quad q_{i,k} = \varphi_{i+k} + \psi_{i-k-1},$$

worin φ_r und ψ_s willkürliche Konstante bedeuten. (4) ist hinreichend und notwendig für fastrhombische Streckenzugnetze; denn

a) Jedes durch (4) mit beliebig gewählten Konstanten φ_r, ψ_s gegebene Streckenzugnetz ist fastrhombisch; Begründung: (3) wird durch Einsetzen von (4) identisch erfüllt.

b) Jedes beliebig vorgegebene fastrhombische Streckenzugnetz ist durch (4) mit geeignet zu wählenden Konstanten φ_r, ψ_s darstellbar; Begründung: Eine Streckenfolge $k = k_0$ eines fastrhombischen Streckenzugnetzes legt durch ihre aufeinanderfolgenden Strecken p_{i,k_0} und quer anschließenden Strecken q_{i,k_0} strukturell bereits das ganze Netz eindeutig fest (in der

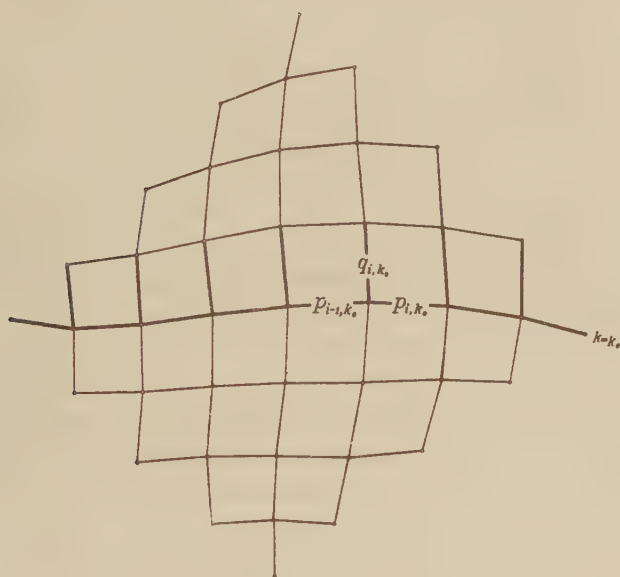


Fig. 5.

Fig. 5 sind die Strecken dieser Folge durch dicke Striche, die Strecken des dadurch festgelegten Netzbereiches durch dünne Striche dargestellt); denn von p_{i,k_0} und q_{i,k_0} ausgehend ergeben sich zwangsläufig weitere angrenzende fastrhombische Maschenvierecke und gleichbalkige Maschenkreuze.

Die nämliche Streckenfolge $k = k_0$ legt aber andererseits wegen der aus (4) folgenden Beziehungen

$$p_{i, k_0} - q_{i, k_0} = \varphi_{i - k_0} - \varphi_{i - k_0 - 1}, \quad p_{i - 1, k_0} - q_{i, k_0} = \varphi_{i + k_0 - 1} - \varphi_{i + k_0}$$

die Konstanten φ_r, φ_s bis auf eine, allen φ_r bzw. φ_s gemeinsame beliebige additive Konstante $+c$ bzw. $-c$ fest; diese Konstanten φ_r, φ_s stellen demnach gemäß (4) das vorgegebene fastrhombische Streckenzugnetz dar.

§ 3.

Strukturtreue Netzverformungen.

7. Die kennzeichnende Eigenschaft eines fastrhombischen Kurven- bzw. Vierecksnetzes ist eine *reine Struktureigenschaft* und lediglich durch Forderungen bezüglich der Bogenlängen der Netzkurven definiert (vgl. Nr. 3). Infolgedessen bleibt bei der Bestimmung des Linienelements für das allgemeinste fastrhombische (u, v) -Kurvennetz die Funktion $F(u, v)$ willkürlich, d. h. über die Winkel $\omega(u, v) = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}$, unter denen sich die Netzkurven schneiden, kann noch frei verfügt werden. Daraus folgt dann unmittelbar:

Jedes fastrhombische Kurvennetz läßt sich strukturtreu so verformen, daß es auf eine beliebig vorgegebene Fläche aufgelegt werden kann; insbesondere läßt es sich in die Ebene ausbreiten³⁾.

In entsprechender Weise willkürlich läßt sich ein fastrhombisches Vierecksnetz unter Erhaltung seiner charakteristischen Struktur verformen. Insbesondere kann jedes fastrhombische krummlinige Vierecksnetz in ein fastrhombisches räumliches oder ebenes Streckenzugnetz verformt werden (vgl. Nr. 6).

Bei allen derartigen Netzverformungen ist zu beachten, daß der Ausbreitungsbereich mehr oder weniger beschränkt sein kann (vgl. allgemeiner Hinweis unter Nr. 1). An den Rändern des Bereiches werden dann die Winkel ω der Netzkurven 0 bzw. π ; bei den Streckenzugnetzen führt dies zu „Sperungen“ in den Maschenvierecken (Ausartung in Drei- und Zweiecke).

Die Struktur und strukturtreue Verformung der Vierecksnetze läßt sich durch Fadenmodelle veranschaulichen, in welchen die beiden Kurvenfolgen des Netzes durch Fäden verwirklicht sind; die Fäden müssen dann verbiegbar, aber unausdehnbar und in den Kreuzungspunkten verknotet sein.

Im folgenden werden nun besondere strukturtreue Verformungen eines beliebigen Kurvennetzes besprochen, wodurch wir zu Kurvennetzen auf besonderen Flächenhäuten gelangen.

³⁾ Vgl. die entsprechende Verformung der Tschebyscheff-Netze, Fußnote ²⁾.

I. Geodätische fastrhombische Kurvennetze.

8. Wir versuchen über die noch unbestimmt gebliebene Funktion $F(u, v)$ im Linienelement eines fastrhombischen (u, v) -Kurvennetzes so zu verfügen, daß alle Netzkurven geodätische Linien der Trägerfläche werden; Netze dieser Art bezeichnen wir als „geodätisch“. Es ergibt sich dabei folgender

Satz: Jedes beliebige fastrhombische Kurvennetz* läßt sich auf unendlich viele Arten⁴⁾ (Parameter a) in geodätische fastrhombische Kurvennetze verformen; die Trägerflächen sind dann Flächenhäute mit dem Liouvilleschen Linienelement

$$\dot{s}^2 = \{\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)\}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2).$$

Umgekehrt gibt es auf jeder Liouvilleschen Fläche unendlich viele geodätische fastrhombische Kurvennetze (Parameter b). Alle diese (u, v) -Netze haben als gemeinsames „Diagonalnetz“ das (α, β) -Grundnetz der „konfokalen Kegelschnitte“ auf der Liouvilleschen Fläche⁵⁾.

Beweis. Die Bedingungen für geodätische Netzkurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{\sqrt{G}} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{E}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G}$$

sind nach Einsetzen von (2) integrierbar und liefern

$$(5) \quad F = \{\varphi(u+v) + \psi(u-v)\} \{\varphi(u+v) - \psi(u-v) + 2a\},$$

worin a eine beliebige Konstante bedeutet. Das Linienelement erhält nunmehr die Voßsche Form¹⁾ der geodätischen infinitesimalen Rhombennetze

$$(6) \quad \dot{s}^2 = (\varphi + \psi) \{(\varphi + \psi)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2(\varphi - \psi + 2a)\dot{u}\dot{v}\}.$$

Durch die Parameterumformung

$$\dot{\alpha} = (\dot{u} + \dot{v}) \sqrt{\varphi(u+v) + a}, \quad \dot{\beta} = (\dot{u} - \dot{v}) \sqrt{\psi(u-v) - a}$$

geht (6) über in das Liouvillesche Linienelement

$$(7) \quad \dot{s}^2 = \{\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)\}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2).$$

Umgekehrt führt die Parameterumformung

$$\frac{2\dot{u}}{2\dot{v}} = \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\Phi(\alpha) + b}} \pm \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\Psi(\beta) - b}}$$

(7) wieder in (6) über.

⁴⁾ Vgl. M. Lagally: Über die Verbiegung geodätischer Netze, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. 10 (1910).

⁵⁾ Vgl. z. B. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale I, 1 (1927), S. 293, 303. Mathematische Zeitschrift. 44.

Der zweite Teil des eben bewiesenen Satzes deckt sich mit dem die Liouvilleschen Flächen kennzeichnenden Satz von Blaschke und Zwirner⁶⁾:

Die geodätischen Diagonalen jedes (α, β) -Vierecks sind gleich lang.

Die fastrhombischen Geradenetze in der Ebene als einer besonderen Liouvilleschen Fläche werden in § 5 behandelt.

II. Gleichwinklige fastrhombische Kurvennetze.

9. Wir verfügen jetzt über die Funktion $F(u, v)$ im Linienelement eines fastrhombischen (u, v) -Kurvennetzes so, daß sich die Netzkurven unter konstantem Winkel ω schneiden; Netze dieser Art bezeichnen wir als „gleichwinklig“. Es ergibt sich dabei der

Satz: Jedes fastrhombische Kurvennetz läßt sich auf unendlich viele Arten (Parameter ω) in gleichwinklige fastrhombische Kurvennetze verformen; die Trägerflächen sind dann Flächenhäute mit dem Linienelement

$$s^2 = \{\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)\}^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2).$$

Umgekehrt gibt es auf jeder Fläche dieses Linienelementes unendlich viele gleichwinklige fastrhombische Kurvennetze (Parameter ω). Alle diese (u, v) -Netze haben als gemeinsames Diagonalnetz das isotherme (α, β) -Kurven-Grundnetz und schneiden die Kurvenschar $\alpha = \text{const}$ unter jeweils konstantem Winkel $\pm \omega/2$. Für $\omega = \pi/2$ spezialisieren sich die gleichwinkligen fastrhombischen Kurvennetze zu „fastquadratischen“, d. h. rechtwinkligen fastrhombischen Kurvennetzen⁷⁾.

Beweis. Die Bedingung $\omega = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}} = \text{const}$ für die Gleichwinkligkeit der Netzkurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ führt nach Einsetzen von (2) und der Parameterverformung

$$\alpha = (u + v) \cos \omega/2, \quad \beta = (u - v) \sin \omega/2$$

zum Linienelement

$$(8) \quad s^2 = \{\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)\}^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2);$$

hierbei bedeutet

$$\Phi(\alpha) = \varphi\left(\frac{\alpha}{\cos \omega/2}\right), \quad \Psi(\beta) = \psi\left(\frac{\beta}{\sin \omega/2}\right).$$

⁶⁾ W. Blaschke, Rom. Accad. Lincei (6a) 5 (1927), S. 396–400 und Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 653–668.

⁷⁾ Fastquadratische Kurvennetze sind immer „infinitesimal-quadratisch“, d. h. isotherm, aber nicht umgekehrt (vgl. Nr. 2).

Man beachte, daß sich das Linienelement (8) vom Liouvilleschen Linienelement (7) durch den Exponenten 2 bei $\{\Phi + \Psi\}$ unterscheidet.

Die gleichwinkligen fastrhombischen Kurvennetze in der Ebene als einer besonderen Fläche mit dem Linienelement (8) werden in § 5 behandelt.

§ 4.

Fastrhombische Netze, welche samt Trägerflächen in sich verschiebbar sind.

10. Wir fragen zunächst allgemein nach Kurven- und Vierecksnetzen auf besonderen Flächen von der Art, daß bei einer „Verschiebung der Flächenhaut in sich“ das mit der Haut verbundene Netz ebenfalls in sich übergeht. Zur Kennzeichnung eines derartigen in sich verschiebbaren Kurvennetzes sei diese Eigenschaft für jedes im Kurvennetz enthaltene Vierecksnetz mit beliebiger Maschenweite ε gefordert; jede durch ε gegebene Verschiebung soll jede der beiden Netzkurvenfolgen gleichzeitig zur Deckung bringen.

Die einzigen Flächen, welche eine kontinuierliche Verschiebung in sich zulassen, sind bekanntlich die Drehflächen und ihre Biegungsflächen. Den Breitenkreisen auf den Drehflächen entsprechen die „Bahnkurven“ der Verschiebung auf den Biegungsflächen. Zu den Biegungsflächen der Drehflächen (Verschiebung = Drehung) gehören z. B. die Schraubenflächen (Verschiebung = Schraubung) und im besonderen — als Biegungsfläche des Drehzylinders — die allgemeine Zylinderfläche (Verschiebung = Rückung längs der geraden Mantellinien; letztere sind hier aus den Breitenkreisen des verbogenen Drehzylinders hervorgegangen).

Sehen wir bei den gesuchten Netzen von der Biegungsform der Trägerfläche ab, dann genügt es, nach „in sich verdrehbaren“ Netzen auf Drehflächen zu fragen; derartige Netze sollen als „Drehnetze“ bezeichnet werden.

Für ein Drehvierecksnetz beliebiger Maschenweite ε muß nach obiger Kennzeichnung notwendig entweder a) eine Diagonalkurvenfolge oder b) eine Netzkurvenfolge aus Breitenkreisen bestehen. Die auf den Breitenkreisen (Radien r) gelegenen Knotenpunkte des Netzes folgen dabei in gleichen Bogenabständen $r\varepsilon$ aufeinander.

In Fig. 6a bzw. 6b ist für ein Dreh-Vierecksnetz der Art a) bzw. b) auf einer beliebigen Drehfläche ($\neq$ Drehzylinder) je ein Maschenfenster im Lotriß schematisch dargestellt; die Rißebeine steht senkrecht zur Drehachse Z . Es bedeuten d_1, d_2 die Radiendifferenzen der Breitenkreise, s_1, s_2 und t_1, t_2 die wahren Bogenlängen der Maschenseiten auf der Fläche, und σ und τ die wahren Winkel der Netzkurven mit den zugehörigen Loten zur Z -Achse.

11. Wir fordern jetzt für unsere in sich verschiebbaren Kurvennetze (zuletzt als Drehnetze auf einer nichtzylindrischen Trägerfläche normiert)

fastrhombische Struktur. In jedem Vierecksnetz mit der beliebigen Maschenweite ε gilt dann für alle Maschenfenster:



Fig. 6 a.

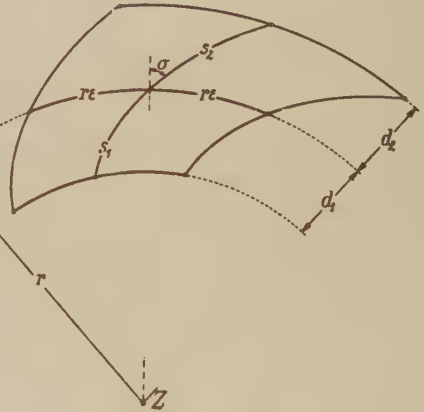


Fig. 6 b

Bei a): Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergeben sich $\lim \frac{d_1 + d_2}{s_1 + s_2} = \cos \sigma$ und $\lim \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \cos \tau$, woraus wegen des gleichbalkigen Maschenkreuzes $s_1 + s_2 = t_1 + t_2$ notwendig $\sigma = \tau$ folgt. Dann sind aber alle Maschenvierecke des Netzes symmetrisch zu den Meridianen der Drehfläche und folglich fastrhombisch.

Ergebnis: Auf einer beliebigen Drehfläche gibt es unendlich vielgestaltige fastrhombische Drehnetze, die aus zwei Drehscharen von Kurven bestehen; die Kurve der einen Schar ist beliebig, die Kurve der anderen Schar ist das Spiegelbild der ersten Kurve in bezug auf eine Meridianebene.

Beispiel. Trägerdrehfläche sei die achsensenkrechte Ebene $z = 0$, die Netzkurven beider Drehscharen seien speziell logarithmische Spiralen $r = e^{\pm \varphi}$. Ein Drehvierecksnetz dieser Art gibt Bild C der Tafel S. 379 wieder.

Bei b): Die Bedingungen für die fastrhombischen Maschenvierecke $s_1 = (r - d_1/2) \varepsilon$ und $s_2 = (r + d_2/2) \varepsilon$ und für das gleichbalkige Maschenkreuz $s_1 + s_2 = 2 r \varepsilon$ ergeben zusammen $d_1 = d_2 = d$, also $d/\varepsilon = r_0 = \text{const.}$ Für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird $\lim \frac{d_1 + d_2}{s_1 + s_2} = \cos \sigma = \frac{r_0}{r}$.

Ergebnis: Auf einer beliebigen Drehfläche ($\neq$ Drehzylinder) gibt es ∞^1 fastrhombische Drehnetze, die aus den Breitenkreisen und den Kurven einer Drehschar bestehen. In jedem Vierecksnetz eines solchen

Drehnetzes folgen die Breitenkreise mit gleichen Radiendifferenzen d , die Kurven der Drehfolge mit gleichen Winkeldifferenzen ε aufeinander. Für jede Kurve der Drehfolge besteht in jedem Punkt P zwischen seinem Abstand r von der Achse Z und dem Winkel σ zwischen der Kurve und dem Achsenlot durch P die Beziehung

$$(9) \quad r \cos \sigma = r_0 = \text{const.}$$

Alle auf beliebigen Drehflächen liegenden fastrhombischen Drehnetze mit gleichem $\varepsilon d = \varepsilon^2 r_0$ lassen sich strukturtreu ineinander verformen. In grober Näherung kann man sich diesen Verformungsvorgang durch ein Modell veranschaulichen, in dem die Breitenkreise durch starre Drähte, die Kurven der Drehfolge durch dünne Fäden (als Streckenzüge) realisiert sind.

Zwei extreme Verformungen führen zu folgenden speziellen Drehnetzen:

1. Beispiel. Die Trägerdrehfläche ist speziell die achsensenkrechte Ebene $z = 0$. Aus (9) ergeben sich als Kurven der Drehfolge die Evolventen eines beliebigen Kreises (Radius r_0) aus der Schar der konzentrischen Netz-

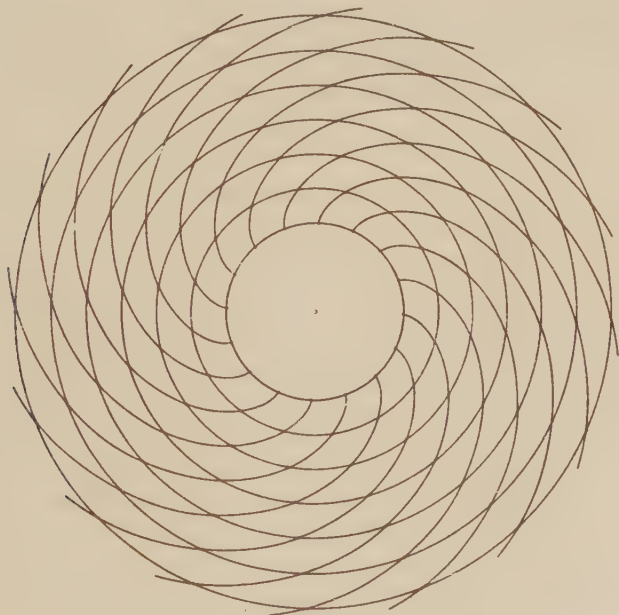


Fig. 7.

kreise. Ein derartiges Netz aus Kreisevolventen und konzentrischen Kreisen (das einzige nichttriviale fastrhombische Drehnetz in der Ebene) ist in Fig. 7 als Vierecksnetz dargestellt.

2. Beispiel. Die Trägerfläche sei so spezialisiert, daß die Netzkurven der Drehschar aus den Meridiankurven der Drehfläche bestehen. Als Gleichung der Meridiankurve folgt aus (9):

$$z = \frac{r}{2r_0} \sqrt{r^2 - r_0^2} - \frac{r_0}{2} \operatorname{Ar} \cos \frac{r}{r_0},$$

die Meridiankurve ist also Evolute der Kettenlinie $r = \frac{r_0}{2} \cos \frac{2z}{r_0}$. Wir haben somit das Ergebnis:

Existiert auf einer Drehfläche ein fastrhombisches Drehnetz aus Meridianen und Breitenkreisen, dann ist die Drehfläche der eine Krümmungszentramantel der Kettenfläche.

12. Wir besprechen jetzt noch den unter Nr. 11 ausgeschlossenen Sonderfall, in dem die Trägerfläche des Drehnetzes ein Drehzylinder ist. Nach einer Verbiegung des Drehzylinders in einen allgemeinen Zylinder, wobei die Breitenkreise des Drehzylinders in die geraden Mantellinien des allgemeinen Zylinders übergehen, ergeben sich Netze, die Parallelverschiebungen in Richtung dieser Mantelgeraden zulassen. Wir können wieder zwei Fälle unterscheiden:

a) Fastrhombische Netze aus zwei Scharen parallelverschobener Kurven; die Kurve der einen Schar ist beliebig, die der anderen ist das Spiegelbild der ersteren bezüglich der zur Schiebrichtung senkrechten Ebene.

b) Genau rhombische Netze (Tschebyscheff-Netze) aus den Parallelen zur Schiebrichtung und aus parallelverschobenen Kurven einer zweiten Schar, wobei die verschobene Kurve noch beliebig ist.

§ 5.

Fastrhombische Kurvennetze in der Ebene.

In § 3 haben wir festgestellt, daß auf jeder Fläche vom Liouvilleschen Linienelement (7) bzw. vom Linienelement (8) fastrhombische Kurvennetze liegen, die außerdem geodätisch bzw. gleichwinklig sind. Zu beiden Flächen (7) und (8) gehört als Sonderfall die Ebene⁸⁾; die zugehörigen Netze werden jetzt besprochen.

I. Geradlinige fastrhombische ebene Netze.

13. Wenn das Liouvillesche Linienelement (7) die Ebene darstellen soll, muß das Krümmungsmaß verschwinden, also

$$(10) \quad 0 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln E + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln G = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\Phi'}{\Phi + \Psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Psi'}{\Phi + \Psi} \right).$$

Die durch (10) bestimmten Funktionen Φ und Ψ werden in (7) eingesetzt und liefern für dieses Linienelement vier verschiedene Formen, die unter (11)

⁸⁾ Die Ebene als besondere Liouvillesche Fläche wird z. B. bei A. Voß [vgl. Fußnote ¹⁾] behandelt. Die von ihm gefundenen infinitesimal-rhombischen Geraden-netze sind identisch mit den in Nr. 13 angegebenen fastrhombischen Geraden-netzen.

angeführt sind; daneben sind die zugehörigen (α, β) -Kurven ⁵⁾ (bekanntlich konfokale Kegelschnitte und deren Ausartungen) angegeben:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \dot{s}^2 = (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \{\cos \alpha + \cos \beta\} && \text{konfokale Ellipsen und Hyperbeln,} \\
 & \dot{s}^2 = (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \{\alpha^2 + \beta^2\} && \text{konfokale Parabeln,} \\
 & \dot{s}^2 = (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) e^{\alpha} && \text{konzentrische Kreise und ihre Durchmesser,} \\
 & \dot{s}^2 = \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 && \text{parallele und senkrechte Geraden.}
 \end{aligned}$$

Die geodätischen Netzlinien (jetzt also Gerade) im fastrhombischen (u, v) -Netz haben stets die Kurven des (α, β) -Grundnetzes als Diagonalkurven und umhüllen daher eine α - oder β -Kurve. Es gilt somit der

Satz: Jedes fastrhombische ebene geodätische (u, v) -Netz besteht aus zwei Geradenscharen, welche eine beliebige (nicht zerfallende oder zerfallende) Kurve 2. Klasse $\alpha = \text{const}$ oder $\beta = \text{const}$ des konfokalen (α, β) -Netzes berühren.

14. Die Bedingung der gleichen Gegenseitensummen für fastrhombische Vierecke kennzeichnet jedes ebene geradlinig begrenzte Viereck als Tangentenviereck eines Kreises, der im Vierecksinnern liegt.

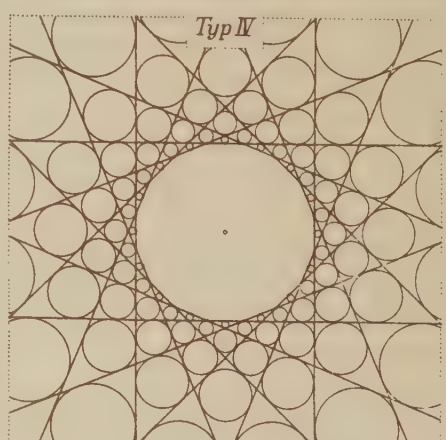
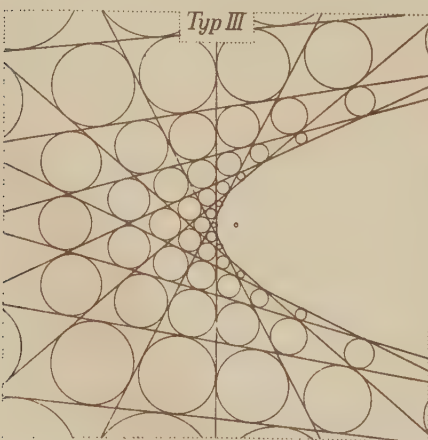
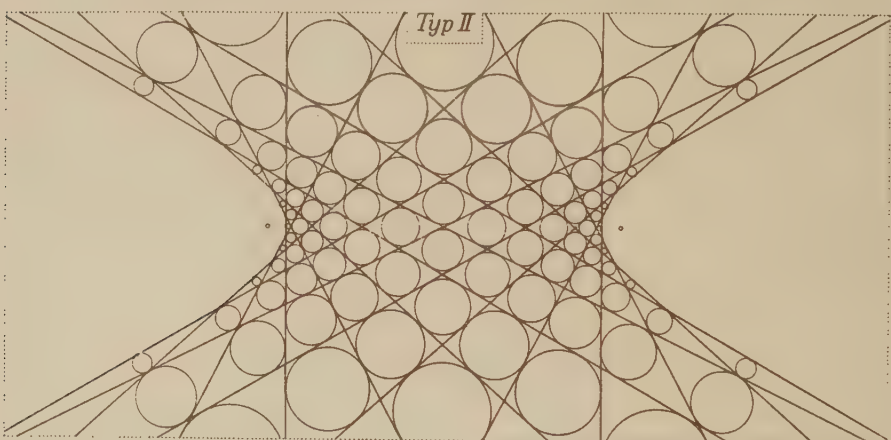
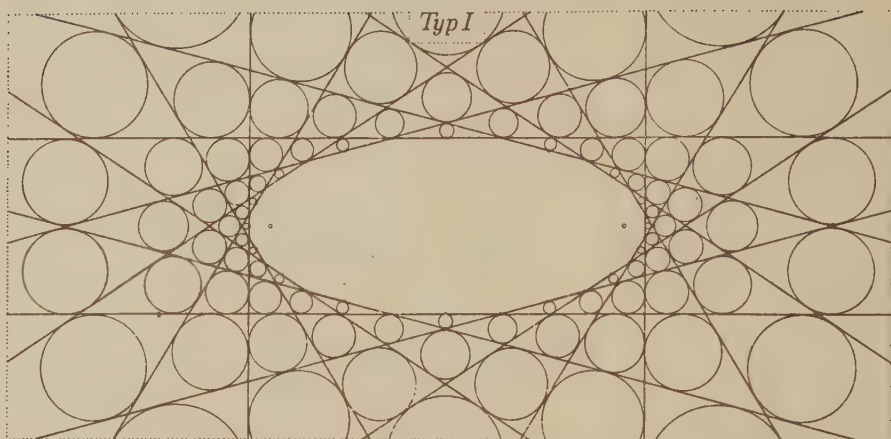
Da im nachfolgenden § 6 bewiesen wird, daß die unter Nr. 13 hergeleiteten und in der Figurentafel S. 376, 377 angegebenen ebenen geradlinigen fastrhombischen Vierecksnetze die allgemeinsten ihrer Art sind ⁹⁾, stellen sie zugleich die allgemeinsten geradlinigen Vierecksnetze dar, deren sämtlichen Einzelmaschen, Vierermaschen *usf.* Kreise einbeschrieben werden können.

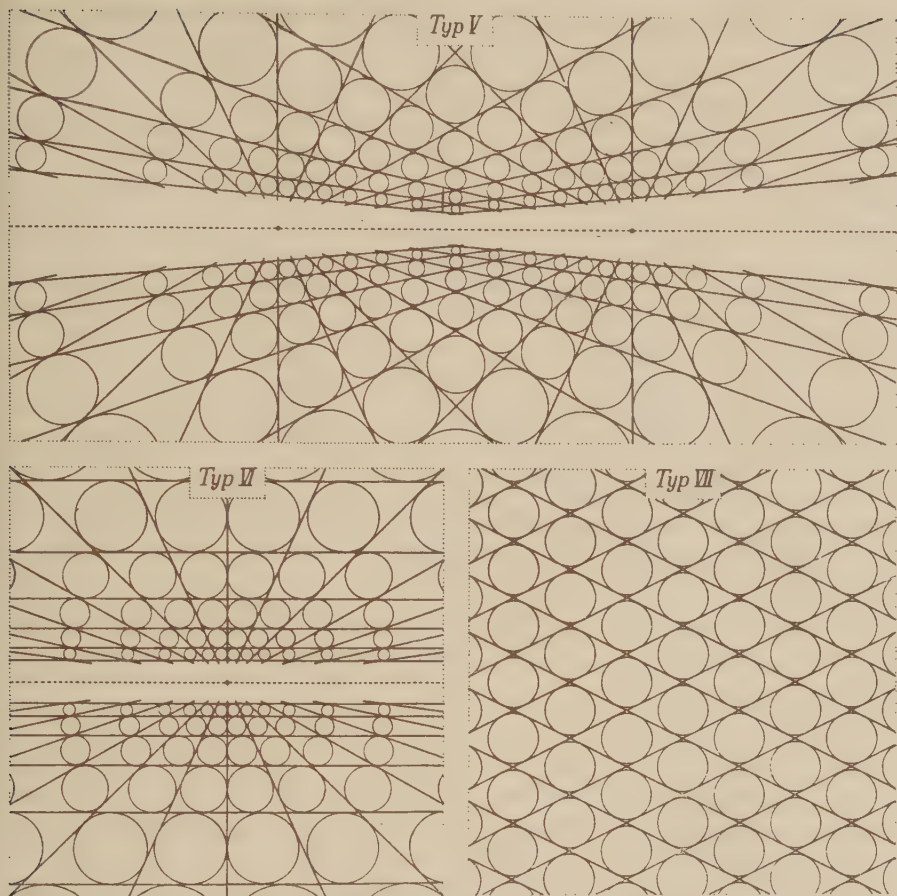
15. Beschreibung der Figurentafeln S. 376, 377 in denen alle möglichen Typen *I* bis *VII* eines ebenen fastrhombischen Geradennetzes durch herausgegriffene fastrhombische Vierecksnetze dargestellt sind:

Sämtliche Netze haben je eine Hüllkurve zweiter Klasse, die bei den Typen *I* bis *IV* nicht singulär ist, bei den Typen *V* bis *VII* in zwei Geradenbüschel zerfällt. Bei *III* liegt der eine der beiden Brennpunkte der nicht singulären Hüllkurve im Unendlichen, bei *IV* fallen beide Brennpunkte miteinander zusammen. Bei *VI* rückt der eine Punkt und bei *VII* rücken beide Punkte der in zwei Geradenbüschel entarteten Hüllkurve ins Unendliche.

Aus den Geradennetzen mit nicht singulärer Hüllkurve sind die dargestellten Vierecksnetze so herausgegriffen, daß sie die gleiche Symmetrie wie die Hüllkurven besitzen und daß außerdem die längs der Hüllkurve angrenzenden Maschenvierecke in Dreiecke ausarten; die „ausgearteten Maschenecken“ sind Berührungspunkte. Zur Wahrung der unter Nr. 2 angegebenen Netzdefinition dürfen die Netzgeraden nur als Halbgeraden bis zu ihren Berührungspunkten ge-

⁹⁾ Bisher ist nur gezeigt, daß die zu (11) gehörigen Geradennetze die allgemeinsten fastrhombischen geradlinigen Kurvennetze sind. Es könnte aber fastrhombische geradlinige Vierecksnetze geben, die nicht in diese Kurvennetze einbettbar sind.





deutet werden. Bei den dargestellten Geradennetzen mit zerfallender Hüllkurve besteht ebenfalls Symmetrie bezüglich der beiden Büschelscheitel. Das Vierecksnetz ist dabei in der Nähe der gestrichelt angegebenen „Häufungsgeraden“ abgebrochen.

Bei allen Netztypen sind den Maschenvierecken (einschließlich der in Dreiecke und äußere „offene“ Vierecke ausgearteten) Kreise einbeschrieben, was natürlich auch für alle größeren Maschen durchführbar wäre (vgl. Nr. 14). Die Diagonalkurven des Netzes sind bei *I*, *II*, *V* bzw. bei *III*, *VI* bzw. bei *IV* bzw. bei *VII* die unter (11) aufgezählten 4 Arten von konfokalen (α, β) -Kurven.

16. Alle fastrhombischen Geradennetze in der Ebene mit nichtzerfallender Hüllkurve sind mit Hilfe einer strukturtreuen und die Geradlinigkeit er-

haltenden Deformation¹⁰⁾ in fastrhombische Geradennetze auf nichtsingulären Regelflächen 2. Grades verformbar. Bei den Netztypen *I* und *II* bekommt man dabei dreiachsige einschalige Hyperboloide, bei *III* hyperbolische Paraboloiden und bei *IV* einschalige Drehhyperboloide. Die Geradenscharen aller dieser nichtsingulären Regelflächen 2. Grades lassen sich demgemäß zu „windschiefen“ fastrhombischen Geradennetzen anordnen.

II. Gleichwinklige fastrhombische ebene Netze.

17. Wenn das Linienelement (8) die Ebene darstellen soll, muß das Krümmungsmaß verschwinden, also

$$(12) \quad 0 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln E + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln G = 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\Phi'}{\Phi + \Psi} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Psi'}{\Phi + \Psi} \right).$$

Die aus (12) gewonnenen Funktionen Φ und Ψ , die wegen (12) $\equiv$ (10) mit den früher unter Nr. 13 gewonnenen übereinstimmen, werden in (8) eingesetzt und liefern vier verschiedene Formen für dieses Linienelement, welche unter (13) angeführt sind; daneben sind die zugehörigen Typen der (α, β) -Kurven angegeben durch ihre Parametergleichungen in rechtwinkligen Koordinaten x, y :

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{s}^2 &= (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \{ \cos \alpha + \cos \beta \}^2 & x &= \alpha + \sin \alpha \cos \beta, \quad y = \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \dot{s}^2 &= (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \{ \alpha^2 + \beta^2 \}^2 & x &= \frac{\alpha}{3} (\alpha^2 - 3\beta^2), \quad y = \frac{\beta}{3} (3\alpha^2 - \beta^2), \\ \dot{s}^2 &= (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) e^{2\alpha} & x &= e^\alpha \cos \beta, \quad y = e^\alpha \sin \beta, \\ \dot{s}^2 &= \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 & x &= \alpha, \quad y = \beta. \end{aligned}$$

Die sich unter gleichem Winkel ω schneidenden Netzkurven im fastrhombischen (u, v) -Netz haben stets die Kurven des (α, β) -Grundnetzes als Diagonalkurven. Es gilt folglich der

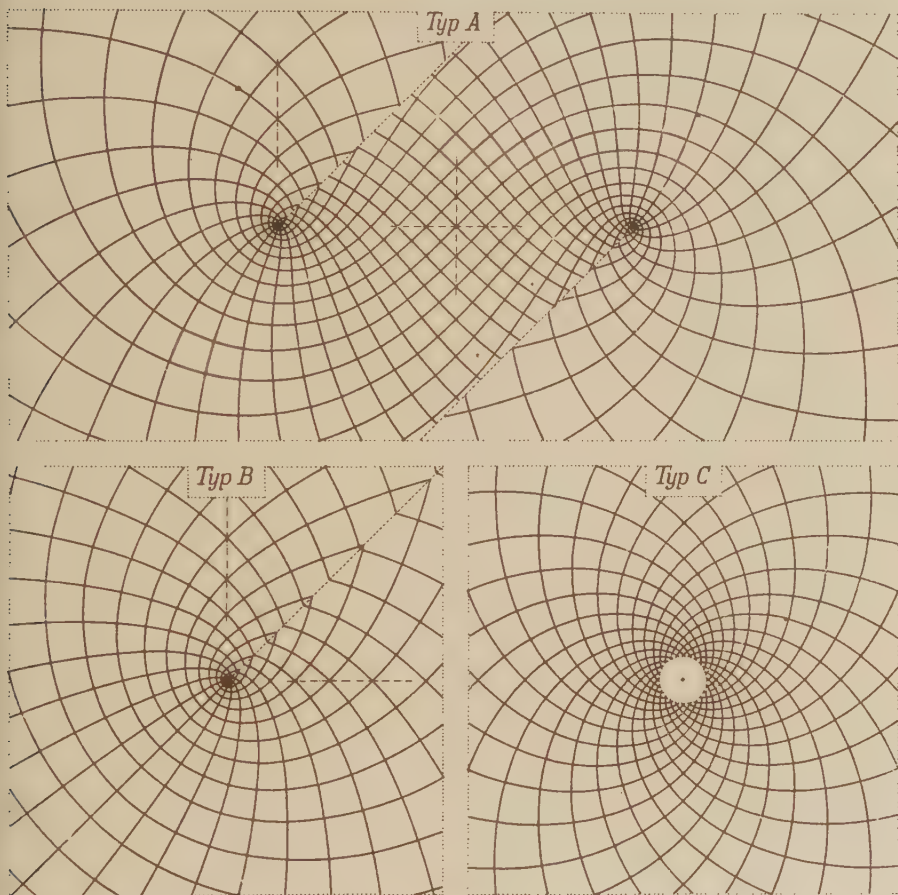
Satz: Jedes gleichwinklige fastrhombische ebene (u, v) -Netz besteht aus zwei Kurvenscharen, die sich gegenseitig unter dem konstanten Winkel ω und die eine der beiden Kurvenscharen des isothermen (α, β) -Grundnetzes unter dem Winkel $\pm \omega/2$ schneiden.

Sowohl die Kurven des (α, β) -Grundnetzes als auch die Kurven des gleichwinkligen (u, v) -Netzes können mit Hilfe einer konformen Abbildung der (x, y) -Ebene in eine (α, β) -Ebene gewonnen werden. Wir setzen $\zeta = \alpha + i\beta$ und $z = x + iy$ und erhalten aus (13) in entsprechender Reihenfolge die konformen Abbildungen

$$(14) \quad \begin{aligned} z &= \zeta + \sin \zeta, \\ z &= \frac{\zeta^3}{3}, \\ z &= e^\zeta, \\ z &= \zeta. \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Zu dieser Deformation vgl. z. B. Hilbert—Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, 1932, S. 14, 15.

In der z -Ebene erscheinen dann die Kurven des (α, β) -Grundnetzes als Bilder der achsenparallelen Geraden $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ der ζ -Ebene und die Netzkurven des gleichwinkligen fastrhombischen (u, v) -Netzes als Bilder der zu den Achsen gleichwinkligen Parallelen $u, v = \alpha \pm \beta \operatorname{tg} \omega/2 = \text{const}$.



18. Beschreibung der Figurentafeln S. 379, in denen die drei möglichen nichttrivialen Typen *A*, *B*, *C* eines gleichwinkligen und zwar speziell rechtwinkligen fastrhombischen Kurvennetzes dargestellt sind; zur Vervollständigung der Tafel ist noch als trivialer Typus *D* das gewöhnliche Quadratnetz (Schachbrettmuster) hinzuzunehmen:¹¹⁾

¹¹⁾ Die nichttrivialen konformen Abbildungen (14) hat Herr Dipl.-Ing. G. Dahmen in Aachen durchgerechnet.

Beim Typus *A* sind alle Punkte $y = 0$; $x = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ „singuläre“ Netzpunkte, von denen in der Figur aber nur ein Paar vorkommt. Bei den Typen *B* und *C* ist der Punkt ∞ und der Nullpunkt $x = y = 0$, bei *D* lediglich der Punkt ∞ singulärer Punkt des Netzes.

Aus den Kurvennetzen ist das jeweils dargestellte Vierecksnetz so herausgegriffen, daß möglichst viele Symmetrien (Symmetrieachsen strichpunktirt) zu sehen sind. Der dargestellte Bereich des Netzes überdeckt gerade einmal die Ebene; längs der gestrichelten Geraden passen die Vierecksnetze nicht zusammen und sind auf neuen Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche fortzusetzen. Beim Typus *C* ist das Vierecksnetz in der Nähe des singulären Punktes („Häufungspunkt“) abgebrochen. Die Diagonalkurven des Netzes sind bei den Typen *A, B, C, D* die unter (13) entsprechend aufgezählten (α, β) -Kurven.

§ 6.

Fastrhombische geradlinige Vierecksnetze in der Ebene.

19. In § 5, I behandelten wir das Problem: In der Ebene sind die allgemeinsten fastrhombischen Kurvennetze zu bestimmen, die aus zwei kontinuierlichen Geradenfolgen (Scharen) bestehen. Jetzt soll unsere Aufgabe lauten: In der Ebene sind die allgemeinsten fastrhombischen Vierecksnetze zu bestimmen, die aus zwei diskreten Geradenfolgen bestehen⁹⁾. Da jedes Vierecksnetz aus Kurven stets in ein strukturgleiches Vierecksnetz aus Streckenzügen verformt werden kann (vgl. Nr. 7), läßt sich unsere letzte Aufgabe auch folgendermaßen formulieren:

In der Ebene sind die allgemeinsten fastrhombischen Streckenzugnetze zu bestimmen, deren sämtliche Streckenzüge in gerade Linien ausgestreckt sind. Als allgemeine Lösung dieser Aufgabe ergeben sich auf ganz elementare Weise mit Hilfe der unter Nr. 20 und 21 bewiesenen Sätze die nämlichen Vierecksnetze, die bereits in den fastrhombischen Geradennetzen des § 5, I enthalten und in der Figurentafel S. 376, 377 typisiert sind.

Nach Nr. 6 ist ein beliebiges fastrhombisches Streckenzugnetz, das ja im allgemeinen aus „geknickten“ Streckenzügen besteht, durch „einen Streckenzug mit Umgebung“ festgelegt. Im folgenden wird sich zeigen, daß ein fastrhombisches Streckenzugnetz, das aus lauter Geraden besteht, bereits durch „einen Knotenpunkt mit Umgebung“ festliegt; zur Festlegung des Vierecksnetzes genügt dabei ein einziges Maschenfenster, das aus vier an einen Knotenpunkt grenzenden Maschenvierecken aufgebaut wird (vgl. Nr. 3).

20. Satz: *Die sechs Geraden einer aus vier beliebigen fastrhombischen Einzelmaschen bestehenden Vierermasche umhüllen stets eine (nicht-singuläre oder singuläre) Kurve 2. Klasse.*

Die Vierermasche selbst ist ebenfalls fastrhombisch.

Beweis. Fig. 8 besteht aus vier beliebigen fastrhombischen Vierecken, die zusammen ein Maschenfenster aus sechs Geraden ergeben. Beim Fensteraufbau geht man etwa aus von den beiden beliebig gewählten Geraden des Fensterkreuzes und den vier in seinen Winkelfeldern gelegenen beliebigen Inkreisen der anschließenden Fenstermaschen; die vier Geraden des Rahmenvierecks, von denen jede je zwei nebeneinandergelegene Kreise von außen berühren soll, sind dann eindeutig bestimmt. Die vier Kreismitten $I, \dots, IV$ und die vier Seiten $a_i, \dots, d_i$ eines jeden Maschenvierecks sind zyklisch bezeichnet.

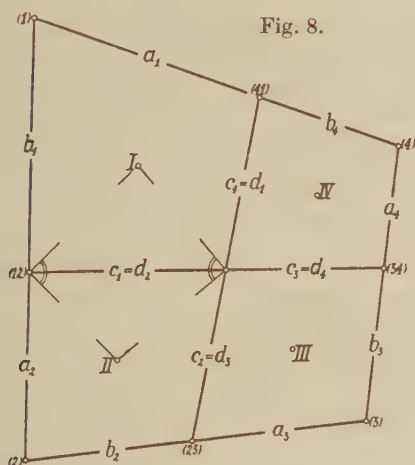


Fig. 8.

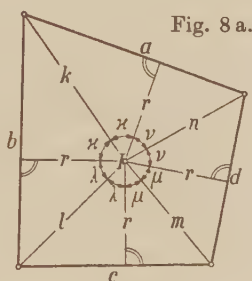


Fig. 8 a.

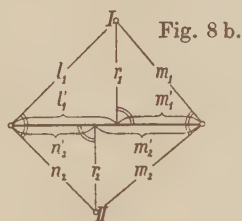


Fig. 8 b.

In Fig. 8a ist das zu I gehörige Maschenviereck getrennt herausgezeichnet, wobei der zu allen Buchstaben dieser Figur gehörige Zeiger 1 der Kürze wegen fortgelassen wurde.

In Fig. 8b sind die Mitten I und II und die gemeinsame Seite $c_1 = d_2$ von zwei aufeinanderfolgenden Maschenvierecken ebenfalls getrennt herausgezeichnet.

Nach Fig. 8a gelten für die vier Dreiecke mit I als Ecke und einer der vier Seiten a, b, c, d als Gegenseite die vier Beziehungen $ra = kn \sin(\alpha + \nu)$, usf., also insgesamt

$$\frac{r^2 a d}{r^2 b c} = \frac{n^2 k m \sin(\alpha + \nu) \sin(\mu + \nu)}{l^2 k m \sin(\alpha + \lambda) \sin(\mu + \lambda)},$$

wegen $\alpha + \lambda + \mu + \nu = \pi$ folgt daraus $ad:bc = n^2:l^2$. Die letzte Gleichung gilt für jedes der vier Vierecke um I, II, III, IV ; man hat also $a_1 d_1 : b_1 c_1 = n_1^2 : l_1^2$, $a_2 d_2 : b_2 c_2 = n_2^2 : l_2^2, \dots$, woraus man durch

Produktbildung erhält

$$(15) \quad \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{b_1 b_2 b_3 b_4} = \frac{n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2}{l_1^2 l_2^2 l_3^2 l_4^2}.$$

Da in Fig. 8b je zwei Dreiecke ähnlich sind, gilt $l_1 : l'_1 : r_1 = n_2 : r_2 : n'_2$ und $m_1 : m'_1 : r_1 = m_2 : r_2 : m'_2$, woraus sowohl $l'_1 = m'_2$, $n'_2 = m'_1$ als auch $n_2^2 : l_1^2 = r_2 n'_2 : r_1 l'_1 = r_2 m'_1 : r_1 m'_2$ folgt; zyklisch abgeändert gelten beide Ergebnisse für die übrigen Viereckspaare *II III*, *III IV*, *IV I*. Wir haben somit zunächst die vier Beziehungen $c_1 = d_2 = m'_1 + m'_2$, $c_2 = d_3 = m'_2 + m'_3$, ..., die geeignet zusammengefaßt

$$d_1 + d_3 = d_2 + d_4 = m'_1 + m'_2 + m'_3 + m'_4$$

und damit die Gleichbalkigkeit des Fensterkreuzes liefern; nach der Umkehrung von Satz a) unter Nr. 3 heißt das aber: Das Rahmenviereck ist fastrhombisch, womit die zweite Behauptung unseres Satzes bewiesen ist.

Wegen der vier zyklischen Gleichungen $n_2^2 : l_1^2 = r_2 m'_1 : r_1 m'_2$, $n_3^2 : l_2^2 = r_3 m'_2 : r_2 m'_3$, ... wird in Gleichung (15) die rechte Seite gleich 1 und wir erhalten

$$(16) \quad a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4.$$

Diese Gleichung ist aber kennzeichnend dafür, daß die sechs Geraden des Maschenfensters eine (nichtsinguläre oder singuläre) Kurve 2. Klasse umhüllen. Hiervon überzeugt man sich durch Anwendung der Sätze von Brianchon und Menelaos:

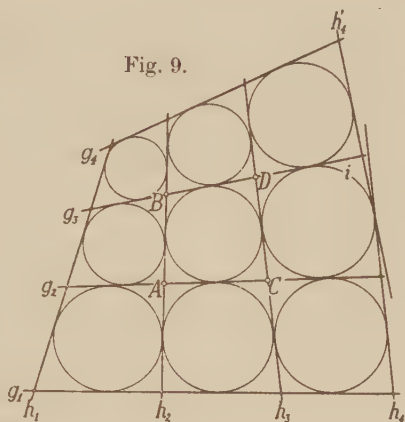
Angenommen, die sechs Geraden des Maschenfensters seien Tangenten einer Kurve 2. Klasse; dann müssen sich die Verbindungsgeraden von drei Gegeneckenpaaren, etwa (12)–(23), (41)–(34) und (1)–(3), nach Brianchon in einem Punkt *B* schneiden, der von (1) bzw. (3) die Entfernungen e_1 bzw. e_3 haben möge. Der Satz von Menelaos, auf die Dreiecke (1) (2) (3) und (1) (4) (3) und deren Schnittgeraden (12) (23) *B* bzw. (41) (34) *B* angewandt, liefert $e_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 e_3$ bzw. $e_1 b_4 b_3 = a_1 a_4 e_3$, zusammengefaßt also Gleichung (16) als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer die sechs Geraden berührenden Kurve 2. Klasse.

21. Satz: *Die acht Geraden einer aus neun fastrhombischen Einzelmaschen (acht davon sind fastrhombisch wählbar, die neunte ist zwangsläufig fastrhombisch) bestehenden Neunermasche umhüllen stets die nämliche Kurve 2. Klasse.*

Die Neunermasche selbst ist ebenfalls fastrhombisch.

Beweis. An das fastrhombische Maschenfenster um Punkt *A* (Fig. 9), das nach Satz Nr. 20 aus den Tangenten g_1, g_2, g_3 ; h_1, h_2, h_3 einer Kurve 2. Klasse *k* besteht, grenzen längs g_3 und h_3 je zwei weitere fastrhombische

Einzelmaschen an. Die Geraden g_4 und h_4 sind dadurch (wieder als Außentangenten der beiden Mascheninkreispaare) eindeutig festgelegt und müssen ebenfalls die Kurve k umhüllen; denn von den sechs Geraden des Fensters um Punkt B sind fünf bereits Tangenten von k , also auch die sechste Gerade g_4 ; entsprechendes gilt für das Fenster um C und für h_4 . Von dem fastrhombischen Maschenviereck um Punkt D , das aus den Geraden $g_2, g_3, g_4; h_2, h_3, h'_4$ besteht, sind gleichfalls fünf Gerade bereits Tangenten von k , also auch die sechste Gerade h'_4 . Wären nun aber h_4 und h'_4 voneinander verschieden, dann müßte der Inkreis i und die Kurve k fünf gemeinsame Tangenten g_2, g_3, h_3, h_4, h'_4 besitzen, was für $k \neq i$ unmöglich ist. Es tritt also ein „Schließen“ beim Netzaufbau durch $h'_4 \equiv h_4$ ein und die erste Behauptung unseres Satzes ist damit bewiesen.



Die zweite Behauptung des Satzes folgt nach Satz b) von Nr. 3 aus der Tatsache, daß alle Einzelmaschen und Vierermaschen der gegebenen Neunermasche fastrhombisch sind.

22. Zusammenhang der ebenen geradlinigen fastrhombischen Vierecksnetze mit den ebenen geradlinigen Dreiecksnetzen¹²⁾ und mit den räumlichen ebenflächigen Tetraeder-Oktaeder-Gefügen¹³⁾:

Wir legen durch sämtliche Gerade eines in der Zeichenebene vorgegebenen fastrhombischen Vierecksnetzes Paare von Ebenen, die gegen die Zeichenebene gleich geneigt sind (Neigungswinkel z. B. 45° bzw. 135°). Desgleichen denken wir uns durch sämtliche Inkreise aller Einzelmaschen, Vierermaschen, Neunermaschen usw. die Paare von Drehkegeln der nämlichen Neigung gelegt. Je vier von den acht Ebenen, die zu den Seiten eines Maschenvierecks gehören, berühren einen der beiden zugehörigen Kegel und schneiden sich deshalb in einem Punkt. Das entstehende Ebenengefüge besteht demnach aus lauter sich zu je vieren punktweise schneidenden Ebenen und liefert eine Raumteilung, die

¹²⁾ H. Graf und R. Sauer, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. 1924, S. 119—156.

¹³⁾ R. Sauer, ebenda 1925, S. 41—56.

aus Tetraeder- und Oktaederzellen besteht¹⁴⁾ und Symmetrie in bezug auf die Ebene des vorgegebenen fastrhombischen Vierecksnetzes besitzt. Die Schnittgeraden des Ebenengefüges bilden in jeder Tetraeder- bzw. Oktaederebene Dreiecksnetze¹²⁾.

In Fig. 10 ist im Lotriß ein Teil eines derartigen Tetraeder-Oktaeder-Gefüges dargestellt, soweit er an eine Vierermasche eines geradlinigen fastrhombischen Vierecksnetzes anschließt. In den drei Bildern der Figur bauen sich — über und unter dem ebenen Maschenfenster — zunächst vier Oktaeder,

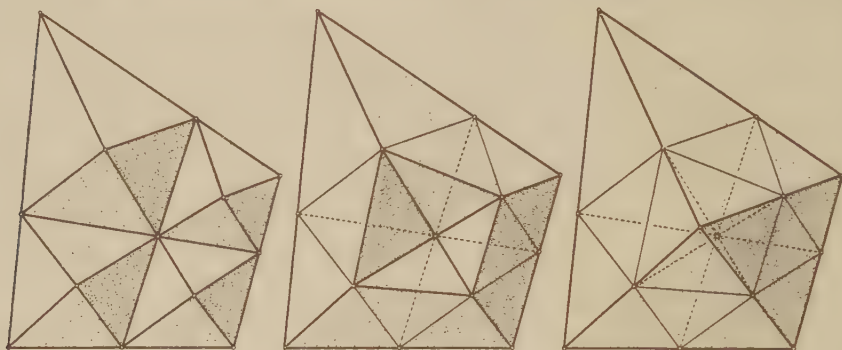


Fig. 10.

anschließend je vier Tetraeder und zuletzt wieder je ein Oktaeder auf. Alle sechs Oktaeder und acht Tetraeder zusammen ergeben die „nächstgrößere“ Oktaederzelle des Gefüges.

23. Zusammenhang der ebenen geradlinigen fastrhombischen Vierecksnetze mit den ebenen geradlinigen „umweglosen“ Vierecksnetzen¹⁵⁾:

Wir stellen der Vierecksbedingung: „Die Streckensummen der beiden Paare gegenüberliegender Seiten sind gleich“ (Fig. 11a: $p_1 + p_2 = q_1 + q_2$) die analoge Vierecksbedingung: „Die Streckensummen von zwei Paaren anliegender Seiten sind gleich“ (Fig. 11b: $p_1 + q_2 = q_1 + p_2$) gegenüber. Die erste Bedingung kennzeichnet Inkreistangentenvierecke¹⁶⁾; aus solchen Vier-

¹⁴⁾ Die Hüllkurve vierter Klasse erster Art, welche die Ebenen umhüllen müssen [siehe Fußnote ¹³⁾], zerfällt hier in eine Kurve zweiter Klasse (= Hüllkurve des vorgegebenen Vierecksnetzes in der Zeichenebene) und in den uneigentlichen Kegelschnitt, der allen 45°-Drehkegeln gemeinsam ist.

¹⁵⁾ Vgl. G. Scheffers, Leipziger Berichte 57 (1905); Jahresberichte der DMV. 16 (1907), ferner R. Rothe, Berichte der Berl. Math. Gesellschaft 5 (1906); 7 (1908); Jahresberichte der DMV. 17 (1908); 18 (1909); 20 (1911), sowie R. v. Lilienthal, Jahresberichte der DMV. 16 (1907).

¹⁶⁾ Der Berührkreis der vier Seitengeraden eines „nicht überschlagenen“, sonst aber beliebigen Kreistangentenvierecks liegt beim Inkreistangentenviereck ganz innerhalb, beim Ankreistangentenviereck ganz außerhalb des Vierecks; jedes derartige Viereck hat jeweils nur einen In- bzw. Ankreis.

ecken bestehen die Einzelmaschen, Vierermaschen usf. eines geradlinigen fastrhombischen Vierecksnetzes. Die zweite Bedingung kennzeichnet Ankreis-



Fig. 11 a.

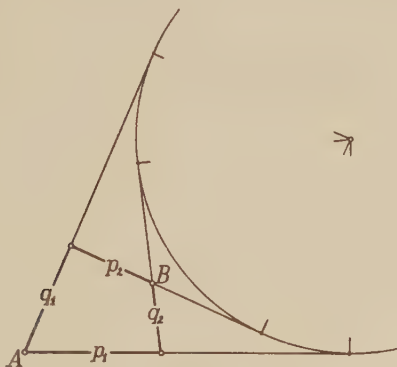


Fig. 11 b.

tangentenvierecke¹⁶⁾; aus solchen Vierecken besteht ein geradliniges sogenanntes umwegloses Vierecksnetz. Unter „umweglos“ wird dabei folgendes verstanden:

Vom Punkt A zum Gegenpunkt B eines umweglosen Vierecks (Fig. 11 b) führen die gleichlangen Wege $p_1 + q_2$ und $q_1 + p_2$. Sind aber alle Maschenvierecke eines Vierecksnetzes in dieser Art umweglos, so kann leicht gezeigt werden, daß dann alle möglichen auf den Netzlinien genommenen (und in vereinbarter Richtung positiv bzw. negativ gezählten) Wege zwischen zwei beliebigen Netzknotenpunkten ebenfalls gleichlang sind, d. h. das ganze Vierecksnetz ist „umweglos“. Fig. 12 stellt eine 25er Masche eines geradlinigen Vierecksnetzes dar; seine Umweglosigkeit bedingt, daß irgend zwei zwischen den beliebigen Gegenpunkten A, B herausgegriffene Zickzackwege (stärker eingezeichnet) gleichlang sind.

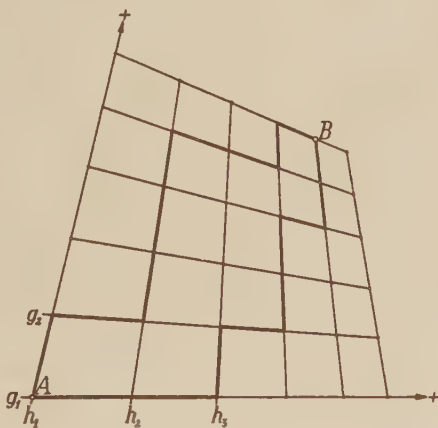


Fig. 12.

Besteht nun das umweglose Vierecksnetz, wie im vorliegenden Fall, aus lauter Geraden, dann müssen alle Einzelvierecke Ankreistangentenvierecke sein, also z. B. die beiden Vierecke mit den Seitengeraden g_1, g_2, h_1, h_2 und g_1, g_2, h_2, h_3 . Aus der Umweglosigkeit dieser beiden Nachbarvierecke

folgt dann weiter, daß ihre zugehörigen Ankreise, welche die Geraden g_1, g_2 und h_2 zugleich berühren, in einen einzigen Kreis zusammenfallen müssen; dieser Kreis ist folglich Ankreis für alle Maschenvierecke des Netzes. Wir haben somit das Ergebnis:

Ein ebenes geradliniges umwegloses Vierecksnetz besteht stets aus Tangenten eines Kreises¹⁷⁾; die Anordnung der Tangenten ist dabei beliebig.

Ein ebenes geradliniges umwegloses Vierecksnetz, das zugleich fast-rhombisch ist, stellt das Netz vom Typ *IV* auf der Figurentafel S. 376 dar.

¹⁷⁾ Allgemeiner läßt sich zeigen: Jedes geodätische umweglose Netz ist in ein Drehnnetz (vgl. Nr. 10) verbiegbar.

(Eingegangen am 9. März 1938).

Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen.

Von

Hel Braun in Göttingen.

1. Wie man weiß, sind die gewöhnlichen Eisensteinschen Reihen in folgender Weise definiert: Es bedeute x eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil und ϱ eine natürliche Zahl > 2 . Man läßt dann das Zahlenpaar a, b alle Paare teilerfremder ganzer Zahlen, für die $a > 0$ ist, und das Paar $0, 1$ durchlaufen und bildet

$$\varphi(x, \varrho) = \sum_{a, b} (ax + b)^{-\varrho}.$$

Bekanntlich sind dann diejenigen Eisensteinschen Reihen $\varphi(x, \varrho)$, für die ϱ möglichst klein und eine gerade Zahl ist, in der Theorie der gewöhnlichen Modulfunktionen von besonderem Interesse.

Nachdem nun Siegel¹⁾ gezeigt hat, welche Bedeutung den von ihm gebildeten verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen in der Theorie der Modulfunktionen höheren Grades und damit in der Theorie der algebraischen Kurven vom Geschlecht $n > 1$ zukommt, ist es auch in diesen Fällen notwendig, den Konvergenzbereich der Eisensteinschen Reihen zu kennen. Es wird deshalb im folgenden festgestellt, wann die verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen absolut konvergieren.

Der Konvergenzbereich der verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen ist für dieselben Fragen von Bedeutung, wie der Konvergenzbereich der gewöhnlichen Eisensteinschen Reihen. Siegel beweist nämlich, daß die verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen, gebildet mit einer n -reihigen, komplexen, symmetrischen, variablen Matrix $\mathfrak{X}$, deren Imaginärteil Matrix einer positiv definiten quadratischen Form ist, zur vollen Modulgruppe gehörige Modulformen n -ten Grades sind; und zwar im Fall eines geraden Exponenten ϱ . Indem er geeignete Potenzprodukte solcher Reihen bildet, gelangt er so zu Modulfunktionen n -ten Grades. Wie Siegel weiter angibt, kann man auf diese Weise ein System von $\frac{n(n+1)}{2}$ algebraisch voneinander unabhängigen Modulfunktionen vom Grad n konstruieren, so daß jede weitere von diesen algebraisch abhängig ist. Im Fall $n = 1$, also im Fall einer kom-

¹⁾ Annals of Mathematics Vol. 36, Nr. 3, 1935: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen.

plexen Variablen x , bildet man mit Hilfe der Reihen g_2 und g_3 die j -Funktion, von der dann alle anderen Modulfunktionen ersten Grades rational abhängig sind. Die Reihen g_2 und g_3 sind dabei bis auf konstante Faktoren unsere Reihen $\varphi(x, 4)$ und $\varphi(x, 6)$. Um nun für einen bestimmten Grad n (> 1) ein zweckmäßiges System solcher unabhängigen Modulfunktionen aufstellen zu können, ist es in erster Linie notwendig, die kleinsten Exponenten ϱ zu kennen, für welche die verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen absolut konvergieren.

Hat man einmal den Konvergenzbereich dieser verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen, so ergibt sich daraus sofort der Konvergenzbereich etwas komplizierter gebildeter Reihen. Solche Reihen treten auf erstens in der analytischen Theorie der quadratischen Formen und zweitens in der Theorie derjenigen Modulformen, die zu einer Untergruppe der vollen Modulgruppe gehören.

2. Zuerst werden die verallgemeinerten Eisensteinschen Reihen definiert. Dazu ist es notwendig, einige Begriffe und Bezeichnungen einzuführen. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien ganze, n -reihige Matrizen, also Matrizen mit lauter ganzen Elementen; $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ seien ihre Transponierten. Man sagt, die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bilden das symmetrische Matrizenpaar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, falls $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ ist. Dieses Matrizenpaar nennt man teilerfremd, wenn nur für ganze Matrizen $\mathfrak{G}$ die Matrizen $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{B}$ beide ganz sind. Zwei n -reihige symmetrische Matrizenpaare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ nennt man assoziiert, wenn $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}'$ ist, andernfalls sagt man, sie seien nicht assoziiert. Ferner soll mit $\mathfrak{X}$ eine komplexe n -reihige symmetrische Matrix bezeichnet werden, deren Imaginärteil positiv ist, was besagt, daß die Imaginärteile der Elemente von $\mathfrak{X}$ die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form bilden. Außerdem soll ϱ nicht nur die Werte der natürlichen Zahlen > 2 , sondern alle positiven reellen Werte annehmen. Läßt man nun das Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ein festes, volles System nicht assoziierter, symmetrischer, teilerfremder Matrizenpaare durchlaufen, dann ist die verallgemeinerte Eisensteinsche Reihe $\varphi(\mathfrak{X}, \varrho)$ erklärt durch

$$\varphi(\mathfrak{X}, \varrho) = \sum_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} |\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}|^{-\varrho}.$$

Dabei wird unter $|\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}|^{-\varrho}$ der Ausdruck $e^{-\varrho \log |\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}|}$ verstanden, wenn der Hauptwert des Logarithmus genommen ist.

Resultat des vorliegenden Aufsatzes wird sein:

Die Reihe $\varphi(\mathfrak{X}, \varrho)$ konvergiert absolut für $\varrho > n + 1$, sie konvergiert jedoch nicht mehr absolut für $\varrho = n + 1$.

Bisher war das nur für gewöhnliche Eisensteinsche Reihen, also für den Fall $n = 1$ bekannt; außerdem hat Siegel bewiesen, daß $\varphi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für $\varrho > n^2 + \frac{n+1}{2}$ absolut konvergiert.

3. In der Folge wird die $- \varrho$ -te Potenz des absoluten Betrages von $|\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}|$ mit $\text{abs}(\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B})^{-\varrho}$ bezeichnet. Diese Bezeichnung wird auch sonst für den absoluten Betrag verwendet. Weil man nach dem Bereich fragt, in dem $\varphi(\mathfrak{X}, \varrho)$ absolut konvergiert, genügt es, die Reihe

$$\psi(\mathfrak{X}, \varrho) = \sum_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} \text{abs}(\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B})^{-\varrho}$$

zu betrachten. Die Anordnung der Summanden ist dabei beliebig, so daß man zunächst alle diejenigen zusammenfassen kann, für die $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ist. Die so entstehende Teilreihe von $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ nenne man $f(\mathfrak{X}, \varrho)$. Zuerst wird gezeigt, daß sich der Konvergenzbereich von $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ aus dem Konvergenzbereich von $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ sofort ergibt.

$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ seien ganze n -reihige Matrizen, die den Relationen

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}\mathfrak{G}', \quad \mathfrak{R}\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}\mathfrak{R}', \quad \mathfrak{G}\mathfrak{L}' - \mathfrak{H}\mathfrak{R}' = \mathfrak{E}$$

genügen, wenn $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix bedeutet. Ist für den Moment $\mathfrak{X}$ irgendeine symmetrische, n -reihige, komplexe Matrix, so nennt man die Substitution

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{G}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{H})(\mathfrak{R}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{L})^{-1}$$

Modulsubstitution n -ten Grades. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Substitution ist, daß eine symmetrische Matrix $\mathfrak{X}$ mit positivem Imaginärteil, wie sie in unserer Reihe $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ auftritt, in eine Matrix $\mathfrak{X}_1$ übergeht, die auch diese Eigenschaften hat. Im folgenden soll eine spezielle solche Modulsubstitution verwendet werden. Man setzt nämlich $\mathfrak{H} = -\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{S}$ irgendeine ganze, symmetrische, n -reihige Matrix bedeutet, und trägt für $\mathfrak{L}$ die Nullmatrix ein. Bei dieser speziellen Substitution gehen die Summanden $\text{abs}(\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B})^{-\varrho}$ unserer Reihe $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ über in

$$\text{abs}(\mathfrak{X}_1)^{\varrho} \text{abs}((\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B})\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{A})^{-\varrho}.$$

Nun betrachte man einen beliebigen Summanden von $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$, für den $|\mathfrak{A}| = 0$ ist. Es wird dann behauptet, daß eine ganze, symmetrische Matrix $\mathfrak{S}$ existiert, deren Elemente Werte der Reihe $0, 1, \dots, n$ haben, und für die $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}| \neq 0$ ist. Um das zu zeigen, faßt man $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}|$ als Polynom in den unabhängigen Elementen $s_1, \dots, s_l$ ($l = \frac{n(n+1)}{2}$) von $\mathfrak{S}$ auf, die man sich erst als Unbestimmte denkt. Einem Siegelschen Hilfssatz²⁾ entnimmt man, daß $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}|$ nicht identisch in den Elementen von $\mathfrak{S}$ verschwinden kann. Weil $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}|$ in allen Variablen $s_1, \dots, s_l$ höchstens vom n -ten Grad ist, kann dieses Polynom jetzt nicht für sämtliche $n+1$ Werte $s_1 = 0, 1, \dots, n$ identisch in $s_2, \dots, s_l$ verschwinden. Angenommen nun, es gäbe für $s_1, \dots, s_j$ ($1 \leq j < l$) ein ganzzahliges Wertsystem $0 \leq s_1, \dots, s_j \leq n$, so daß $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}|$ nicht identisch in $s_{j+1}, \dots, s_l$ verschwindet, so trage man dieses

²⁾ Zitierte Arbeit, S. 597.

Wertsystem für $s_1, \dots, s_j$ ein. Weil $|\mathfrak{A}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}|$ in s_{j+1} höchstens vom n -ten Grad ist, kann das so entstehende Polynom nicht für sämtliche $n+1$ Werte $s_{j+1} = 0, 1, \dots, n$ identisch in $s_{j+2}, \dots, s_l$ verschwinden. Mittels Induktion ergibt sich daraus die Richtigkeit der Behauptung.

Man kann $\frac{n(n+1)^2}{2} = m$ verschiedene, in beliebiger Art geordnete symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_m$ bilden, so daß jedes ihrer Elemente einen Wert der Reihe $0, 1, \dots, n$ hat. Alle diejenigen Glieder der Reihe $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$, für die $|\mathfrak{A}| = 0, |\mathfrak{A}\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{B}| = 0, \dots, |\mathfrak{A}\mathfrak{S}_{k-1} + \mathfrak{B}| = 0, |\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k + \mathfrak{B}| \neq 0$ ($k \leq m$) ist, denke man sich nun zu der Reihe $\psi_k(\mathfrak{X}, \varrho)$ vereinigt. Folglich wird

$$\psi(\mathfrak{X}, \varrho) = f(\mathfrak{X}, \varrho) + \sum_{k=1}^m \psi_k(\mathfrak{X}, \varrho).$$

Andererseits ergibt sich bei Ausführung der Modulsstitution $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_k - \mathfrak{X}_k^{-1}$

$$\psi_k(\mathfrak{X}, \varrho) = \text{abs}(\mathfrak{X}_k)^\varrho \sum_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})} \text{abs}((\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k + \mathfrak{B})\mathfrak{X}_k - \mathfrak{A})^{-\varrho},$$

wobei das Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ das bei der Definition von $\psi_k(\mathfrak{X}, \varrho)$ beschriebene Teilsystem aller nicht-assozierten, symmetrischen, teilerfremden Matrizenpaare durchläuft. Der Imaginärteil der symmetrischen Matrix $\mathfrak{X}_k$ ist dabei positiv, weil eine Modulsstitution gemacht wurde. Mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist auch $\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k + \mathfrak{B}, -\mathfrak{A}$ ein symmetrisches, teilerfremdes Matrizenpaar, und wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ das beschriebene Teilsystem aller nicht-assozierten, symmetrischen, teilerfremden Matrizenpaare durchläuft, durchläuft $\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k + \mathfrak{B}, -\mathfrak{A}$ ein System nicht-assoziierter symmetrischer teilerfremder Matrizenpaare, für welches $|\mathfrak{A}\mathfrak{S}_k + \mathfrak{B}| \neq 0$ ist. Daraus entnimmt man, daß $\psi_k(\mathfrak{X}, \varrho)$ eine Teilreihe von $\text{abs}(\mathfrak{X}_k)^\varrho f(\mathfrak{X}_k, \varrho)$ oder diese Reihe selbst sein muß. Wird nun noch bewiesen, daß $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ für alle $\mathfrak{X}$ mit positivem Imaginärteil konvergiert, wenn $\varrho > n+1$ und divergiert, wenn $\varrho = n+1$ ist, so ergibt sich daraus, weil die Anzahl der $\psi_k(\mathfrak{X}, \varrho)$ endlich ist, daß auch $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ diese Eigenschaft hat.

4. Die Untersuchung von $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ wird vereinfacht, wenn man $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ noch mit der folgendermaßen gebildeten Reihe $\mathbf{Z}(\varrho)$ multipliziert:

Diejenigen Matrizen, die durch linksseitige oder rechtsseitige Multiplikation mit einer unimodularen Matrix auseinander hervorgehen, nennt man links oder rechts assoziiert; anderenfalls sagt man, sie sind links oder rechts nicht-assoziert. Man läßt nun die Matrix $\mathfrak{P}$ alle links nicht-assozierten, n -reihigen, ganzzahligen Matrizen durchlaufen, für die $|\mathfrak{P}| \neq 0$, ist und definiert:

$$\mathbf{Z}(\varrho) = \sum_{\mathfrak{P}} \text{abs}(\mathfrak{P})^{-\varrho}.$$

Um diese Reihe mit $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ multiplizieren zu können, muß man erst ihren Konvergenzbereich bestimmen. Das geschieht nach Eisenstein mittels geeigneter Wahl eines Repräsentantensystems aller links nicht-assozierten

Matrizen $\mathfrak{P}$. Man kann ja durch linksseitige Multiplikation mit einem unimodularen Faktor erreichen, daß $\mathfrak{P}$ eine Dreiecksmatrix wird, was besagen soll, daß die Elemente oberhalb der Hauptdiagonale den Wert 0 haben. Angenommen, diese Dreiecksmatrix habe die Diagonalelemente $d_1, d_2, \dots, d_n$, deren Reihenfolge fest ist. Eine einfache Abzählung zeigt dann, daß es $d_1^{n-1} d_2^{n-2} \dots d_{n-1}$ links nicht-assoziierte Matrizen $\mathfrak{P}$ mit diesen vorgeschriebenen Diagonalelementen gibt. Folglich ist

$$Z(\varrho) = \sum_{d_1, \dots, d_n} d_1^{n-\varrho-1} d_2^{n-\varrho-2} \dots d_n^{-\varrho},$$

wobei $d_1, \dots, d_n$ unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Daraus ersieht man, daß $Z(\varrho)$ für $\varrho > n$ konvergiert. Beweist man noch, daß $f(\mathfrak{X}, \varrho) Z(\varrho) = \Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für $\varrho > n+1$ konvergiert und für $\varrho = n+1$ divergiert, so gilt dasselbe für $f(\mathfrak{X}, \varrho)$. Die Reihe $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ kann man in der Form

$$\Phi(\mathfrak{X}, \varrho) = \sum_{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]} \text{abs}(\mathfrak{A})^{-\varrho} \text{abs}(\mathfrak{X} + \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})^{-\varrho}$$

schreiben. Dabei wird über ein volles System nicht-assoziiierter, symmetrischer, nicht notwendig teilerfremder Matrizenpaare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ summiert, für die $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ist. Beim Beweis ist es von Vorteil, für $\varrho \geq n+1$ die Reihe $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ und nicht $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ zu untersuchen. Der Konvergenzbereich der Reihe $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ ergibt sich nun in zwei Schritten.

5. Zwei ganze Matrizen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sollen kongruent nach dem Modul $\mathfrak{A}$ heißen, falls es eine ganze Matrix $\mathfrak{G}$ gibt, so daß $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{G}$ ist; andernfalls sollen sie inkongruent modulo $\mathfrak{A}$ genannt werden. Die in der Reihe $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für ein festes $\mathfrak{A}$ zulässigen Matrizen $\mathfrak{B}$ kann man nach Restklassen modulo $\mathfrak{A}$ ordnen. Setzt man nämlich $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}\mathfrak{S}$ und läßt einerseits $\mathfrak{B}_0$ alle inkongruenten Reste modulo $\mathfrak{A}$ durchlaufen, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'_0 = \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}'$ ist, und andererseits $\mathfrak{S}$ die Werte aller ganzen, symmetrischen, n -reihigen Matrizen annehmen, dann durchläuft $\mathfrak{B}$ genau alle Matrizen, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ ist. Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung $\mathfrak{W} = \mathfrak{X} + \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}_0$ ein, dann ist $\mathfrak{W}$ wieder symmetrisch mit positivem Imaginärteil, und man kann $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ auch so schreiben:

$$\Phi(\mathfrak{X}, \varrho) = \sum_{\mathfrak{A}} \text{abs}(\mathfrak{A})^{-\varrho} \left\{ \sum_{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{S}} \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})^{-\varrho} \right\}.$$

Dabei wird über $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{S}$ in der beschriebenen Weise summiert; die Matrix $\mathfrak{A}$ durchläuft ein volles System ganzer, links nicht-assoziiierter n -reihiger Matrizen mit von Null verschiedener Determinante.

Jetzt summiert man zuerst über $\mathfrak{S}$. Man hat also die Reihe

$$F(\mathfrak{W}, \varrho) = \sum_{\mathfrak{S}} \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})^{-\varrho}$$

zu untersuchen. Es soll bewiesen werden, daß $F(\mathfrak{W}, \varrho)$ zwischen zwei positiven, von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_0$ unabhängigen Schranken liegt, falls $\varrho \geq n + 1$ ist. Zu diesem Zweck vergleicht man erst $F(\mathfrak{W}, \varrho)$ mit dem Integral

$$J = \int_{\mathfrak{S}} \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})^{-\varrho} d\mathfrak{S}.$$

Dieses Integral ist erstreckt über den gesamten $\frac{n(n+1)}{2}$ -dimensionalen Raum, dessen kartesische Koordinaten die unabhängigen Elemente von $\mathfrak{S}$ sind, die man als reelle Variable auffaßt. Dieser Raum heiße kurz $\mathfrak{S}$ -Raum. Zu dem Vergleich benötigt man die im folgenden Abschnitt vorgenommene Abschätzung.

$\mathfrak{S}_1 = (s_{kl}^{(1)})$ und $\mathfrak{S}_2 = (s_{kl}^{(2)})$ seien zwei, in einem beliebigen Würfel V des $\mathfrak{S}$ -Raumes gelegene Punkte. Die Eckpunkte dieses Würfels sollen ganzzahlige Werte haben und sein Volumen soll 1 sein. Der Realteil von $\mathfrak{W}$ sei mit $\mathfrak{Y}$, der Imaginärteil mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet; dabei ist $\mathfrak{Z}$ auch der Imaginärteil von $\mathfrak{X}$. Zu beweisen ist jetzt die Ungleichung

$$(1) \quad c^{-1} \leq \frac{\text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_2)}{\text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_1)} \leq c,$$

wenn c ein positiver Wert ist, der nicht von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_0$ aber von $\mathfrak{Z}$ abhängt. Deshalb betrachtet man den Ausdruck

$$L = \log \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_2) - \log \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_1)$$

und wendet den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Für eine bestimmte Matrix $\mathfrak{S}_0$, deren Elemente $s_{kl}^{(0)}$ zwischen $s_{kl}^{(1)}$ und $s_{kl}^{(2)}$ liegen, gilt dann:

$$L = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (s_{kl}^{(2)} - s_{kl}^{(1)}) \frac{\partial \log \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})}{\partial s_{kl}} \bigg|_{\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0}.$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} \text{abs}(L) &\leq \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \text{abs} \left(\frac{\partial \log \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})}{\partial s_{kl}} \right) \bigg|_{\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \text{abs} \left(R \left\{ \left| \mathfrak{W} + \mathfrak{S} \right|^{-1} \frac{\partial \left| \mathfrak{W} + \mathfrak{S} \right|}{\partial s_{kl}} \right\} \right) \bigg|_{\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0}, \end{aligned}$$

wenn allgemein $R\{\alpha\}$ den Realteil der komplexen Zahl α bedeutet. Die rechte Seite dieser Ungleichung vergrößert man, falls man an Stelle des Realteils den absoluten Betrag nimmt. Bezeichnet man deshalb die Summe der absoluten Beträge aller Elemente von $(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_0)^{-1}$ mit σ , dann ergibt sich

$$\text{abs}(L) \leq \sigma.$$

Nun zeigt man noch, daß σ kleiner, höchstens gleich dem n -fachen der Spur von $\mathfrak{Z}^{-1}$ ist. Dabei benutzt man, daß $\mathfrak{Z}$ positiv ist und deshalb eine reelle Matrix $\mathfrak{C} = (c_{kl})$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ existieren, so daß

$$\mathfrak{C}' \mathfrak{Z} \mathfrak{C} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{C}'(\mathfrak{Y} + \mathfrak{S}_0) \mathfrak{C} = \mathfrak{D}, \quad (\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_0)^{-1} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D} + i\mathfrak{E})^{-1} \mathfrak{C}'$$

ist. Daraus folgt, weil der absolute Betrag der Diagonalelemente von $\mathfrak{D} + i\mathfrak{E}$ größer oder gleich 1 ist,

$$\sigma \leq \sum_{k,l,r=1}^n \text{abs}(c_{kr}c_{lr}) = \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \text{abs}(c_{kr}) \right\}^2 \leq n \sum_{k,r=1}^n c_{kr}^2 = n Sp(\mathfrak{Z}^{-1}),$$

wenn $Sp(\mathfrak{Z}^{-1})$ die Spur von $\mathfrak{Z}^{-1}$ bedeutet. Damit ist die Ungleichung (1) für $c = e^{n Sp(\mathfrak{Z}^{-1})}$ bewiesen.

Dieses Resultat wendet man jetzt an. Innerhalb von V werde dabei mit $\mathfrak{S}_M$ oder $\mathfrak{S}_m$ derjenige Punkt bezeichnet, für den $\text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S})$ den größten oder kleinsten Wert hat. Nach der Definition des bestimmten Integrals ist

$$s = \sum_V \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_M)^{-\varrho} \leq J \leq \sum_V \text{abs}(\mathfrak{W} + \mathfrak{S}_m)^{-\varrho} = S,$$

wenn die Summation über alle Würfel V des $\mathfrak{S}$ -Raumes erstreckt wird. Ebenso ist

$$s \leq F(\mathfrak{W}, \varrho) \leq S,$$

und außerdem folgt aus der Ungleichung (1)

$$c^{-\varrho} S \leq s.$$

Daraus ergibt sich

$$c^{-\varrho} J \leq F(\mathfrak{W}, \varrho) \leq c^{\varrho} J.$$

Will man also beweisen, daß $F(\mathfrak{W}, \varrho)$ zwischen zwei positiven, von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_0$ unabhängigen Konstanten liegt, dann genügt es zu zeigen, daß J diese Eigenschaft hat. Das kann man, wie sich herausstellen wird, für $\varrho > n$ durch explizite Berechnung von J nachweisen. Die dazu notwendigen Umformungen sind in diesem Gebiet gestattet, weil zum Schluß J als Potenzprodukt von Γ -Integralen erscheint und weil diese Γ -Integrale für $\varrho > n$ die dort reguläre und keine Nullstellen aufweisende Γ -Funktion darstellen. Die Berechnung von J für $\varrho > n$ wird nun durchgeführt.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine feste Matrix, für die $\mathfrak{F}' \mathfrak{Z} \mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ ist. Dann ist $|\mathfrak{F}| \neq 0$. Jetzt führe man in J neue Variable t_{kl} ($k \leq l$), die unabhängigen Elemente der symmetrischen Matrix

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'(\mathfrak{Y} + \mathfrak{S})\mathfrak{F}$$

ein. Man rechnet sich aus, daß die Funktionaldeterminante $|\mathfrak{F}|^{-n-1}$ wird. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\int_{\mathfrak{T}} \text{abs}(\mathfrak{T} + i\mathfrak{E})^{-\varrho} d\mathfrak{T} = J_{\varrho,n},$$

wenn das Integral über den gesamten $\mathfrak{T}$ -Raum erstreckt ist, so ergibt sich

$$J = |\mathfrak{Z}|^{\frac{n+1}{2}-\varrho} J_{\varrho,n}.$$

Deshalb ist J nicht von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_0$ abhängig. Unter Anwendung weiterer Substitutionen und mit Hilfe eines Induktionsschlusses wird jetzt $J_{\varrho,n}$ für

$\varrho > n \geq 2$ berechnet. Mit $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet man dabei die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte aus $\mathfrak{T}$ entstehende Matrix, mit $\mathfrak{E}_1$ die $n - 1$ -reihige Einheitsmatrix. Weiterhin bedeutet t die aus der ersten Spalte von $\mathfrak{T}$ durch Weglassen des Elements t_{11} entstehende Spalte, und es wird gesetzt:

$$a(t, \mathfrak{T}_1) = i - t'(\mathfrak{T}_1 + i\mathfrak{E}_1)^{-1}t,$$

$$A(\mathfrak{T}_1) = \int_{t_{11}, t} \text{abs}(t_{11} + a(t, \mathfrak{T}_1))^{-\varrho} dt d\mathfrak{T}_1,$$

wenn bei der Integration t_{11} und die Elemente der Spalte t von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen. Entwickelt man nun die Determinante $|\mathfrak{T} + i\mathfrak{E}|$ nach den Elementen der ersten Zeile und Spalte, dann erhält man

$$J_{\varrho, n} = \int_{\mathfrak{T}_1} A(\mathfrak{T}_1) \text{abs}(\mathfrak{T}_1 + i\mathfrak{E}_1)^{-\varrho} d\mathfrak{T}_1,$$

wobei das Integral über den gesamten $\mathfrak{T}_1$ -Raum erstreckt wird. Um jetzt $J_{\varrho, n}$ auf $J_{\varrho-1, n-1}$ zurückzuführen, bestimmt man zunächst $\mathfrak{A}(\mathfrak{T}_1)$.

Der Realteil von $a(t, \mathfrak{T}_1)$ sei a_1 , der Imaginärteil sei a_2 . Man macht erst die Substitution $t_{11} = t^* - a_1$, danach die Substitution $\frac{t^*}{a_2} = t$ und erhält:

$$A(\mathfrak{T}_1) = \int_t \text{abs}(a_2)^{1-\varrho} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{abs}(t+i)^{-\varrho} dt \right\} dt.$$

Außerdem ergibt die Rechnung

$$a_2 = 1 + t' \mathfrak{R} t$$

mit $\mathfrak{R} = (\mathfrak{T}_1 + i\mathfrak{E}_1)^{-1}(\mathfrak{T}_1 - i\mathfrak{E}_1)^{-1} = (\mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{E}_1)^{-1}$. Die quadratische Form $t' \mathfrak{R} t$ ist positiv definit, weil die dazu reziproke quadratische Form positiv definit ist. Also gibt es eine reelle Matrix $\mathfrak{Q}$, so daß

$$\mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$$

wird. Macht man nun die Substitution $t = \mathfrak{Q}t^*$, so ist die Funktional-determinante $\text{abs}(\mathfrak{T}_1 + i\mathfrak{E}_1)$ und folglich:

$$A(\mathfrak{T}_1) = \text{abs}(\mathfrak{T}_1 + i\mathfrak{E}_1) \int_{t, t^*} \text{abs}(t+i)^{-\varrho} \text{abs}(1+t't)^{1-\varrho} dt dt^*.$$

Den Wert dieses Integrals erhält man ohne mühsame Rechnung, falls man noch die Definitionsgleichung

$$\Gamma(s) a^{-s} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-ax} dx \quad (s > 0, a > 0)$$

anwendet. Dann ergibt sich nämlich

$$\Gamma(\varrho - 1) \int_t (1 + t't)^{1-\varrho} dt = \int_t \left\{ \int_0^{\infty} x^{\varrho-2} e^{-(1+t't)x} dx \right\} dt.$$

Jetzt vertauscht man die Integrationen über x und t und wendet die Formel für das Gaußsche Fehlerintegral an:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Auf diese Weise erhält man:

$$\int_t (1+t't)^{1-\varrho} dt = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\varrho - \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(\varrho-1)},$$

und ebenso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{abs}(t+i)^{-\varrho} dt = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho}{2}\right)}.$$

Daraus folgt die Rekursionsformel

$$J_{\varrho, n} = J_{\varrho-1, n-1} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\varrho - \frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varrho-1}{2}\right)}{\Gamma(\varrho-1) \Gamma\left(\frac{\varrho}{2}\right)} \quad (n \geq 2).$$

Ebenso zeigt man:

$$J_{\varrho-n+1, 1} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho-n+1}{2}\right)}.$$

Daraus ersieht man, daß $J_{\varrho, n}$ für $\varrho > n$ tatsächlich Potenzprodukt ist von Γ -Funktionen, die in diesem Bereich weder Pole noch Nullstellen aufweisen. Also folgt insbesondere, daß die Reihe $F(\mathfrak{B}, \varrho)$ für $\varrho \geq n+1$ konvergiert und zwischen zwei positiven Schranken liegt, die nur von ϱ und dem Imaginärteil von $\mathfrak{X}$, aber nicht von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_0$ abhängen.

6. Bedeutet jetzt $B(\mathfrak{A})$ die Anzahl der Restklassen $\mathfrak{B}_0$ modulo $\mathfrak{A}$, für die $\mathfrak{B}_0 \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \mathfrak{B}'_0$ ist, so kommt es also nur noch darauf an zu zeigen, daß die Reihe

$$\Psi(\varrho) = \sum_{\mathfrak{A}} B(\mathfrak{A}) \text{abs}(\mathfrak{A})^{-\varrho}$$

konvergiert für $\varrho > n+1$ und divergiert für $\varrho = n+1$. Dabei wird summiert über alle ganzen, links nicht-assoziierten Matrizen $\mathfrak{A}$ mit von Null verschiedener Determinante. Die Forderung $\mathfrak{B}_0 \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \mathfrak{B}'_0$ ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß $\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{S}$ symmetrisch ist.

Um $B(\mathfrak{A})$ zu bestimmen, überlegt man sich zunächst folgendes: Ist $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Elementarteiler $e_1, e_2, \dots, e_n$ ($e_k | e_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$) von $\mathfrak{A}$ sind, so kann man bei der Bestimmung von $B(\mathfrak{A})$ an Stelle von $\mathfrak{A}$ die Matrix $\mathfrak{D}$ als Modul nehmen. Bekanntlich

gibt es ja zwei unimodulare Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{B}$ ist. Also muß $\mathfrak{U} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{B} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{S}$, oder auch $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{B} \mathfrak{B}_0 \mathfrak{U}'^{-1} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{S} \mathfrak{U}'^{-1}$ sein. Nun ist mit $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{S} \mathfrak{U}'^{-1}$ symmetrisch und deshalb, falls man $\mathfrak{B} \mathfrak{B}_0 \mathfrak{U}'^{-1} = \mathfrak{C}$ setzt, $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{C}$ symmetrisch. Ferner entnimmt man der Definition der Restklassen modulo $\mathfrak{A}$, daß allen modulo $\mathfrak{A}$ inkongruenten Matrizen $\mathfrak{B}_0$, für die $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{B}_0$ symmetrisch ist, eineindeutig solche Matrizen $\mathfrak{C}$ zugeordnet sind, die inkongruent modulo $\mathfrak{D}$ sind und für die $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{C}$ symmetrisch ist. Eine einfache Abzählung ergibt jetzt die Anzahl der zulässigen Matrizen $\mathfrak{C}$, und damit

$$B(\mathfrak{A}) = e_1^n e_2^{n-1} \dots e_n.$$

Man beachte, daß an dieser Stelle die Anzahl der Restklassen $\mathfrak{B}_0$ modulo $\mathfrak{A}$, für die $\mathfrak{B}_0 \mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \mathfrak{B}_0'$ und für die $\mathfrak{B}_0$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist, bestimmt werden muß, falls man $f(\mathfrak{X}, \varrho)$ und nicht $\Phi(\mathfrak{X}, \varrho)$ betrachtet. Diese Anzahl ist jedoch weniger leicht auszurechnen als $B(\mathfrak{A})$.

Da jede Matrix links assoziiert ist mit einer Dreiecksmatrix, kann man von vornherein $\mathfrak{A}$ als eine Dreiecksmatrix mit den positiven Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$ annehmen. Nach Definition der Elementarteiler ist jetzt $e_1 \dots e_k$ Teiler von $d_n \dots d_{n-k+1}$ ($k = 1, \dots, n$) und deshalb

$$B(\mathfrak{A}) \leq d_1 d_2^2 \dots d_n^n.$$

Ferner erhält man ein volles System links nicht-assoziierter Dreiecksmatrizen mit den Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$, wenn man die unterhalb der Hauptdiagonalen stehenden Elemente jeder Spalte unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem modulo dem in dieser Spalte stehenden Diagonalelement durchlaufen läßt. Bezeichnet man mit $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion, dann ergibt sich jetzt die Ungleichung

$$\Psi(\varrho) \leq \zeta^n(n - \varrho).$$

Andererseits ist

$$B(\mathfrak{A}) \geq e_1 e_2 \dots e_n = d_1 d_2 \dots d_n$$

und deshalb

$$\zeta(n - \varrho) \leq \sum_{d_1, \dots, d_n=1}^{\infty} d_1^{n-\varrho} d_2^{n-\varrho-1} \dots d_n^{-\varrho+1} \leq \Psi(\varrho).$$

Indem man also $B(\mathfrak{A})$ zwischen zwei geeignete, nur von den Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$ abhängige Schranken einschließt, erhält man das Resultat: $\Psi(\varrho)$ konvergiert für $\varrho > n + 1$ und divergiert für $\varrho = n + 1$.

7. Nachdem nun der Konvergenzbereich der Reihe $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für reelles ϱ bestimmt ist, ergibt sich sofort der Bereich, in dem $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für komplexes $\varrho = \sigma + i\tau$ absolut konvergiert; nämlich die Halbebene $\sigma > n + 1$. Will man nun $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ in Abhängigkeit von der komplexen Variablen ϱ genauer untersuchen, so ist es in erster Linie nötig zu untersuchen, ob die durch

$\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für $\sigma > n + 1$ dargestellte analytische Funktion fortsetzbar ist über die Konvergenzabszisse. Dazu müßte man wohl zuerst den genaueren Zusammenhang zwischen dem Integral J und der Summe $F(\mathfrak{B}, \varrho)$ studieren. Für die bis jetzt in der Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades auftretenden Probleme genügt es jedoch, die Reihe $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ für gerades $\varrho > n + 1$ zu kennen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man zu den Reihen $\psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ auch auf einem anderen, nicht von den Reihen $\varphi(\mathfrak{X}, \varrho)$ ausgehenden Weg gelangt. Man bilde nämlich mit der positiv definiten binären quadratischen Form $Q = \alpha a_2 + 2\beta ab + b^2$ und dem reellen Exponenten $s (> 1)$ die Epstein'sche Zetafunktion

$$\zeta_Q(s) = \sum_{a,b} Q^{-s},$$

summiert über alle Paare ganzer Zahlen a, b , ausgenommen das Paar $0, 0$.

Setzt man jetzt $x = \beta + i\sqrt{\alpha^2 - \beta}$, so wird

$$\zeta_Q(s) = 2 \zeta(2s) \psi(x, 2s).$$

Daraus ersieht man, daß die Funktion $2 \zeta(2s) \psi(\mathfrak{X}, \varrho)$ als eine gewisse Verallgemeinerung der Epstein'schen Zetafunktion einer definiten binären quadratischen Form angesehen werden kann. Es wäre deshalb auch interessant zu untersuchen, ob diese Funktion ebenfalls einer Funktionalgleichung genügt.

(Eingegangen am 9. März 1938.)

Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. II.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen.

Es sei $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine quadratische Form mit m Variabeln und rationalen Koeffizienten, die durch eine reelle lineare Substitution in

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \dots + y_m^2) \quad (1 \leq n \leq m-1)$$

transformiert werden kann. Im ersten Teile dieser Abhandlung ist die zugehörige Zetafunktion für den speziellen Fall $n = 1$ untersucht worden. Zur Behandlung des allgemeinen Falles eines beliebigen n sind weitere Hilfsmittel nötig, die im folgenden besprochen werden sollen.

Zur Definition der Zetafunktion hat man wie im Falle $n = 1$ die Einheitentheorie heranzuziehen. Es sei $\Gamma(\mathfrak{S})$ die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$, also die multiplikative Gruppe der unimodularen Matrizen $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}' \mathfrak{S} \mathfrak{U} = \mathfrak{S}$. Identifiziert man $\mathfrak{U}$ mit $-\mathfrak{U}$, so erhält man eine Faktorgruppe von $\Gamma(\mathfrak{S})$, die als gekürzte Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ bezeichnet werden soll. Im Falle $n = 1$ oder $n = m - 1$ wird durch die Abbildungen $\mathfrak{x} \rightarrow \pm \mathfrak{U} \mathfrak{x}$ eine mit $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ isomorphe diskontinuierliche Gruppe von Kollineationen des $(m - 1)$ -dimensionalen projektiven $\mathfrak{x}$ -Raumes erklärt, deren Fundamentalbereich in diesem Raume ein endliches nicht-euklidisches Volumen besitzt, wenn nicht $m = 2$ und $-|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Ist aber $1 < n < m - 1$, so ist jene Gruppe nicht diskontinuierlich im $\mathfrak{x}$ -Raume. Man betrachte dann an Stelle von $\mathfrak{x}$ reelle Matrizen $\mathfrak{X}$ von m Zeilen und n Spalten. Sieht man zwei solche Matrizen nicht als verschieden an, wenn sie durch rechtsseitige Multiplikation mit einer n -reihigen Matrix ineinander übergeführt werden können, so liefern sie die Punkte eines Raumes R von $n(m - n)$ Dimensionen, der eine Verallgemeinerung des projektiven Raumes ist. Durch die Abbildungen $\mathfrak{X} \rightarrow \pm \mathfrak{U} \mathfrak{X}$ erhält man jetzt eine mit $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ isomorphe Gruppe von gebrochenen linearen Transformationen des Raumes R . Die Reduktionstheorie zeigt, daß diese Gruppe in R diskontinuierlich ist und dort einen Fundamentalbereich besitzt, dessen Volumen in einer gegenüber den Abbildungen invarianten Maßbestimmung eine endliche Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ ist. Diese Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ möge das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S})$ heißen.

Ist $\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = t$ eine Darstellung einer von 0 verschiedenen Zahl t durch $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ eine ganzzahlige Lösung von $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = t$, so gehört zu ihr eine Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S})$, nämlich die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Einheiten von $\mathfrak{S}$

mit dem Fixpunkt α . Auch für $\Gamma(\mathfrak{S}, \alpha)$ läßt sich ein endliches Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{S}, \alpha)$ erklären, wenn nicht $m = 3$ und $-t|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Die genaue Definition der Gruppenmaße $\mu(\mathfrak{S})$ und $\mu(\mathfrak{S}, \alpha)$ findet man in den Paragraphen 2 und 3.

Zwei Darstellungen $\alpha'_1 \mathfrak{S} \alpha_1 = t$ und $\alpha'_2 \mathfrak{S} \alpha_2 = t$ heißen assoziiert, wenn es eine Einheit $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ gibt, so daß $\alpha_2 = \mathfrak{U} \alpha_1$ ist. Unter dem Maß der Darstellungen von t durch $\mathfrak{S}$ versteht man den Ausdruck

$$M(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\alpha' \mathfrak{S} \alpha = t} \mu(\mathfrak{S}, \alpha),$$

in welchem über ein volles System nicht-assoziierter Darstellungen von t durch $\mathfrak{S}$ summiert wird. Wie die Reduktionstheorie lehrt, ist dabei die Anzahl der Summanden stets endlich. Die Zetafunktion von $\mathfrak{S}$ wird nun in der Halbebene $\sigma > \frac{m}{2}$ durch die dort konvergente Dirichletsche Reihe

$$\zeta(\mathfrak{S}, s) = \sum_{t > 0} M(\mathfrak{S}, t) t^{-s}$$

erklärt, in der t alle positiven durch $\mathfrak{S}$ darstellbaren Zahlen durchläuft. Dabei ist der Fall auszuschließen, daß $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine ternäre Nullform mit negativer Determinante ist.

Das Ziel unserer Untersuchung ist der Beweis der Fortsetzbarkeit von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ in die ganze endliche s -Ebene und die Auffindung einer Funktionalgleichung. Wir können uns auf den Fall $m > 2$ beschränken, da der Fall $m = 2$ in allgemeineren Ergebnissen von Hecke enthalten ist. Es stellt sich heraus, daß $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ für alle endlichen s regulär ist bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$ und einen etwaigen Pol erster Ordnung bei $s = 1$. In letzterem Punkte liegt nur dann ein Pol vor, wenn entweder $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform mit negativer Determinante oder eine ternäre Nullform (mit positiver Determinante) oder eine quaternäre Nullform mit quadratischer Determinante ist. Die Gestalt der Funktionalgleichung ist von der Restklasse abhängig, welcher die Differenz $m - n$ nach dem Modul 4 angehört. Setzt man zur Abkürzung

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

und bezeichnet mit S den absoluten Betrag der Determinante $|\mathfrak{S}|$, so lautet nämlich die Funktionalgleichung

$$(1) \quad \varphi(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{m-n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \varphi(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s) \quad (m - n \text{ gerade}),$$

$$(2) \quad \sin(\pi s) \varphi(\mathfrak{S}, s) \\ = (-1)^{\frac{m-n+1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos(\pi s) \varphi(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s) - \varphi(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s) \right\} \\ (m - n \text{ ungerade}).$$

Die Aussage ist für den Fall einer ternären Nullform zu modifizieren; da aber dieser Fall bereits ausführlich im ersten Teil der Abhandlung untersucht worden ist, so soll er weiterhin ausgeschlossen werden.

Der Beweis der Fortsetzbarkeit und der Funktionalgleichung erfolgt vermittle einer Darstellung von $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ durch ein Integral über eine Thetareihe und bildet also eine Übertragung der im definiten Fall üblichen Methode. Die Schwierigkeit liegt aber jetzt vorwiegend in der Gewinnung jener Integraldarstellung. Die Moduln der dabei benötigten Thetareihe hängen von den $n(m-n)$ Koordinaten der Punkte des oben erklärten Raumes R ab, und die Thetareihe wird eine Invariante der Einheitengruppe. Im Laufe der Untersuchung treten die hypergeometrischen Funktionen auf, deren Monodromiegruppe bei der Herleitung der Funktionalgleichung benutzt wird.

Durch die Mellinsche Integraltransformation entsteht aus $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ die analytische Klasseninvariante $f(\mathfrak{S}, x)$. Die Ergebnisse der analytischen Theorie der quadratischen Formen legen die Vermutung nahe, daß $f(\mathfrak{S}, x)$ für gerades $m-n$ eine Modulform ist. Aus der Funktionalgleichung von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ergibt sich nun zunächst das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der Modulsstitution $x \rightarrow -x^{-1}$. Zur Untersuchung von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei einer beliebigen Modulsstitution hat man an Stelle von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ allgemeinere Zetafunktionen mit Charakteren zu betrachten. Die Durchführung der Rechnung liefert die vollständige Transformationstheorie von $f(\mathfrak{S}, x)$ und damit die Bestätigung jener Vermutung. Es läßt sich also das Ergebnis der im ersten Teil genannten Arbeit von B. Schoeneberg, das sich auf die zu nullteilerfreien indefiniten Quaternionenringen gehörigen Thetareihen bezieht, auf beliebige Klasseninvarianten mit geradem $m-n$ übertragen.

Der Begriff der Zetafunktion einer quadratischen Form ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, die ebenfalls durch die Sätze der analytischen Theorie der quadratischen Formen nahegelegt wird und für die Theorie der analytischen Klasseninvarianten von Bedeutung ist. Diese allgemeinen Zetafunktionen stehen zu den oben definierten in analogem Verhältnis, wie die Darstellungen einer symmetrischen r -reihigen Matrix $\mathfrak{I}$ durch $\mathfrak{S}$ zu den Darstellungen einer Zahl t durch $\mathfrak{S}$. Ist z. B. $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ positiv-definit, so wird jene Zetafunktion erklärt durch die Reihe

$$\zeta_r(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\mathfrak{I}} A(\mathfrak{S}, \mathfrak{I}) |\mathfrak{I}|^{-s} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

wobei $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{I})$ die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{I}$ durch $\mathfrak{S}$ bedeutet und $\mathfrak{I}$ ein volles System von darstellbaren Klassen durchläuft. Auch hier kann man sinngemäß indefinite Formen zugrunde legen und noch Restklassencharaktere einfügen. Da unsere Methode ohne Hinzunahme neuer Ideen auch zur Untersuchung dieser allgemeinen Funktionen ausreicht, so soll im Interesse einfacher Ausdrucksweise nur der Fall $r = 1$ für den Hauptcharakter behandelt werden.

Bezüglich der Abkürzungen sei noch folgendes bemerkt. Durch die Gleichung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(a,b)}$ wird angedeutet, daß $\mathfrak{M}$ eine Matrix mit a Zeilen und b Spalten ist; dabei kann für $\mathfrak{M}^{(a,a)}$ auch $\mathfrak{M}^{(a)}$ geschrieben werden. Mit kleinen deutschen Buchstaben werden nur Spalten bezeichnet. Stets ist $\mathfrak{E}$ eine Einheitsmatrix, $\mathfrak{N}$ eine Nullmatrix, $\mathfrak{n}$ eine Nullspalte. Der absolute Betrag der Determinante einer mit einem großen deutschen Buchstaben bezeichneten Matrix wird immer durch den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben ausgedrückt. Läßt sich die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ von m Variablen durch eine reelle lineare Substitution in die Form

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \dots + y_m^2)$$

transformieren, so sagen wir, $\mathfrak{S}$ habe die Signatur $n, m - n$. Im Falle $m = n$ heißt $\mathfrak{S}$ positiv, wofür auch $\mathfrak{S} > 0$ geschrieben werden soll.

§ 1.

Die invariante Thetafunktion.

Es seien $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{(n)}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(r)}$ symmetrisch und umkehrbar. Definiert man mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^{(n,r)}$ die Matrizen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{I} - \mathfrak{Q}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{I}^{-1}\mathfrak{Q},$$

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{I}^{-1}\mathfrak{Q} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{Q}' & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

so wird

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{I} & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}' & \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \mathfrak{U}' \begin{pmatrix} \mathfrak{I} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \mathfrak{U} = \mathfrak{B}' \begin{pmatrix} \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \mathfrak{B}.$$

Also gilt die Determinantengleichung

$$(4) \quad |\mathfrak{I}| |\mathfrak{H}| = |\mathfrak{G}| |\mathfrak{B}|.$$

Hat die symmetrische Matrix $\mathfrak{S}$ die Signatur $n, m - n$, so kann man eine reelle Matrix $\mathfrak{X}^{(m,n)}$ derart wählen, daß $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ positiv ist. Setzt man nun insbesondere

$$r = m, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{S}\mathfrak{X}\mathfrak{I}^{-1}\mathfrak{X}'\mathfrak{S},$$

wobei

$$0 < \lambda < 1$$

ist, so wird

$$\mathfrak{G} = (1 - \lambda^{-1})\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{H} = \lambda\mathfrak{S} - \mathfrak{R}.$$

Da $\mathfrak{I} > 0$ ist, so hat $\mathfrak{G}$ die Signatur $0, n$. Aus (3) folgt, daß $\mathfrak{H}$ die Signatur $0, m$ besitzt, also $-\mathfrak{H}$ positiv ist. Nach (4) ist ferner

$$(5) \quad |\mathfrak{H}| = \lambda^m (1 - \lambda^{-1})^n |\mathfrak{S}|.$$

Um $\mathfrak{H}^{-1}$ zu berechnen, bilde man die Matrix

$$(6) \quad \mathfrak{H}_1 = (1 - \lambda) \mathfrak{S}^{-1} - \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{R} \mathfrak{S}^{-1}$$

Wegen $\mathfrak{R} \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ wird dann

$$\mathfrak{H} \mathfrak{H}_1 = \lambda (1 - \lambda) \mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{R} \mathfrak{S}^{-1} - (1 - \lambda) \mathfrak{R} \mathfrak{S}^{-1} + \mathfrak{R} \mathfrak{S}^{-1} = \lambda (1 - \lambda) \mathfrak{E},$$

$$(7) \quad \mathfrak{H}_1 = \lambda (1 - \lambda) \mathfrak{H}^{-1}.$$

Man erhält also den Ausdruck $\lambda (1 - \lambda) \mathfrak{H}^{-1}$, indem man in der Definition von $\mathfrak{H}$ die Symbole $\lambda, \mathfrak{S}, \mathfrak{X}$ durch $1 - \lambda, \mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{S}\mathfrak{X}$ ersetzt.

Mit der Abkürzung

$$(8) \quad \{\lambda (1 - \lambda)\}^{-\frac{1}{2}} = \gamma$$

bilde man für $u > 0$ die Funktion

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi \gamma u \mathfrak{c}' \mathfrak{H} \mathfrak{c}},$$

wo $\mathfrak{c}$ alle Spalten aus m ganzen Zahlen durchläuft. Ist nun $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{U}$ ganz und $\mathfrak{U}' \mathfrak{S} \mathfrak{U} = \mathfrak{S}$, so wird

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X})' \mathfrak{S} (\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X}), \quad \mathfrak{U}' \mathfrak{R} \mathfrak{U} = \mathfrak{S} (\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X}) \mathfrak{X}^{-1} (\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X})' \mathfrak{S},$$

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{H} \mathfrak{U} = \lambda \mathfrak{S} - \mathfrak{U}' \mathfrak{R} \mathfrak{U}$$

und folglich, da $\mathfrak{U}\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}$ alle ganzen Spalten durchläuft,

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{U}\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}).$$

Unsere Thetafunktion behält also ihren Wert, wenn $\mathfrak{X}$ durch eine beliebige, in bezug auf die Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ assoziierte Matrix $\mathfrak{U}\mathfrak{X}$ ersetzt wird.

Die Transformationsformel

$$\sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi \gamma u \mathfrak{c}' \mathfrak{H} \mathfrak{c}} = |-\gamma u \mathfrak{H}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi (\gamma u)^{-1} \mathfrak{c}' \mathfrak{H}^{-1} \mathfrak{c}}$$

liefert vermöge (5), (6), (7), (8) die Beziehung

$$(9) \quad \vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = S^{-\frac{1}{2}} (\lambda^{-1} - 1)^{\frac{m}{4} - \frac{n}{2}} u^{-\frac{m}{2}} \vartheta(u^{-1}, 1 - \lambda, \mathfrak{S}\mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}).$$

Aus dieser wird sich die Funktionalgleichung der Zetafunktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ergeben, wenn es uns gelungen sein wird, $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ in einfacher Weise unter Benutzung der Thetafunktion auszudrücken. Dazu sind verschiedene Hilfsbetrachtungen notwendig.

§ 2.

Das Gruppenmaß.

Es sei $\mathfrak{S}$ reell. Durch die Gleichung $\mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} = \mathfrak{I}$ wird der m^2 -dimensionale reelle $\mathfrak{X}^{(m)}$ -Raum auf den $\frac{m(m+1)}{2}$ -dimensionalen Raum der symmetrischen

$\mathfrak{I}^{(m)}$ abgebildet. Zunächst sei $\mathfrak{S} > 0$. Es bedeute g ein Gebiet im $\mathfrak{I}$ -Raum, das ein Volumen besitzt, und g_1 das entsprechende Gebiet im $\mathfrak{X}$ -Raum. Bezeichnet man die Volumenelemente in diesen Räumen mit $d\mathfrak{I}$ und $d\mathfrak{X}$, so wird das Verhältnis der Volumina von g_1 und g durch den Quotienten

$$v(g_1):v(g) = \int_{g_1} d\mathfrak{X} : \int_g d\mathfrak{I}$$

gegeben. Läßt man jetzt g auf einen Punkt $\mathfrak{I}_0$ zusammenschrumpfen, so erhält man in dem Grenzwert

$$(10) \quad \lim_{g \rightarrow \mathfrak{I}_0} \int_{g_1} d\mathfrak{X} : \int_g d\mathfrak{I} = \alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{I}_0)$$

eine gewisse Funktion von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{I}_0$. Um diese näher zu bestimmen, setze man $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}'\mathfrak{U}$, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ und mache die linearen Substitutionen $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X}_1\mathfrak{B}$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{B}'\mathfrak{I}_1\mathfrak{B}$. An die Stelle von $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}_0$ tritt dann die Relation $\mathfrak{X}'_1\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{I}_1 \rightarrow \mathfrak{E}$, und aus

$$\int d\mathfrak{X} = A^{-m} B^m \int d\mathfrak{X}_1, \quad \int d\mathfrak{I} = B^{m+1} \int d\mathfrak{I}_1$$

folgt

$$\alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{I}_0) = A^{-m} B^{-1} \alpha(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$$

oder

$$(11) \quad \alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{I}_0) = \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}},$$

wobei

$$\varrho_m = \alpha(\mathfrak{E}^{(m)}, \mathfrak{E}^{(m)})$$

zu setzen ist. Also gilt

$$(12) \quad \int_{g_1} d\mathfrak{X} = \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} \int_g T^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{I}.$$

Nunmehr sei $\mathfrak{S}$ rational und von beliebiger Signatur. Zwei Punkte $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ mögen assoziiert heißen, wenn es eine Einheit $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{U}\mathfrak{X}_1$ gibt. Wie in der Reduktionstheorie bewiesen wird, läßt sich für jedes $\mathfrak{X}$ aus dem System aller mit $\mathfrak{X}$ assoziierten Punkte ein reduzierter Punkt derart auswählen, daß für jedes Gebiet g des $\mathfrak{I}$ -Raumes, welches ein endliches Volumen hat, das ihm vermöge der Gleichung $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{I}$ zugeordnete, aus lauter reduzierten Punkten bestehende $\mathfrak{X}$ -Gebiet g^* wieder ein Volumen besitzt. Dieses Volumen ist ebenfalls endlich, wenn nicht $m = 2$ und $-|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Nach Analogie von (10) und (11) definieren wir jetzt

$$\lim_{g \rightarrow \mathfrak{I}_0} \int_{g^*} d\mathfrak{X} : \int_g d\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S})$$

und nennen die nur von $\mathfrak{S}$ und nicht von $\mathfrak{I}_0$ abhängige Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ das Maß der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$. Offenbar ist $\mu(\mathfrak{S})$ für positives $\mathfrak{S}$ der reziproke Wert der Ordnung von $\Gamma^*(\mathfrak{S})$. Es wird

$$(13) \quad \int_{g^*} d\mathfrak{X} = \frac{1}{2} \varrho_m \mu(\mathfrak{S}) S^{-\frac{m}{2}} \int_g T^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{I}.$$

Der durch g^* gebildete Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S})$ ist m^2 -dimensional. Ist $\mathfrak{S}$ von der Signatur $n, m-n$ und $0 < n < m$, so können wir, wie jetzt gezeigt werden soll, einen Fundamentalbereich in einem geeigneten Raum nur $n(m-n)$ Dimensionen finden. Dieser wird in Analogie zu dem Diskontinuitätsbereich der im Falle $n=1$ auftretenden nicht-euklidischen Bewegungsgruppe definiert werden.

Zuerst soll die Dimension m^2 auf mr verkleinert werden, wobei $n \leq r < m$ ist. Es bedeute $\mathfrak{X}_1$ die aus den ersten r Spalten von $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)$ gebildete Matrix. Man setze

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)' \mathfrak{S} (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & \mathfrak{I}_2 \\ \mathfrak{I}_2' & \mathfrak{I}_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{I}$$

und betrachte nur solche $\mathfrak{X}_1$, für welche $\mathfrak{X}_1' \mathfrak{S} \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{I}_1$ die Signatur $n, r-n$ besitzt. Vermöge der linearen Substitution

$$(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_0) \begin{pmatrix} \mathfrak{G} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}$$

mit festem $\mathfrak{X}_0$ wird

$$\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{F} + \mathfrak{X}_0 \mathfrak{W}$$

$$\int d\mathfrak{X} = \int |(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_0)|^{m-r} d\mathfrak{F} d\mathfrak{W} d\mathfrak{X}_1.$$

Setzt man noch

$$(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_0)' \mathfrak{S} (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_0) = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_1 & \mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{B}_2' & \mathfrak{B}_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{I}_0,$$

so erhält man

$$(14) \quad \mathfrak{I}_1 \mathfrak{F} + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{W} = \mathfrak{I}_2,$$

$$(15) \quad \mathfrak{W}' (\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2' \mathfrak{I}_1^{-1} \mathfrak{B}_2) \mathfrak{W} = \mathfrak{I}_3 - \mathfrak{I}_2' \mathfrak{I}_1^{-1} \mathfrak{I}_2.$$

Zufolge (3) hat die letzte Matrix die Signatur $0, m-r$ und es gilt

$$|(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_0)| = T_0^{\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}}, \quad |\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2' \mathfrak{I}_1^{-1} \mathfrak{B}_2| = T_1^{-1} |\mathfrak{I}_0|,$$

$$|\mathfrak{I}_3 - \mathfrak{I}_2' \mathfrak{I}_1^{-1} \mathfrak{I}_2| = T_1^{-1} |\mathfrak{I}|.$$

Führt man nun durch (14) die Variable $\mathfrak{I}_2$ statt $\mathfrak{F}$ ein und benutzt für die Integration über $\mathfrak{W}$ die Formeln (12), (15), so wird

$$\int_{g^*} d\mathfrak{X} = \int T_0^{\frac{m-r}{2}} S^{\frac{r-m}{2}} T_1^{r-m} \varrho_{m-r} (T_0 T_1^{-1})^{\frac{r-m}{2}} (T T_1^{-1})^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{I}_2 d\mathfrak{I}_3 d\mathfrak{X}_1$$

$$= \varrho_{m-r} S^{\frac{r-m}{2}} \int T_1^{\frac{r-m+1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{I}_2 d\mathfrak{I}_3 d\mathfrak{X}_1.$$

Nach (13) ergibt sich also

$$(16) \quad \frac{1}{2} \varrho_m \mu(\mathfrak{S}) \int_{g_1} d\mathfrak{X}_1 = \varrho_{m-r} S^{\frac{r}{2}} \int_{g_1^*} T_1^{\frac{r-m+1}{2}} d\mathfrak{X}_1;$$

dabei bedeutet g_1 einen beliebigen Bereich im Raume der $\mathfrak{X}_1$ vom Typus $n, r-n$, und g_1^* ist der durch die Gleichung $\mathfrak{X}_1' \mathfrak{S} \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1$ definierte reduzierte $\mathfrak{X}_1$ -Bereich.

Speziell folgt aus (16) für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, $r = 1$ die Rekursionsformel

$$\varrho_m \int_0^1 dt = \varrho_{m-1} \int_{x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1} \dots \int (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1-\frac{m}{2}} dx_1 \dots dx_m = \varrho_{m-1} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \\ (m = 2, 3, \dots)$$

Da nach (12) die Größe ϱ_1 den Wert 1 besitzt, so gilt also

$$(17) \quad \varrho_m = \prod_{k=1}^m \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Das in (16) auftretende Gebiet g_1^* ist mr -dimensional, mit $r \geq n$. Jetzt soll das Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{S})$ durch ein $n(m-n)$ -faches Integral ausgedrückt werden. Es sei $r = n$, also $\mathfrak{X}_1^{(n)} > 0$. Bedeutet nun $\mathfrak{Y}^{(n)}$ die aus den letzten n Zeilen von $\mathfrak{X}_1$ gebildete Matrix, so setze man

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}^{-1} = \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

wobei also die ersten $m-n$ Zeilen von $\mathfrak{Z}$ die Matrix $\mathfrak{P}$ und die letzten n Zeilen von $\mathfrak{Z}$ die Einheitsmatrix bilden. Es ist dann

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}' \mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z} \mathfrak{Y}$$

und man erhält nach (12) die Formel

$$(18) \quad \int_{g_1^*} T_1^{\frac{n-m+1}{2}} d\mathfrak{X}_1 = \int |\mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z}|^{\frac{n-m+1}{2}} Y d\mathfrak{P} d\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} \varrho_n \int |\mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{P} d\mathfrak{X}_1.$$

Zufolge (16) ergibt sich daher endlich

$$(19) \quad \varrho_m \mu(\mathfrak{S}) = \varrho_n \varrho_{m-n} S^{\frac{n}{2}} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{P},$$

und hierbei ist der $n(m-n)$ -dimensionale $\mathfrak{P}$ -Bereich $g(\mathfrak{S})$ folgendermaßen erklärt. Ist

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2 \\ \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4 \end{pmatrix}$$

eine Einheit von $\mathfrak{S}$ und

$$u x_1 = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{e} \end{pmatrix} \mathfrak{y}_1,$$

so wird

$$(u_1 \mathfrak{p} + u_2) \mathfrak{y} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{y}_1, \quad (u_3 \mathfrak{p} + u_4) \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1,$$

also

$$(20) \quad \mathfrak{p}_1 = (u_1 \mathfrak{p} + u_2) (u_3 \mathfrak{p} + u_4)^{-1}$$

Da die beiden Einheiten u und $-u$ dieselbe gebrochene lineare Substitution (20) ergeben, so erhält man durch diese verallgemeinerten projektiven Abbildungen eine treue Darstellung der gekürzten Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ im $n(m-n)$ -dimensionalen $\mathfrak{P}$ -Raume. Das Gebiet $g(\mathfrak{S})$ ist nun erklärt als ein Fundamentalbereich für $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ in dem durch $\mathfrak{z}' \in \mathfrak{z} > 0$ ausgezeichneten Teile des $\mathfrak{P}$ -Raumes

Mit der Abkürzung

$$\sigma_{mn} = \prod_{k=1}^{m-n} \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

erhält man nach (17) und (19) für das Gruppenmaß den gesuchten Ausdruck

$$(21) \quad \mu(\mathfrak{S}) = \sigma_{mn} S^{\frac{n}{2}} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{z}' \in \mathfrak{z}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{P}.$$

Man hätte natürlich auch von dem Volumenelement $S^{\frac{n}{2}} |\mathfrak{z}' \in \mathfrak{z}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{P}$ ausgehen können, um analog wie in § 1 des ersten Teiles das nicht-euklidische Volumen von $g(\mathfrak{S})$ zu definieren. Der jetzt gewählte Ausgangspunkt ist aber für unsere Zwecke geeigneter.

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß der Fall einer rational zerlegbaren binären Form $x' \in x$ im vorhergehenden auszuschließen ist, da dann das Integral in (21) divergiert.

§ 3.

Das Darstellungsmaß.

Weiterhin sei dauernd $\mathfrak{S}$ rational und von der Signatur $n, m-n$. Für irgendein rationales $a \neq n$ betrachte man alle Einheiten u von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt a , für die also $u a = a$ ist. Sie liefern eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, a)$ in der Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$. Für rationales $r \neq 0$ ist offenbar $\Gamma(\mathfrak{S}, r a) = \Gamma(\mathfrak{S}, a)$. Wählt man für r^{-1} den größten gemeinsamen Teiler aller Elemente von a , so ist $r a = a_0$ primitiv.

Zunächst sei $\alpha'_0 \mathfrak{S} \alpha_0 = t_0 \neq 0$. Ergänzt man die Spalte α_0 zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\alpha_0 \mathfrak{B})$ und setzt

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{S} \alpha_0 = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{B} - t_0^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{b}' = \mathfrak{R}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t_0^{-1} \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G},$$

so wird

$$\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{R} + t_0^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{b}' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \mathfrak{G}.$$

Ist nun $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, so ist

$$(22) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{A} \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1}$$

mit ganzen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{B}$ und

$$(23) \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{R} \mathfrak{B} = \mathfrak{R}, \quad t_0 \mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{B}') \mathfrak{b}.$$

Ist umgekehrt (23) mit ganzen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{B}$ erfüllt, so gehört die durch (22) definierte Matrix $\mathfrak{U}$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Folglich ist $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph zu der durch die Kongruenz

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \pmod{t_0}$$

erklärten Untergruppe in der Gruppe aller Einheiten $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{R}$. Offenbar ist der Index dieser Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{R})$ eine endliche Zahl $j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Die Signatur von $\mathfrak{R}$ ist $n - 1$, $m - n$ oder n , $m - n - 1$, je nachdem, ob die Zahl t_0 positiv oder negativ ist. Ferner ist die Determinante $|\mathfrak{R}| = t_0^{-1} |\mathfrak{S}|$. Es existiert also ein endliches Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{R})$, wenn nicht $m = 3$ und $-t_0 |\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Wir definieren jetzt das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ durch den Ausdruck

$$(24) \quad \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \mu(\mathfrak{R}).$$

Dabei ist der eben genannte Fall auszuschließen, daß $m = 3$ und $-\alpha' \mathfrak{S} \alpha |\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Läßt man nun $\mathfrak{a}$ bei festgehaltenem $t \neq 0$ ein volles System nicht-assoziierter ganzer Lösungen von $\alpha' \mathfrak{S} \alpha = t$ durchlaufen, so nennt man die endliche Summe

$$(25) \quad M(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\alpha' \mathfrak{S} \alpha = t} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$$

das Darstellungsmaß von t .

Um das Darstellungsmaß auch für $t = 0$ zu definieren, betrachten wir die primitiven Lösungen $\mathfrak{a}$ von $\alpha' \mathfrak{S} \alpha = 0$, wenn es solche gibt, wenn also $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Man kann dann $\mathfrak{a}$ zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\alpha \mathfrak{B})$ so ergänzen, daß die Matrix $\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

mit positivem p bekommt, und zwar ist p der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}a$. Damit $\mathfrak{U}$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}, a)$ gehört, ist jetzt notwendig und hinreichend, daß

$$(26) \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{A} \begin{pmatrix} 1 & c & c' \\ 0 & 1 & n' \\ n & q & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1}$$

mit ganzen $c, c', q, \mathfrak{B}$ und

$$(27) \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{R} \mathfrak{B} = \mathfrak{R}, \quad p c = (\mathfrak{E} - \mathfrak{B}') b - \mathfrak{B}' \mathfrak{R} q, \quad 2 p c = -q' (2 b + \mathfrak{R} q)$$

gilt. Bedeutet $\mathfrak{z}$ eine Spalte aus $m - 2$ Elementen, so ist also $\Gamma(\mathfrak{S}, a)$ einstufig isomorph mit der durch

$$(28) \quad \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{B} \mathfrak{z} + q, \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{R} \mathfrak{B} = \mathfrak{R},$$

$$(29) \quad (\mathfrak{E} - \mathfrak{B}') b \equiv \mathfrak{B}' \mathfrak{R} q \pmod{p}, \quad q' (2 b + \mathfrak{R} q) \equiv 0 \pmod{p}$$

bei ganzen $q, \mathfrak{B}$ definierten Gruppe von affinen Abbildungen des $\mathfrak{z}$ -Raumes auf sich selbst. Diese Gruppe ist aber von endlichem Index $j(\mathfrak{S}, a)$ in der durch Fortlassung der Kongruenzbedingungen (29) entstehenden Gruppe (28). Letztere Gruppe enthält als Normalteiler die ganzzahlige Translationsgruppe $\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{z} + q$ mit der Faktorgruppe $\Gamma(\mathfrak{R})$. Nun ist $\mathfrak{R}$ von der Signatur $n - 1, m - n - 1$ und $|\mathfrak{R}| = -p^{-2} |\mathfrak{S}|$. Folglich existiert das Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{R})$, wenn nicht $m = 4$ und $|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. In dem auszuschließenden Falle soll $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ kurz eine Quaternionen-Nullform heißen. Wir erklären jetzt das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S}, a)$ durch den Ausdruck

$$(30) \quad \mu(\mathfrak{S}, a) = p^{-1} j(\mathfrak{S}, a) \mu(\mathfrak{R}),$$

wobei also p den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}a$ bedeutet. Läßt man a ein volles System nicht-assoziierter primitiver Lösungen von $a' \mathfrak{S} a = 0$ durchlaufen, so soll die endliche Summe

$$(31) \quad M(\mathfrak{S}, 0) = \sum_{a' \mathfrak{S} a = 0} \mu(\mathfrak{S}, a)$$

das Darstellungsmaß von 0 genannt werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist, aber keine Quaternionen-Nullform.

Zwischen $\mu(\mathfrak{S}, a)$ und $\mu(\mathfrak{S}^{-1}, p^{-1} \mathfrak{S} a)$ besteht ein einfacher Zusammenhang. Es sei $a' \mathfrak{S} a = 0$, a primitiv und $\mathfrak{S} a = p r$ mit primitivem r . Dann ist offenbar $r' \mathfrak{S}^{-1} r = 0$, $\mathfrak{S}^{-1} r = p^{-1} a$. Ist ferner $\mathfrak{U}$ ein Element von $\Gamma(\mathfrak{S}, a)$, so gehört $\mathfrak{U}'$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, r)$, und umgekehrt. An die Stelle der oben betrachteten Gruppe $\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{B} \mathfrak{z} + q$ tritt bei $\mathfrak{S}^{-1}$ die Gruppe $\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{B}' \mathfrak{z} + c$, wobei wieder die Bedingungen (27) erfüllt sein müssen. Aus der Gleichung

$$p c = (\mathfrak{E} - \mathfrak{B}') b - \mathfrak{B}' \mathfrak{R} q$$

folgt nun

$$p^{m-2} j(\mathfrak{S}^{-1}, r) = K j(\mathfrak{S}, a).$$

Andererseits erhalten wir aus (13) die Formel $\mu(\mathfrak{R}^{-1}) = \mu(\mathfrak{R})$. Da $K = p^{-2}S$ ist und der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ den Wert p^{-1} hat, so wird

$$(32) \quad \begin{aligned} \mu(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}) &= p^j(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}) \mu(\mathfrak{R}^{-1}) = p^{1-m} S^j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \mu(\mathfrak{R}), \\ S\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) &= p^{m-2} \mu(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}). \end{aligned}$$

§ 4.

Die Zetafunktion.

Es sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine indefinite quadratische Form mit der Signatur $n, m-n$ und s eine komplexe Variable, deren Realteil $\sigma > \frac{m}{2}$ ist. Die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Zetafunktion definieren wir durch die Dirichletsche Reihe

$$(33) \quad \zeta(\mathfrak{S}, s) = \sum_{t > 0} M(\mathfrak{S}, t) t^{-s},$$

in der t alle durch $\mathfrak{S}$ ganzzahlig darstellbaren positiven Zahlen durchläuft und $M(\mathfrak{S}, t)$ das im vorigen Paragraphen erklärte Darstellungsmaß bedeutet. Die Konvergenz der Reihe entnimmt man der Reduktionstheorie. Auszuschließen ist hierbei der Fall einer ternären Nullform mit der Signatur 2, 1, da dann die $M(\mathfrak{S}, t)$ nicht sämtlich endliche Werte haben.

Im ersten Teil wurden unter der Annahme $n = 1$ die Funktionen $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_2(\mathfrak{S}, s) = \zeta(-\mathfrak{S}, s)$ studiert. Für die Untersuchung von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei beliebigem n wollen wir im folgenden voraussetzen, daß $m \geq 3$ und $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist. Der Fall $m = 2$ ist bereits in allgemeineren Resultaten von Hecke enthalten, und der Fall der ternären Nullform wurde im ersten Teil eingehend behandelt.

Die weiterhin zu beweisenden Sätze über $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ lauten dann folgendermaßen.

Satz 1. Die Funktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ist in der ganzen endlichen s -Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$ mit dem Residuum

$$\varrho(\mathfrak{S}) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S})$$

und einen etwaigen Pol erster Ordnung bei $s = 1$.

Satz 2. Für

$$(34) \quad \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

gilt die Funktionalgleichung

$$(35) \quad \begin{aligned} \sin(\pi s) \varphi(-\mathfrak{S}, s) \\ = S^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sin\left(\pi s - \frac{\pi n}{2}\right) \varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) + \sin \frac{\pi n}{2} \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus entstehen die Formeln (1) und (2) der Einleitung durch Spezialisierung

Satz 3. Die Funktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ hat bei $s = 1$ nur dann einen Pol, wenn entweder $m - n$ ungerade und $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform oder aber $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Quaternionen-Nullform ist. Im ersteren Falle hat das Residuum bei $s = 1$ den Wert

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} (2\pi)^{2-m} \Gamma(m-2) \zeta(m-2) M(\mathfrak{S}, 0).$$

Für den Fall einer Quaternionen-Nullform ist in Satz 3 keine Aussage über den Wert des Residuums von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ enthalten. Dieses Residuum läßt sich in folgender Weise berechnen. Man transformiere die Quaternionen-Nullform $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ durch eine lineare rationalzahlige Substitution $\mathfrak{x} = \Re \mathfrak{y}$ in die spezielle Nullform $2(y_1 y_4 - y_2 y_3)$ mit der Matrix $\mathfrak{S}_0$ und setze

$$\begin{pmatrix} y_4 & y_2 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Y}.$$

Es bedeute jetzt q eine natürliche Zahl > 2 , die durch das Produkt der Hauptnenner der Elemente von $\Re$ und $\Re^{-1}$ teilbar ist. Durch die Substitutionen

$$(36) \quad \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{U} \mathfrak{Y} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{U} \equiv \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$$

mit unimodularen zweireihigen Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ wird eine Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S}_0)$ geliefert. Ist $\mathfrak{U}_0$ die durch (36) festgelegte Einheit von $\mathfrak{S}_0$, so ist $\mathfrak{U}_0 \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ und folglich $\Re \mathfrak{U}_0 \Re^{-1} = \mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Die in dieser Art erzeugten Einheiten von $\mathfrak{S}$ bilden eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ von endlichem Index j in der Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$. Man lasse nun $\mathfrak{a}$ ein volles System solcher primitiver Lösungen von $\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = 0$ durchlaufen, die in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ nicht-assoziiert sind, und verstehe unter $\delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\Re^{-1} \mathfrak{a}$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

Satz 4. Die Zetafunktion einer Quaternionen-Nullform hat bei $s = 1$ das Residuum

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = -\frac{q^2}{12j} \sum_{\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = 0} \{\delta(\mathfrak{a})\}^{-2}.$$

Der Ansatz zum Beweis unserer vier Sätze wird durch eine Integralformel geliefert, welche die Zetafunktion mit der in § 1 erklärten Thetafunktion verknüpft.

§ 5.

Integraldarstellung der Zetafunktion.

Es sei $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m, n)}$ variabel und $\mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} = \mathfrak{T} > 0$. Wie in § 2 setze man

$$\mathfrak{x} \mathfrak{Y}^{-1} = \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

wobei also $\mathfrak{Y}$ die aus den letzten n Zeilen von $\mathfrak{X}$ gebildete Matrix bedeutet. Es sei $g(\mathfrak{S})$ der in § 2 erklärte Fundamentalbereich für $\Gamma^*(\mathfrak{S})$, der im Teile $\mathfrak{Z}' \subseteq \mathfrak{Z} > 0$ des $\mathfrak{P}$ -Raumes gelegen ist. Wie in § 1 sei ferner

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S} \mathfrak{X} \mathfrak{X}' \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{H} = \lambda \mathfrak{S} - \mathfrak{K}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Ist nun α ganz, so lassen wir α_1 alle mit α in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ assoziierten Spalten durchlaufen und bilden für $u > 0$ die Reihe

$$(37) \quad \psi(\alpha, u) = \sum_{\alpha_1} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}' \subseteq \mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} e^{u \alpha_1' \mathfrak{H} \alpha_1} d\mathfrak{P}.$$

Nach (21) ist insbesondere

$$(38) \quad \psi(n, u) = \sigma_m^{-1} n \mathfrak{S}^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}).$$

Weiterhin sei in diesem Paragraphen $\alpha \neq n$. Es sei g ein Gebiet im positiven $\mathfrak{X}$ -Raume und g^* das durch $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ definierte in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ reduzierte $\mathfrak{X}$ Gebiet. Da $\mathfrak{H}$ nicht von $\mathfrak{Y}$ abhängt, so ergibt (18) die Formel

$$(39) \quad \int_g \psi(\alpha, u) d\mathfrak{X} = 2 \varrho_n^{-1} \sum_{\alpha_1} \int_{g^*} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u \alpha_1' \mathfrak{H} \alpha_1} d\mathfrak{X} = 2 \varrho_n^{-1} \int_{g^*(\alpha)} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u \alpha' \mathfrak{H} \alpha} d\mathfrak{X},$$

wobei das Gebiet $g^*(\alpha)$ aus g^* dadurch hervorgeht, daß $\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X}$ ersetzt wird und $\mathfrak{U}$ ein volles System von Repräsentanten linksseitiger Nebengruppen zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \alpha)$ in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ durchläuft. Es ist demnach $g^*(\alpha)$ ein durch die Gleichung $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ dem $\mathfrak{X}$ -Gebiete g zugeordnetes, in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \alpha)$ reduziertes $\mathfrak{X}$ -Gebiet.

Fortan sei in diesem Paragraphen auch noch die Zahl $\alpha' \subseteq \alpha = t \neq 0$. Wie in § 3 sei $\alpha \mathfrak{a} = \alpha_0$ primitiv, $\alpha'_0 \subseteq \alpha_0 = t_0$, $\mathfrak{A} = (\alpha_0 \mathfrak{B})$ unimodular, $\mathfrak{B}' \subseteq \alpha_0 = \mathfrak{b}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0^{-1} \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{A} \end{pmatrix} \mathfrak{G}.$$

Man setze noch

$$\mathfrak{G} \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}'_1 \\ \mathfrak{x}_2 \end{pmatrix},$$

wobei also $\mathfrak{x}'_1 = t_0^{-1} \alpha'_0 \subseteq \mathfrak{X}$ die erste Zeile von $\mathfrak{X}_1$ bedeutet. Mit

$$\alpha = 1 - t_0 \mathfrak{x}'_1 \mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{x}_1$$

wird

$$\alpha' \mathfrak{H} \alpha = \lambda t - t t_0 \mathfrak{x}'_1 \mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{x}_1 = t(\lambda - 1 + \alpha).$$

Bedeutet $\mathfrak{U}$ eine zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \alpha)$ gehörige Einheit von $\mathfrak{S}$, so bleibt bei der Abbildung $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U} \mathfrak{X}$ die Spalte $\mathfrak{x}_1$ fest, während $\mathfrak{x}_2$ in $\mathfrak{B} \mathfrak{x}_2$ übergeht, mit der in (23) erklärten Bedeutung von $\mathfrak{B}$.

Für die Matrix

$$(40) \quad \mathfrak{X}'_2 \mathfrak{R} \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{I}_1$$

gilt nun

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I} - t_0 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}'_1.$$

Wendet man (3) an mit $\Omega = \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{B} = t_0^{-1}$ und berücksichtigt, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{I} & \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}'_1 & t_0^{-1} \end{pmatrix} = (\mathfrak{X}, t^{-1} \mathfrak{a})' \mathfrak{S} (\mathfrak{X}, t^{-1} \mathfrak{a})$$

die Signatur $n, 1$ haben muß, so folgt, daß $t_0^{-1} \alpha < 0$ ist; ferner ist bei $\mathfrak{I}_1$ die Signatur $n-1, 1$ oder $n, 0$, je nachdem, ob t_0 positiv oder negativ ist. Entsprechend ist die Signatur von $\mathfrak{R}$ entweder $n-1, m-n$ oder $n, m-n-1$.

Setzt man $\varepsilon = 1$ für $t > 0$, $\varepsilon = -1$ für $t < 0$, so wird

$$|\mathfrak{I}_1| = (1 - t_0 \mathfrak{x}'_1 \mathfrak{I}^{-1} \mathfrak{x}_1) |\mathfrak{I}| = \alpha |\mathfrak{I}|$$

$$\int T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a}} d\mathfrak{X} = \int (\varepsilon \alpha^{-1} T_1)^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u t (\lambda - 1 + \alpha)} d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{X}_2,$$

und zufolge (16), (24), (40) erhält man

$$\begin{aligned} 2 \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a}} d\mathfrak{X} &= \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{m-n-1}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) K^{-\frac{n}{2}} \int (\varepsilon \alpha)^{\frac{m-n}{2}-1} T^{-\frac{1}{2}} e^{u t (\lambda - 1 + \alpha)} d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{I}_1 \\ &= \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{m-n-1}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) (\varepsilon t_0 S^{-1})^{\frac{n}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &\quad \int_{r>0, t_0^1} \{\varepsilon(1-t_0 r)\}^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} e^{u t (\lambda - t_0 r)} dr \int_{\mathfrak{U}} d\mathfrak{I}. \end{aligned}$$

Nach (39) ist also

$$\psi(\mathfrak{a}, u) = \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \int_{r>0, \varepsilon} (r - \varepsilon)^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} e^{-u \varepsilon t (r - \varepsilon \lambda)} dr.$$

In dieser Gleichung ersetze man u durch $\pi \gamma u$, wobei γ die durch (8) gegebene Bedeutung hat, multipliziere mit u^{s-1} und integriere über alle positiven u . Mit Hilfe von (37) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (41) \quad \sum_{\mathfrak{a}_1} \int_0^\infty u^{s-1} \left(\int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} e^{\pi \gamma u \mathfrak{a}'_1 \mathfrak{S} \mathfrak{a}_1} d\mathfrak{B} \right) du \\ = \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \Gamma(s) (\pi \gamma \varepsilon t)^{-s} \omega(\varepsilon) \end{aligned}$$

mit

$$\omega(\varepsilon) = \int_{r>0, \varepsilon} (r - \varepsilon)^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} (r - \varepsilon \lambda)^{-s} dr.$$

Die Größe $\omega(\varepsilon)$ hängt in einfacher Weise mit den hypergeometrischen Funktionen zusammen. Setzt man

$$(42) \quad \int_0^1 y^a (1-y)^b (1+xy)^c dy = f(a, b, c, x)$$

für positives x , wobei die reellen Teile von a und b größer als -1 seien, so wird

$$\begin{aligned} \omega(1) &= \int_1^\infty (r-1)^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} (r-\lambda)^{-s} dr \\ &= (1-\lambda)^{\frac{m}{2}-1-s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(-1) &= \int_0^\infty (r+1)^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} (r+\lambda)^{-s} dr \\ &= \lambda^{\frac{m}{2}-1-s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{1-\lambda}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Man schreibe nun noch zur Abkürzung

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda}{1-\lambda} &= x, \\ \left\{ \begin{aligned} f\left(s - \frac{m}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, x\right) &= f_1(s, x) = f_1, \\ x^{\frac{m}{2}-1-s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, x^{-1}\right) &= f_2(s, x) = f_2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

und summiere (41) über ein volles System nicht-assoziierter ganzer α mit $\alpha' \in \alpha \neq 0$. Nach (25), (33), (34) erhält man so die Integraldarstellung

$$(44) \quad \frac{2_{m-1}}{2_{n-1} 2_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{1-\frac{m}{2}} x^{\frac{s}{2}} \{f_1(s, x) \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x) \varphi(-\mathfrak{S}, s)\} \\ = \int_{g(\mathfrak{S})} |3' \mathfrak{S} 3|^{-\frac{m}{2}} \left(\int_0^\infty u^{s-1} \sum_{\alpha' \in \alpha \neq 0} e^{\pi \gamma u \alpha' \mathfrak{H} \alpha} du \right) d\mathfrak{P},$$

gültig in der Halbebene $\sigma > \frac{m}{2}$.

§ 6.

Analytische Fortsetzung.

In üblicher Weise zerlege man das in (44) auftretende u -Intervall in die beiden Teile $0 \leq u \leq 1$, $1 \leq u$ und führe bei dem ersten von diesen die Thetareihe $\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ aus § 1 ein. Setzt man

$$\vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha' \in \alpha = 0} e^{\pi \gamma u \alpha' \mathfrak{H} \alpha}, \quad \vartheta_1(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\alpha' \in \alpha \neq 0} e^{\pi \gamma u \alpha' \mathfrak{H} \alpha},$$

wobei unter den angegebenen Bedingungen über die ganzen $\mathfrak{a}$ summiert wird, so ist $\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$. Nach der Transformationsformel (9) gilt nun

$$\begin{aligned} \int u^{s-1} \vartheta_1(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) du \\ &= (\lambda^{-1} - 1)^{\frac{m}{4} - \frac{n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2} - s - 1} \vartheta(u, 1 - \lambda, \mathfrak{S} \mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}) du \\ &\quad - \int_0^1 u^{s-1} \vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) du \\ &= x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2} - s - 1} \vartheta_1(u, 1 - \lambda, \mathfrak{S} \mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}) du \\ &\quad + x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2} - s - 1} \vartheta_0(u, 1 - \lambda, \mathfrak{S} \mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}) du \\ &\quad - \int_0^1 u^{s-1} \vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) du. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$(45) \quad \int_{g(\mathfrak{S})} |3' \mathfrak{S} 3|^{-\frac{m}{2}} \left\{ x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2} - s - 1} \vartheta_0(u, 1 - \lambda, \mathfrak{S} \mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}) du \right. \\ \left. - \int_0^1 u^{s-1} \vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) du \right\} d\mathfrak{P} = \Delta$$

geht dann (44) über in

$$(46) \quad \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{1-\frac{m}{2}} x^{\frac{s}{2}} \{f_1 \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2 \varphi(-\mathfrak{S}, s)\} - \Delta \\ = \int_{g(\mathfrak{S})} |3' \mathfrak{S} 3|^{-\frac{m}{2}} \left\{ \int_1^\infty u^{s-1} \vartheta_1(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) du \right\} d\mathfrak{P} \\ + x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} S^{-n - \frac{1}{2}} \int_{g(\mathfrak{S}^{-1})} |3' \mathfrak{S}^{-1} 3|^{-\frac{m}{2}} \left\{ \int_1^\infty u^{\frac{m}{2} - s - 1} \vartheta_1(u, 1 - \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}) du \right\} d\mathfrak{P}$$

In dieser Relation ist die rechte Seite eine ganze Funktion von s . Zwecks Feststellung der Fortsetzbarkeit der Zetafunktion hat man jetzt den Ausdruck Δ näher zu untersuchen. Dabei werde vorläufig vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine Quaternionen-Nullform sei. Für diesen Ausnahmefall selbst, der im letzten Paragraphen behandelt werden soll, ist die Untersuchung von Δ auf besondere Art zu führen.

Nach (21), (37) und (38) ist

$$(47) \quad \int_{g(\mathfrak{S})} |3' \mathfrak{S} 3|^{-\frac{m}{2}} \vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) d\mathfrak{P} = \sigma_{m,n}^{-1} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}) + \sum_{\mathfrak{a}}' \psi(\mathfrak{a}, \pi \gamma u).$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziiierter ganzer Lösungen $\neq \mathfrak{n}$ von $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a} = 0$ durchläuft. Andererseits gilt nach (39) die Formel

$$(48) \quad \int_g \psi(\mathfrak{a}, u) d\mathfrak{T} = 2 \varrho_n^{-1} \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u \mathfrak{a}' \mathfrak{H} \mathfrak{a}} d\mathfrak{X}.$$

Es sei $\mathfrak{a} = l\mathfrak{a}_0$ mit primitivem $\mathfrak{a}_0$. Wie in § 3 wähle man ein unimodulares $\mathfrak{U} = (\mathfrak{a}_0 \mathfrak{B})$, so daß

$$\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

wird, mit positivem p , das der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\subseteq \mathfrak{a}_0$ ist. Setzt man

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{2p} & p^{-1}\mathfrak{b}' \\ 0 & 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G} \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1' \\ \mathfrak{x}_2' \\ \mathfrak{x}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} \mathfrak{F} & \mathfrak{R} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R} \end{pmatrix} \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{a}_0' \subseteq \mathfrak{X} = p \mathfrak{x}_2', \quad \mathfrak{a}' \mathfrak{H} \mathfrak{a} = -(lp)^2 \mathfrak{x}_2' \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{x}_2.$$

Die Matrix

$$(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{X})' \subseteq (\mathfrak{a}_0 \mathfrak{X}) = \begin{pmatrix} 0 & p \mathfrak{x}_2' \\ p \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}^{(2)} & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}' & \mathfrak{T}_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

besitzt die Signatur $n, 1$, da nach Voraussetzung $\mathfrak{T} > 0$ ist. Da $\mathfrak{R}$ die Signatur $1, 1$ hat, so wird nach (3) die Matrix

$$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{Q}' \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{Q} = \mathfrak{T}_2$$

positiv. Ferner ist

$$|\mathfrak{R}| |\mathfrak{T}_2| = -p^2 \mathfrak{x}_2' \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{x}_2 |\mathfrak{T}|.$$

Bedeutet nun ξ das erste Element von $\mathfrak{x}_2$, so wird $|\mathfrak{R}| = -(p\xi)^2$ und folglich

$$(49) \quad \mathfrak{T}_2 = \xi^{-2} \mathfrak{T} \mathfrak{x}_2' \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{x}_2.$$

Endlich sei noch $\xi \mathfrak{v}$ die erste Spalte von $\mathfrak{X}_3$ und

$$\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{v} \mathfrak{x}_2' = (\mathfrak{n} \mathfrak{B}).$$

Dann gilt

$$(50) \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{R} \mathfrak{B} = \mathfrak{T}_2.$$

Jede zu $\Gamma(\subseteq, \mathfrak{a})$ gehörige Einheit $\mathfrak{U}$ hat die in (26) angegebene Gestalt. Bei der Abbildung $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{U} \mathfrak{X}$ bleibt dann $\mathfrak{x}_2$ fest, während $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{W} \mathfrak{v} + \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{W} \mathfrak{B}$ übergehen, mit der in (27) festgelegten Bedeutung von $\mathfrak{q}, \mathfrak{W}$.

In (48) führe man jetzt statt $\mathfrak{X}$ zuerst die Integrationsvariablen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ ein und dann statt $\mathfrak{x}_1$ die erste Spalte t von $\mathfrak{L}$, statt $\mathfrak{x}_3$ die Variablen $\mathfrak{v}, \mathfrak{B}$. Bedeutet x_1 das erste Element von $\mathfrak{x}_1$, so wird $t = p(\xi x_1 + x_1 x_2) + \dots$, und demnach hat die Funktionaldeterminante unserer Transformation den Wert $\frac{1}{2}(p\xi)^{-n}\xi^{m-2}$. Nach § 3 erhält man wegen (16), (30), (49), (50) die Formel

$$\begin{aligned} & 2 \int_{g^*(\alpha)} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\alpha' \mathfrak{B} \alpha} d\mathfrak{X} \\ &= \frac{\varrho_{m-2}}{2 \varrho_{m-n-1}} p^{1-n} \mu(\mathfrak{S}, \alpha_0) K^{-\frac{n-1}{2}} \int \xi^{m-n-2} T_2^{\frac{m-n}{2}-1} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\alpha' \mathfrak{B} \alpha} dt d\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{v} \\ &= \frac{\varrho_{m-2}}{2 \varrho_{m-n-1}} S^{\frac{1-n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \alpha_0) \int_g T^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int (\mathfrak{x}'_2 \mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{x}_2)^{\frac{m-n}{2}-1} e^{-(lp)^2 u \mathfrak{x}'_2 \mathfrak{X}^{-1} \mathfrak{x}_2} d\mathfrak{x}_2 \right\} d\mathfrak{X} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \varrho_{m-2}}{2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \varrho_{m-n-1}} S^{\frac{1-n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \alpha_0) \int_0^\infty r^{\frac{m}{2}-2} e^{-(lp)^2 u r} dr \int_g d\mathfrak{X}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (48) und (32) ergibt sich also

$$\psi(\alpha, u) = \frac{1}{2} \frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right) S^{-\frac{n+1}{2}} \mu(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{x}_0) (u l^2)^{1-\frac{m}{2}},$$

wobei $\mathfrak{x}_0 = p^{-1} \mathfrak{S} \alpha_0$ ist. Summiert man noch über ein volles System nicht-assoziierter primitiver α_0 mit $\alpha'_0 \mathfrak{S} \alpha_0 = 0$ und über alle ganzen $l > 0$, so wird nach (31)

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \psi(\alpha, \pi \gamma u) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} \pi^{1-\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right) \zeta(m-2) S^{-\frac{n+1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0) (\gamma u)^{1-\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

Vermöge (45) und (47) erhalten wir den expliziten Ausdruck

$$\begin{aligned} (51) \quad \Delta &= \frac{\varrho_m}{\varrho_n \varrho_{m-n}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}) \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}}}{s - \frac{m}{2}} - \frac{1}{s} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1} \varrho_{m-n-1}} \pi^{1-\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right) \zeta(m-2) S^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{1-\frac{m}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{M(\mathfrak{S}, 0)}{s-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{4}-\frac{n}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0)}{s - \frac{m}{2} + 1} \right) \end{aligned}$$

und damit ist auf Grund von (46) die Funktion $f_1 \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2 \varphi(-\mathfrak{S}, s)$ in die ganze s -Ebene fortgesetzt. Sie ist überall regulär bis auf zwei Pole

erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$, $s = 0$ und zwei etwaige Pole erster Ordnung bei $s = 1$, $s = \frac{m}{2} - 1$. Die letzteren treten nur dann auf, wenn $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Um nun zu Aussagen über $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ selbst zu gelangen, hat man die Abhängigkeit der Koeffizienten f_1 und f_2 von x zu benutzen.

§ 7.

Die Funktionalgleichung.

Wir multiplizieren (46) mit $x^{\frac{m}{4} - \frac{n}{2}} S^{n + \frac{1}{2}}$ und ersetzen in der entstehenden Formel die Symbole $\lambda, x, \mathfrak{S}, s$ durch $1 - \lambda, x^{-1}, \mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s$. Es ergibt sich dann rechts wieder genau die rechte Seite von (46). Da das Entsprechende für das durch (51) ausgedrückte Δ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} (52) \quad & f_1(s, x) \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x) \varphi(-\mathfrak{S}, s) \\ &= S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2} - 1} \left\{ f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \right. \\ & \quad \left. + f_2\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \right\}. \end{aligned}$$

Um hieraus die Funktionalgleichung in der Form (35) zu gewinnen, hat man die hypergeometrischen Funktionen f_1 und f_2 zu eliminieren. Benutzt man aus der Theorie dieser Funktionen die Beziehungen

$$\begin{aligned} x^{\frac{n}{2} - 1} \sin(\pi s) f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) &= \sin\left(\pi s - \pi \frac{m-n}{2}\right) f_1(s, x) + \sin \frac{\pi n}{2} f_2(s, x), \\ x^{\frac{n}{2} - 1} \sin(\pi s) f_2\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) &= \sin \frac{\pi(m-n)}{2} f_1(s, x) + \sin\left(\pi s - \frac{\pi n}{2}\right) f_2(s, x) \end{aligned}$$

und die lineare Unabhängigkeit von $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$, so erhält man (35).

Ohne explizite Benutzung der Theorie der hypergeometrischen Funktionen kann man auch folgendermaßen schließen. Es sei x beliebig komplex, aber $\neq 0, -1, \infty$. Bedeutet C eine von $+1$ nach $+1$ gehende einfach geschlossene Kurve, die den Nullpunkt der y -Ebene positiv umläuft und nicht den Punkt $-x^{-1}$ enthält, so ist

$$(53) \quad (e^{2\pi i a} - 1) f(a, b, c, x) = \int_C y^a (1-y)^b (1+xy)^c dy,$$

und hier steht für $R(b) > -1$ auf der rechten Seite eine ganze Funktion von a . Zuzufolge (43) sind also $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ meromorphe Funktionen

von s . Ferner ist der Quotient $f_1(s, x) : f_2(s, x)$ als Funktion des positiven x nicht konstant; es gilt nämlich

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{n}{2}-s} \frac{f_1(s, x)}{f_2(s, x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(s - \frac{n}{2}\right)}.$$

Nach (46) und (51) sind also $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ meromorphe Funktionen von s .

Die Darstellung (53) zeigt ferner, daß $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ als Funktionen von x regulär sind in der ganzen x -Ebene mit Ausnahme der Punkte $0, -1, \infty$. Die Funktionalgleichung (52) gilt also auch für komplexe x . Es sei nun $\sigma > \frac{m}{2} - 1$. Wir setzen $x = -1 \pm \delta i$ und lassen δ durch positive Werte gegen 0 streben. Nach (43) ergibt sich

$$f_1(s, x) \rightarrow \int_0^1 y^{s-\frac{m}{2}} (1-y)^{\frac{m}{2}-2} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) \Gamma\left(s - \frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma(s)} = c_1$$

$$f_2(s, x) \rightarrow c_1 e^{\pm \pi i \left(\frac{m}{2}-1-s\right)}.$$

Andererseits folgt aus (53) durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes

$$e^{-2\pi i s} - 1) f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \rightarrow (e^{-\pi i \frac{m}{2}} - e^{-2\pi i s + \pi i \frac{m}{2}}) \int_1^\infty y^{-s} (y-1)^{\frac{m}{2}-2} dy$$

$$f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \rightarrow c_1 \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{2} - \pi s\right)}{\sin(\pi s)} = c_2$$

$$f_2\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \rightarrow c_2 e^{\pm \pi i (1-s)}.$$

Dies liefert als Spezialfall von (52) die Formel

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) - e^{\mp \pi i \left(s - \frac{m}{2}\right)} \varphi(-\mathfrak{S}, s)$$

$$= e^{\pm \pi i \frac{n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\pi s - \frac{\pi m}{2}\right)}{\sin(\pi s)} \left\{ \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) - e^{\mp \pi i s} \varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \right\}$$

und damit wieder Satz 2.

§ 8.

Die Residuen.

Es sei jetzt wieder $x > 0$. Zur Bestimmung der Residuen von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ hat man die Beziehungen (46) und (51) zu benutzen.

Als Funktionen von x genügen $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x(x+1) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ \left(s - \frac{m+n}{2} + 3 \right) x + s - \frac{n}{2} + 1 \right\} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{m}{2} - s - 1 \right) \left(\frac{n}{2} - 1 \right) y = 0.$$

Hieraus folgt in üblicher Weise die Formel

$$(54) \quad f_2 \frac{df_1}{dx} - f_1 \frac{df_2}{dx} = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right) \frac{\Gamma\left(s - \frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma(s)} x^{\frac{n}{2}-s-1} (x+1)^{\frac{m}{2}-s}.$$

Ferner lehrt (53), daß $f_1, f_2, \frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx}$ nach Division durch $\Gamma\left(s - \frac{m}{2} + 1\right)$ ganze Funktionen von s werden. Differenziert man nun (46) nach x und benutzt (54), so erkennt man, daß die beiden Funktionen

$$\pi^s \frac{\varphi(\mathfrak{S}, s)}{\Gamma(s)} = \zeta(\mathfrak{S}, s), \quad \pi^s \frac{\varphi(-\mathfrak{S}, s)}{\Gamma(s)} = \zeta(-\mathfrak{S}, s)$$

höchstens vier Pole haben können, und zwar von erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}, \frac{m}{2} - 1, 1, 0$. Zum Beweise der Sätze 1 und 3 hat man also nur noch jene Stellen zu untersuchen und dort die Residuen zu berechnen.

Es seien α und β die Residuen von $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{m}{2}$. Nach (46) und (51) gilt dann

$$(55) \quad \alpha f_1\left(\frac{m}{2}, x\right) + \beta f_2\left(\frac{m}{2}, x\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S}) x^{\frac{n-m}{2}} (1+x)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Andererseits ist

$$(56) \quad f_1\left(\frac{m}{2}, x\right) + f_2\left(\frac{m}{2}, x\right) = \int_{-x^{-1}}^1 (1-y)^{\frac{m-n}{2}-1} (1+xy)^{\frac{n}{2}-1} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n-m}{2}} (1+x)^{\frac{m}{2}-1}$$

und $f_1\left(\frac{m}{2}, 0\right) = \frac{2}{m-n}$, also der Quotient $f_1\left(\frac{m}{2}, x\right) : f_2\left(\frac{m}{2}, x\right)$ nicht konstant. Aus (55) und (56) folgt jetzt

$$\alpha = \beta = S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S}),$$

und die Residuen von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{m}{2}$ haben den gemeinsamen Wert

$$\varrho(\mathfrak{S}) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S}).$$

Aus der Funktionalgleichung (35) entnehmen wir jetzt, daß die Funktionen $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 0$ regulär sind. Für gerades $m - n$ ergibt sich noch die einfache Wertbestimmung

$$\zeta(\mathfrak{S}, 0) = (-1)^{\frac{m-n}{2}-1} \mu(\mathfrak{S}).$$

Nunmehr werde das Verhalten bei $s = \frac{m}{2} - 1$ untersucht. Aus (46) und (51) folgt, daß der Ausdruck

$$(57) \quad f_1(s, x) \zeta(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x) \zeta(-\mathfrak{S}, s) + \frac{1}{2} \pi^{\frac{1-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2) \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0)}{s - \frac{m}{2} + 1} - \frac{x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} M(\mathfrak{S}, 0)}{s - 1} \right)$$

und seine Ableitung nach x bei $s = \frac{m}{2} - 1$ regulär ist. Ferner haben nach (42) die Funktionen $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ bei $s = \frac{m}{2} - 1$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum 1, während ihre Ableitungen nach x dort regulär sind. Vermöge (54) erkennen wir, daß die Funktion

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} \zeta(\mathfrak{S}, s) + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{4} - \frac{n}{2}\right) \pi^{\frac{1-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2) x^{\frac{m}{4}-1} (x+1)^{\frac{m}{2}-2} \frac{M(\mathfrak{S}, 0)}{s-1}$$

bei $s = \frac{m}{2} - 1$ regulär ist. Liegt nicht der Fall $m = 4, n \neq 2$ vor, so ist also $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ regulär bei $s = \frac{m}{2} - 1$, und ebenfalls $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$. Ist aber $m = 4, n \neq 2$, so hat $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{m}{2} - 1 = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{24} M(\mathfrak{S}, 0)$.

Endlich ist noch die Stelle $s = 1$ zu untersuchen. Dabei kann man $m \neq 4$ voraussetzen, da man sonst auf den soeben behandelten Fall

$s = \frac{m}{2} - 1$ zurückkäme. Wegen der Regularität des Ausdrucks (57) bei $s = \frac{m}{2} - 1$ ist nun

$$(58) \zeta\left(\mathfrak{S}, \frac{m}{2} - 1\right) + \zeta\left(-\mathfrak{S}, \frac{m}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2} \pi^{\frac{1-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2) S^{-\frac{1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0).$$

Für gerades $m - n$ folgt aus (1) die Regularität von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$. Für ungerades $m - n$ folgt aus (2) und (58), daß $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} (2\pi)^{2-m} \Gamma(m-2) \zeta(m-2) M(\mathfrak{S}, 0)$$

besitzt. Nach dem im vorigen Absatz Bewiesenen gilt diese Formel auch für $m = 4$. Im Falle eines geraden m läßt sich auf Grund der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion für $\varrho_1(\mathfrak{S})$ der einfachere Ausdruck

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \zeta(3-m) M(\mathfrak{S}, 0)$$

angeben.

Damit sind die Sätze 1, 2, 3 bewiesen, wenn von dem bisher ausgeschlossenen Fall einer Quaternionen-Nullform $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ abgesehen wird. Dieser Fall ist nun noch zu untersuchen.

§ 9.

Die Quaternionen-Nullform.

Es sei fortan $m = 4$, $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform und $|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl, also $n = 2$. Da $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist, so läßt sie sich durch eine lineare rationalzahlige Substitution in $2y_1y_4 + Q$ transformieren, wobei Q eine quadratische Form in y_2, y_3 mit rationalen Koeffizienten bedeutet. Die Determinante $|\mathfrak{S}|$ ist das Quadrat einer rationalen Zahl und folglich die binäre Form Q rational zerlegbar; man kann also $Q = -2y_2y_3$ voraussetzen. Die gegebene Form $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ geht demnach durch eine geeignete lineare rationalzahlige Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{R} \mathfrak{y}$ in $2(y_1y_4 - y_2y_3)$ über, und dabei ist $|\mathfrak{R}| = S^{-\frac{1}{2}}$. Man bezeichne die Matrix der Form $2(y_1y_4 - y_2y_3)$ mit $\mathfrak{S}_0$ und setze noch

$$\begin{pmatrix} y_4 & y_2 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{y}.$$

Man wähle nun eine natürliche Zahl $q > 2$, die durch das Produkt der Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^{-1}$ teilbar ist. Ist dann $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, die $\equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ ist, so ist $\mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{U} \mathfrak{R} = \mathfrak{U}_0$ eine Einheit von $\mathfrak{S}_0$. Ist umgekehrt $\mathfrak{U}_0$ eine Einheit von $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{U}_0 \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$, so ist $\mathfrak{R} \mathfrak{U}_0 \mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{U}$

eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Folglich gibt es in $\Gamma(\mathfrak{S})$ eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ mit endlichem Index j und in $\Gamma(\mathfrak{S}_0)$ eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ mit endlichem Index, so daß $\Gamma_1(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)\mathfrak{R}^{-1}$ ist. Eine zulässige Wahl von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ ist die folgende. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unimodulare zweireihige Matrizen, so wird durch die Substitution

$$(59) \quad \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{A}'\mathfrak{Y}\mathfrak{B}$$

eine Einheit $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{S}_0$ definiert, die kurz mit $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ bezeichnet werde. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$, so ist auch $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$. Wir wählen für $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ die Gruppe dieser $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$.

Es sei $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$ eine ganzzahlige Lösung von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$. Dann ist $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ eine rationale Lösung von $\mathfrak{a}'_0\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$, also $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = 0$, wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ bedeuten. Setzt man noch

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{U}_0,$$

so kann man zwei unimodulare Matrizen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ derart finden, daß

$$(60) \quad \mathfrak{A}'_1\mathfrak{U}_0\mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

wird, wobei $\delta = \delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a}$ bedeutet. Ist nun $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ eine Einheit der Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$, welche $\mathfrak{a}_0$ als Fixpunkt hat, also ein Element von $I'_1(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{a}_0)$, so gilt

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{U}_0\mathfrak{B} = \mathfrak{U}_0,$$

und hieraus folgt vermöge (60), daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{A}_1^{-1}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{B}_1^{-1}$$

besitzen, wobei α und β beide durch q teilbar sind. Umgekehrt liefert jedes solche Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wieder ein Element $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{U}_0$ von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{a}_0)$.

Wir haben jetzt den durch (45) erklärten Ausdruck Δ zu berechnen. Aus dem Fundamentalbereiche $g(\mathfrak{S})$ für die gekürzte Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ erhält man einen Fundamentalbereich $g_1(\mathfrak{S})$ für die Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$, indem man $\frac{1}{2}j$ geeignete Bilder von $g(\mathfrak{S})$ vereinigt. Um $\mathfrak{S}_0$ an Stelle von $\mathfrak{S}$ in Δ einzuführen, setze man

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{(2)}, \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{Z} = \mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{S}_0\mathfrak{Z}\mathfrak{I}_0^{-1}\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{B}$$

und bilde die Summe

$$\psi_1(u, \mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{a}'_0\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0=0} e^{-\pi\gamma u\mathfrak{a}'_0\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0},$$

in welcher $\mathfrak{a}_0$ alle Lösungen von $\mathfrak{a}'_0\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$ mit ganzem $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ durchläuft. Ferner sei $\psi_2(u, \mathfrak{Z})$ die Summe mit demselben allgemeinen Gliede, wobei

aber $\mathfrak{a}_0$ alle Lösungen von $\mathfrak{a}'_0 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{a}_0 = 0$ mit ganzem $\mathfrak{S} \mathfrak{R} \mathfrak{a}_0$ durchläuft. Bedeutet nun $g_1(\mathfrak{S}_0)$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$, so wird

$$(61) \quad \frac{1}{2} j S \Delta = \int_{g_1(\mathfrak{S}_0)} |\mathfrak{S}' \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}|^{-2} \left\{ S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{1-s} p_2(u, \mathfrak{S}) du - \int_0^1 u^{s-1} p_1(u, \mathfrak{S}) du \right\} d\mathfrak{P}.$$

Ist

$$(62) \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

so gilt

$$(63) \quad \mathfrak{T}_0 = \mathfrak{S}' \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} -2v_1 & u_1 - v_2 \\ u_1 - v_2 & 2u_2 \end{pmatrix},$$

und die Bedingung $\mathfrak{T}_0 > 0$ liefert

$$(64) \quad u_2 > 0, \quad (u_1 - v_2)^2 + 4v_1 u_2 < 0.$$

Wir definieren nun durch die Gleichung $(1, \xi, \eta, \xi\eta) \mathfrak{S} = \mathfrak{n}'$, oder ausführlicher

$$(65) \quad u_1 + \xi v_1 + \eta = 0, \quad u_2 + \xi v_2 + \xi \eta = 0,$$

zwei Größen ξ und η . Für ξ erhält man die quadratische Gleichung $v_1 \xi^2 + (u_1 - v_2) \xi - u_2 = 0$, deren Wurzeln nach (64) imaginär sind. Wir können also voraussetzen, daß der imaginäre Teil ξ_2 von $\xi = \xi_1 + i \xi_2$ positiv sei. Zuzufolge (64) und (65) liegt dann auch $\eta = \eta_1 + i \eta_2$ in der oberen Halbebene. Sind $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ konjugiert komplex zu ξ, η , so wird

$$(66) \quad u_1 = \frac{\bar{\xi} \eta - \xi \bar{\eta}}{\xi - \bar{\xi}}, \quad v_1 = \frac{\bar{\eta} - \eta}{\xi - \bar{\xi}}, \quad u_2 = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\xi - \bar{\xi}} \xi \bar{\xi}, \quad v_2 = \frac{\bar{\xi} \bar{\eta} - \xi \eta}{\xi - \bar{\xi}},$$

und daher ist die Funktionaldeterminante

$$(67) \quad \frac{d(u_1 v_1 u_2 v_2)}{d(\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2)} = 4 \eta_2^3 \xi_2^{-3}.$$

Ferner findet man

$$(68) \quad |\mathfrak{S}' \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}| = 4 \eta_2^2.$$

Ist nun $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U} \times \mathfrak{B}$ ein Element von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ mit

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

so ist die Abbildung $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{U}_0 \mathfrak{S}$ zufolge (59) und (65) gleichbedeutend mit den simultanen Modulsstitutionen

$$(69) \quad \xi \rightarrow \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2}{\alpha_3 \xi + \alpha_4}, \quad \eta \rightarrow \frac{\beta_1 \eta + \beta_2}{\beta_3 \eta + \beta_4}.$$

Die Modulsstitutionen mit $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ bilden die Hauptkongruenzuntergruppe q -ter Stufe der Modulgruppe. Wir wählen für sie einen Fundamentalbereich g_0 in der oberen Halbebene. Läßt man dann ξ und η unabhängig

voneinander je den Bereich g_0 durchlaufen, so beschreibt der nach (62) und (66) zugeordnete Punkt $\mathfrak{P}$ den Fundamentalbereich $g_1(\mathfrak{S}_0)$.

Der Übergang von (61) zu einer mit (51) analogen Formel läßt sich nicht ohne weiteres ausführen, da bei direkter Übertragung der früheren Rechnung jetzt divergente Integrale auftreten würden. Um dies zu vermeiden, entferne man von dem Fundamentalbereich g_0 die Umgebung der parabolischen Eckpunkte, indem man für festes $\varepsilon > 0$ das Gebiet $\xi_2 > \varepsilon^{-1}$ und seine sämtlichen Bildgebiete bei allen Modulsstitutionen fortläßt. So entsteht ein im Innern der oberen Halbebene gelegenes endliches Gebiet g_ε . Zuzufolge (67) und (68) geht jetzt (61) über in

$$(70) \quad 2jS\Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{g_\varepsilon} \iint_{g_\varepsilon} \left\{ S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{1-s} \psi_2(u, \mathfrak{Z}) du \right. \\ \left. - \int_0^1 u^{s-1} \psi_1(u, \mathfrak{Z}) du \right\} (\xi_2 \eta_2)^{-2} d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2.$$

Nun fasse man in der Summe $\psi_1(u, \mathfrak{Z})$ alle Glieder zusammen, für welche $\mathfrak{a}_0$ mit einem festen $\mathfrak{a}_1$ in bezug auf die Einheitenuntergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ assoziiert ist. Macht man noch die Modulsstitutionen (69) mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_1, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_1,$$

wobei $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ die in (60) auftretenden Matrizen sind, so wird $\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{Z} = \delta(\mathfrak{a}_1) (0 \ 1)$, und man erhält mit Hilfe von (65), (68), (63) die Beziehung

$$\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{B} \mathfrak{a}_1 = \frac{\delta^2(\mathfrak{a}_1)}{2 \xi_2 \eta_2}.$$

Jene $\mathfrak{a}_0$ liefern zu dem Integral auf der rechten Seite von (70) den Beitrag

$$- \iint_{b_\varepsilon} \iint_{b_\varepsilon} \left\{ \int_0^1 u^{s-1} e^{-\pi \gamma u \frac{\delta^2(\mathfrak{a}_1)}{2 \xi_2 \eta_2}} du \right\} (\xi_2 \eta_2)^{-2} d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2,$$

wo der Bereich b_ε aus dem Halbstreifen $0 \leq \xi_1 \leq q$ der oberen ξ -Halbebene durch die oben erklärte Ausschließung der Umgebungen der rationalen Randpunkte entsteht. In analoger Weise vereinige man die Summanden von $\psi_2(u, \mathfrak{Z})$.

Jetzt hat man noch bei ψ_1 über ein volles System solcher $\mathfrak{a}_1$ zu summieren, die nicht-assoziert in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ sind und für welche $\Re \mathfrak{a}_1$ ganz ist. Man wähle zunächst die endlich vielen nicht-assozierten $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ aus, so daß $\Re \mathfrak{a}_0$ primitiv ist. Man erhält dann alle $\mathfrak{a}_1$ in der Form $\mathfrak{a}_1 = l \mathfrak{a}_0$ mit natürlichem l . Bei ψ_2 hat man die $\mathfrak{a}_1$ so zu normieren, daß $\Im \Re \mathfrak{a}_1$ ganz ist. Sie ergeben sich aus den soeben definierten $\mathfrak{a}_0$ in der Form $\mathfrak{a}_1 = r l \mathfrak{a}_0$ mit natür-

lichem l , wobei r^{-1} den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ bedeutet. Außerdem hat man noch das Glied $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{n}$ zu berücksichtigen. Es wird

$$(71) \quad 2jS\Delta = v^2 \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2} - \frac{1}{s} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{a}_0} \iint_{b_\varepsilon} \iint_{b_\varepsilon}^1 u^{s-2} \{ S^{-\frac{1}{2}} u^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi \gamma (r \delta l)^2}{2 u \xi_2 \eta_2}} - u \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi \gamma (\delta l)^2}{2 \xi_2 \eta_2}} \} du (\xi_2 \eta_2)^{-2} d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2.$$

Dabei ist v das bekannte nicht-euklidische Volumen von g_0 , δ und r^{-1} sind die größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$, und $\mathfrak{a}_0$ durchläuft ein volles System in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ nicht-assoziiierter Lösungen von $\mathfrak{a}'_0 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{a}_0 = 0$ mit primitivem $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$.

Bezeichnet man mit w den Grenzwert auf der rechten Seite von (71), so wird

$$\begin{aligned} \frac{\pi \gamma}{2 q^2} w &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{a}_0} \int_0^{\varepsilon^{-1}} \left(\int_0^1 u^{s-2} \{ S^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} (r \delta l)^{-2} e^{-\frac{\pi \gamma \varepsilon (r \delta l)^2}{2 u \eta_2}} - \sum_{l=1}^{\infty} (\delta l)^{-2} e^{-\frac{\pi \gamma \varepsilon (\delta l)^2}{2 \eta_2}} \} du \right) \frac{d\eta_2}{\eta_2} \\ &= \sum_{\mathfrak{a}_0} \int_0^1 u^{s-2} \sum_{l=1}^{\infty} (\delta l)^{-2} \left\{ S^{-\frac{1}{2}} r^{-2} \log \frac{2u}{\pi \gamma (r \delta l)^2} - \log \frac{2}{\pi \gamma u (\delta l)^2} \right\} du \\ &\quad + \frac{\pi^2}{6(s-1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2} (S^{-\frac{1}{2}} r^{-2} - 1) \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2} (S^{-\frac{1}{2}} r^{-2} - 1) = 0$$

und sodann

$$\begin{aligned} \frac{\pi \gamma}{2 q^2} w &= \frac{\pi^2}{3} \sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2} \left\{ \int_0^1 u^{s-2} \log u \, du + (\log \delta - S^{-\frac{1}{2}} r^{-2} \log(r \delta)) \int_0^1 u^{s-2} \, du \right\} \\ &= -\frac{\pi^2}{3(s-1)^2} \sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2} + \frac{c}{s-1} \end{aligned}$$

mit konstantem c . Also ist

$$(72) \quad 2jS\Delta = v^2 \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2} - \frac{1}{s} \right) - \frac{2\pi q^2}{3\gamma(s-1)^2} \sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2} + \frac{c_1}{\gamma(s-1)}$$

Damit ist Δ bestimmt.

Im vorliegenden Falle ist andererseits

$$f_1(s, x) = \int_0^1 y^{s-2} dy = \frac{1}{s-1}, \quad f_2(s, x) = \frac{x^{1-s}}{s-1}.$$

Also wird nach (46) und (72) der Ausdruck

$$j \pi^{2-s} \Gamma(s) \left\{ x^{\frac{s-1}{2}} \zeta(\mathfrak{S}, s) + x^{\frac{1-s}{2}} \zeta(-\mathfrak{S}, s) \right\} \\ - \frac{s-1}{4} v^2 \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2} - \frac{1}{s} \right) (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) + \frac{\pi q^2}{6(s-1)} \sum_{\mathfrak{a}_0} \delta^{-2}$$

eine ganze Funktion von s , die sich nicht ändert, wenn man sie mit $S^{\frac{1}{2}}$ multipliziert und dann $x, \mathfrak{S}, s$ durch $x^{-1}, \mathfrak{S}^{-1}, 2-s$ ersetzt. Außerdem hängt ihr Wert bei $s=1$ nicht von x ab. Hieraus findet man nun wieder die Funktionalgleichung von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ und erkennt, daß diese Funktion in der ganzen endlichen s -Ebene regulär ist bis auf Pole erster Ordnung bei $s=2$ und $s=1$. Für das Residuum bei $s=1$ ergibt sich der negative rationale Wert

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = -\frac{q^2}{12j} \sum_{\mathfrak{a}' \in \mathfrak{a}=0} \{\delta(\mathfrak{a})\}^{-2},$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein volles System primitiver, in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ nicht-assoziierter Lösungen von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$ durchläuft und $\delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a}$ bedeutet.

Damit sind unsere sämtlichen Behauptungen bewiesen.

(Eingegangen am 18. März 1938.)

Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaréschen Randwertaufgabe.

Von

Witold Pogorzelski in Warschau.

I. Teil.

In der vorliegenden Arbeit¹⁾ wollen wir den Einfluß der Änderung der Integrationsfolge auf den Wert der uneigentlichen iterierten Integrale von der Gestalt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l N_1(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma, \\ \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma, \\ \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma, \\ \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l L'_1(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \end{array} \right.$$

untersuchen, wo die Funktionen $N(s, \sigma)$ und $N_1(s, \sigma)$ für $s = \sigma$ eine Pol-singularität, die Funktionen $L'(s, \sigma)$ und $L'_1(s, \sigma)$ eine logarithmische Singularität besitzen. Das uneigentliche Integral soll man dabei im Cauchyschen Sinn verstehen, also z. B.

$$(2) \quad \int_0^l N(s, \sigma) d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{s-\varepsilon} N(s, \sigma) d\sigma + \int_{s+\varepsilon}^l N(s, \sigma) d\sigma \right]; \quad 0 < s < l.$$

Dabei sollen die Funktionen N, N_1, L', L'_1 den folgenden Voraussetzungen genügen:

1. $N(s, \sigma)$ und $N_1(s, \sigma)$ sind analytische Funktionen von zwei Veränderlichen, die in bezug auf eine Veränderliche, z. B. σ , einen Pol von erster Ordnung für $\sigma = s$, also dieselbe Singularität wie $\frac{1}{\sigma - s}$, besitzen.

¹⁾ Diese Arbeit enthält eine etwas allgemeinere Darstellung der im ersten Teil meiner Arbeit „Problème aux limites de H. Poincaré“ (Annales de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie, 1935) veröffentlichten Überlegungen.

2. $L'(s, \sigma)$ und $L_1'(s, \sigma)$ sind *reelle Teile* der Funktionen $L(s, \sigma)$ und $L_1(s, \sigma)$ von der Gestalt

$$(3) \quad \begin{cases} L(s, \sigma) = m(s, \sigma) \log M(s, \sigma), \\ L_1(s, \sigma) = m_1(s, \sigma) \log M_1(s, \sigma), \end{cases}$$

wo $m(s, \sigma)$, $m_1(s, \sigma)$, $M(s, \sigma)$ und $M_1(s, \sigma)$ holomorphe Funktionen von s und σ sind, wenn die s - und σ -Werte einem Streifen (Ω) der komplexen Zahlenebene angehören, der in seinem Innern die reelle Achse enthält; die Funktionen $M(s, \sigma)$ und $M_1(s, \sigma)$ sollen außerdem für $s = \sigma$ verschwinden und den *Hauptwert* $s - \sigma$ haben, wenn diese Differenz gegen Null strebt.

3. $\mu(s)$ ist eine holomorphe Funktion in einem Bereiche, der die Strecke $(0, l)$ enthält.

4. Die Funktionen $N, N_1, m, m_1, M, M_1, \mu$ nehmen für reelle s - und σ -Werte reelle Werte an.

5. Die Funktionen N, N_1, m, m_1, M, M_1 haben die reelle Periode l in bezug auf die Veränderliche s , wie auch in bezug auf σ .

6. Die Funktionen $N(s, \sigma)$, $N_1(s, \sigma)$, $L(s, \sigma)$, $L_1(s, \sigma)$ besitzen keine Singularität außer für $s = \sigma$ (wenn s und σ dem Streifen Ω angehören), abgesehen von Vielfachen der Periode l .

Das erste der vier Integrale (1), das die Funktionen $N(s, \sigma)$ und $N_1(\sigma, \tau)$ mit Polsingularitäten für $s = \sigma$ und $\sigma = \tau$ enthält, kann man auf Grund der Überlegungen von H. Poincaré²⁾ transformieren, die sich auf die folgende Eigenschaft des uneigentlichen Integrals im Cauchyschen Sinne stützen: Das Integral längs einer Strecke AB der reellen Achse genommen, die einen Pol der zu integrierenden Funktionen enthält, ist gleich der halben Summe der Integrale derselben Funktion längs der Bogen APB und $AP'B$ der komplexen Zahlenebene, die die Strecke AB einschließen. Diesen Überlegungen entnehmen wir folgende interessante Transformation:

$$(4) \quad \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l N_1(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma = -\pi^2 R(s) R_1(s) \mu(s) \\ + \int_0^l F(s, \tau) \mu(\tau) d\tau,$$

²⁾ „Göttinger Vorträge“ (Leipzig, B. G. Teubner, 1909) oder „Mécanique céleste“ (Tome III, théorie des marées, 1910).

wo sein innerer Punkt des Intervalls $(0, l)$ ist, $R(s)$ und $R_1(s)$ die Residuen der Funktionen $N(s, \sigma)$ und $N_1(s, \sigma)$ der Veränderlichen σ in dem Pol $\sigma = s$ bezeichnen, das heißt

$$(5) \quad \begin{cases} R(s) = \lim_{\sigma \rightarrow s} (\sigma - s) N(s, \sigma), \\ R_1(s) = \lim_{\sigma \rightarrow s} (\sigma - s) N_1(s, \sigma); \end{cases}$$

$F(s, \tau)$ ist gleich der folgenden Summe von Integralen längs der Bogen APB und $AP'B$ der komplexen Zahlenebene, die die Strecke AB der reellen Achse (das Integrationsintervall $0, l$) einschließen:

$$(6) \quad F(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_{APB} N(s, \sigma) N_1(\sigma, \tau) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{AP'B} N(s, \sigma) N_1(\sigma, \tau) d\sigma$$

Nach dem Ausdruck (6) ist die Funktion $F(s, \tau)$ holomorph in bezug auf die Veränderlichen s und τ in dem von den Bogen APB und $AP'B$ begrenzten Bereiche. In der Formel (4) nehmen die Veränderlichen s, σ, τ reelle Werte des Intervalls $(0, l)$ an, und in diesem Falle ist die Funktion (6) gleich den Cauchyschen Hauptwerten des Integrals

$$(6') \quad F(s, \tau) = \int_0^l N(s, \sigma) N_1(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Die Funktion $F(s, \tau)$ bleibt nach (6) beschränkt, wenn selbst die Differenz $s - \tau$ gegen Null strebt, was eine wesentliche Tatsache bildet. Nach einer Bemerkung von H. Poincaré bleibt die Funktion $F(s, \tau)$ auch dann beschränkt, wenn s und τ gegen denselben Endpunkt des Integrationsintervalls AB streben. In der Tat, da die Funktion $N(s, \sigma)$ periodisch ist, bleibt der Wert des Integrals (6) unverändert, wenn sich die Integrationstrecke AB mit Behaltung der Länge längs der reellen Achse verschiebt. Diese Eigenschaft wird auch augenscheinlich, wenn man die Summe der Integrale

$$(7) \quad F(s, \tau) = \frac{1}{4} \int_{A_1 P_1 B_1} N(s, \sigma) N_1(\sigma, \tau) d\sigma + \frac{1}{4} \int_{A_1 P'_1 B_1} N(s, \sigma) N_1(\sigma, \tau) d\sigma$$

betrachtet, wo die Integrationswege $A_1 P_1 B_1$ und $A_1 P'_1 B_1$ die Strecke $A_1 B_1 = 2l$ der reellen Achse einschließen, die das Integrationsintervall AB in ihrem Innern enthält; die Funktion (7) ist nämlich holomorph in dem Bereiche, der die Strecke AB im Innern enthält, und für zwei beliebige Punkte s und τ der Strecke AB nimmt sie dieselben Werte als das Integral (6') an.

Wir wollen noch bemerken, daß wir in der Formel (4) eine Zeichenänderung eingeführt haben, weil diese Formel in dem oben zitierten Werke von H. Poin-

caré (S. 256) im Falle $N = N_1$ das Glied $+\pi^2 R^2(s) \mu(s)$ enthält. Diese Zeichenänderung folgt daraus, daß, wenn $R(s)$ das Residuum der Funktion $N(s, \sigma)$ in bezug auf die Veränderliche σ im Punkte $\sigma = s$ bezeichnet, die Funktion $N(s, \sigma)$ in bezug auf die Veränderliche s im Punkte $s = \sigma$ das Residuum $-R(\sigma)$ und nicht $+R(\sigma)$ hat. Diese Zeichenverbesserung ist nicht ohne Bedeutung, wie wir in den folgenden Untersuchungen sehen werden.

Die Transformation (4) war von G. Bertrand³⁾ auf die Integrale längs der geschlossenen Kurven in der komplexen Zahlenebene verallgemeinert.

Jetzt wenden wir uns der Transformation der iterierten Integrale (1) zu, worin die Funktion $N(s, \sigma)$ mit einer Polsingularität und die Funktion $L(s, \sigma)$ mit einer logarithmischen Singularität behaftet ist. Betrachten wir also zuerst das Integral

$$(8) \quad \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L^r(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma,$$

wo $\mu(\tau)$ eine beliebige, in einem das Intervall $(0, l)$ enthaltenden Bereiche holomorphe Funktion bezeichnet, und der Punkt s sich im Innern des Intervalls $(0, l)$ befindet.

Für die Transformation des Integrals (8) drücken wir das Integral der Funktion $L^r(\sigma, \tau)$, d. h. des reellen Teiles der Funktion

$$(9) \quad L(\sigma, \tau) = m(\sigma, \tau) \log M(\sigma, \tau)$$

durch die Integrale dieser Funktion $L(\sigma, \tau)$ längs der Bogen der komplexen Zahlenebene aus.

Es seien also zwei Bogen APB und $AP'B$ gegeben, die das Integrationsintervall AB einschließen, und es sei σ ein innerer Punkt von AB (Fig. 1). Wir wollen beweisen, daß

$$(10) \quad \int_0^l L^r(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau.$$

Wir setzen dabei voraus, wie auch immer in dieser Arbeit, daß die mehrdeutige Funktion $L(\sigma, \tau)$, die sich stetig längs der Integrationswege APB

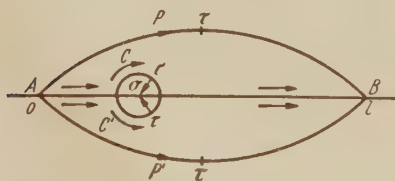


Fig. 1

oder $AP'B$ verändert, einen reellen Anfangswert hat, wenn sich der Punkt τ im Anfangspunkte A und der Punkt σ im Innern der Strecke AB befindet. Für den Beweis der Formel (10) umgeben wir den logarithmischen singulären

³⁾ Comptes Rendus, Paris 1921, S. 1458.

Punkt σ auf der Strecke AB mit einem Kreise vom Radius ε . Es wird dann

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^{\sigma-\varepsilon} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_C L \mu d\tau \\ &\quad + \int_{\sigma+\varepsilon}^l [L'(\sigma, \tau) - m(\sigma, \tau) \pi i] \mu(\tau) d\tau, \\ \int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^{\sigma-\varepsilon} L'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_{C'} L \mu d\tau \\ &\quad + \int_{\sigma+\varepsilon}^l [L'(\sigma, \tau) + m(\sigma, \tau) \pi i] \mu(\tau) d\tau. \end{aligned} \right.$$

In der Tat, nach unserer Voraussetzung über den reellen Anfangswert der Funktion $L(\sigma, \tau)$, wenn der Punkt τ den oberen Halbkreis C durchläuft, nimmt das Argument der Differenz $\sigma - \tau$, d. h. der Winkel zwischen dem Vektor $(\vec{\tau}\sigma)$ und der reellen Achse, von 0 bis $-\pi$ ab, und daher erfährt der Hauptteil $m(\sigma, \tau) \log(\sigma - \tau)$ der Funktion $L(\sigma, \tau)$ einen Zuwachs $-m(\sigma, \tau)\pi i$; durchläuft dagegen der Punkt τ den unteren Halbkreis C' , so wächst das Argument der Differenz $\sigma - \tau$ von 0 bis π , und daher erfährt der Hauptteil der Funktion $L(\sigma, \tau)$ den Zuwachs $+m(\sigma, \tau)\pi i$ (in der Fig. 1 ist der positive Drehsinn als entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung angenommen). Läßt man in den Formeln (11) ε gegen Null streben, so überzeugt man sich, daß die längs der Halbkreise C und C' genommenen Integrale auch gegen Null streben, und man kommt schließlich zu der Formel (10).

Nach der Formel (10) können wir das Integral (8) folgendermaßen darstellen:

$$(12) \quad \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ = \frac{1}{2} \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist aber eine im Innern des von den Bogen APB und $AP'B$ begrenzten Bereiches holomorphe Funktion. Wir können also das Integral (12) in bezug auf die Veränderliche σ durch eine halbe Summe der Integrale ausdrücken, die längs der im Bereiche $AP'BPA$ gelegenen und die Strecke AB , auf welcher sich der Pol $\sigma = s$ befindet, einschließenden Bogen AQB und $AQ'B$ zu nehmen sind (Fig. 2); wir gelangen auf diese Weise zum folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_{\Pi}^l L'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &= \frac{1}{4} \int_{AQB} N(s, \sigma) \left[\int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQB} N(s, \sigma) \left[\int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQ'B} N(s, \sigma) \left[\int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQ'B} N(s, \sigma) \left[\int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma.
 \end{aligned}$$

Liegt der Punkt σ auf dem Bogen AQB , so ist das Integral der Funktion $L(\sigma, \tau) \mu(\tau)$ in bezug auf die Veränderliche τ längs des Bogens APB der

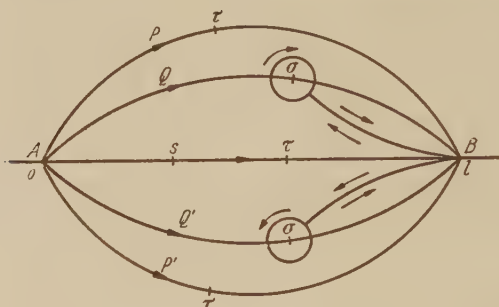


Fig. 2.

Summe der Integrale dieser Funktion längs der Strecke AB der reellen Achse und längs der vom Punkte B ausgehenden und den kritischen Punkt σ des Bogens AQB (Fig. 2) im negativen Sinne umkreisenden Schlinge gleich. Das Argument der Differenz $\sigma - \tau$ erfährt aber, da der Punkt τ einen kleinen Kreis um den Punkt σ auf AQB umschreibt, eine Verminderung um 2π ; also erfährt die Funktion $L(\sigma, \tau)$ den Zuwachs $-2\pi i m(\sigma, \tau)$ und wir können schreiben

$$\begin{aligned}
 \int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_l^\sigma L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \\
 &\quad + \int_\sigma^l [L(\sigma, \tau) - 2\pi i m(\sigma, \tau)] \mu(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(14) \quad \int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau - 2\pi i \int_\sigma^l m(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau$$

(σ auf AQB).

Liegt der Punkt σ auf dem Bogen $AQ'B$, so gibt es zwischen den Integrationswegen APB und AB keine singulären Punkte der Funktion $L(\sigma, \tau)$ und wir erhalten

(14)
$$\int_{APB} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau; \quad (\sigma \text{ auf } AQ'B).$$

Auf ähnliche Weise gelangen wir zu den Formeln

(15)
$$\int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau; \quad (\sigma \text{ auf } AQB)$$

und

(15')
$$\int_{AP'B} L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau = \int_0^l L(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + 2\pi i \int_0^l m(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau$$

(σ auf $AQ'B$),

weil im letzten Falle der Punkt τ die Schlinge um den Punkt σ im positiven Sinne umschreiben soll (Fig. 2). Die Substitution der Ausdrücke (14), (14'), (15), (15') in die Formel (13) führt zu der Gleichheit

$$\begin{aligned} &\int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} \left[\int_{AQ'B} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma + \int_{AQ'B} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4} 2\pi i \int_{AQ'BQA} N(s, \sigma) \left[\int_0^l m(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Da $R(s)$ das Residuum der Funktion $N(s, \sigma)$ in bezug auf die Veränderliche σ im Punkte $\sigma = s$ bezeichnet, entnehmen wir der Residuentheorie den folgenden Zusammenhang:

$$\int_{AQ'BQA} N(s, \sigma) \left[\int_0^l m(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma = 2\pi i R(s) \int_s^l m(s, \tau) \mu(\tau) d\tau,$$

woraus wir die folgende Transformation des iterierten Integrals ausführen

(16)
$$\begin{aligned} &\int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ &= \int_0^l F_1(s, \tau) \mu(\tau) d\tau - \pi^2 \int_s^l R(s) m(s, \tau) \mu(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

dabei ist s ein innerer Wert des Intervalls $(0, l)$ und $F_1(s, \tau)$ eine durch die Summe der Integrale

(16')
$$F_1(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_{AQ'B} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{AQ'B} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma$$

ausgedrückte Funktion. Die Funktion $F_1(s, \tau)$ ist also im Innern des von den Bogen AQB und $AQ'B$ begrenzten Bereichs in bezug auf die Veränderlichen s und τ holomorph; wir wollen darüber beweisen, daß für reelle Werte der Veränderlichen s, τ im Intervall $(0, l)$ die Funktion (16') dieselben Werte annimmt als das folgende uneigentliche Integral

$$(16'') \quad F_1(s, \tau) = \int_0^l N(s, \sigma) L'(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Setzen wir also voraus, daß sich die Punkte σ und τ im Innern der Strecke AB der reellen Achse befinden und $s \neq \tau$ (Fig. 3) ist. Nach unserer Verabredung

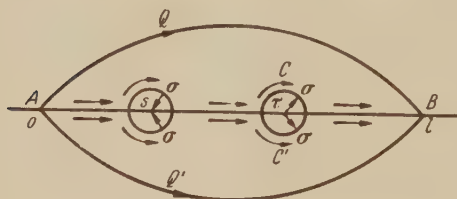


Fig. 3.

über den Zweig der Funktion $L(\sigma, \tau)$ in der Formel (16') und den vorangehenden Formeln ist der Hauptwert der Funktion $L(\sigma, \tau)$ in der Umgebung des Punktes τ auf der Strecke AB gleich

$$L'(\sigma, \tau) + m(\sigma, \tau) \theta i,$$

wo θ den Winkel zwischen dem Vektor $(\vec{\tau}\sigma)$ und der reellen Achse bezeichnet, der sich für oberhalb der Strecke AB gelegene Punkte σ von 0 bis π , und für die unterhalb gelegenen von 0 bis $-\pi$ verändert. Jetzt umgeben wir die singulären Punkte s und τ auf der Strecke AB mit Kreisen vom Radius ε (Fig. 3) und lassen ε gegen Null streben. Wir erhalten damit

$$(16''') \quad \begin{aligned} \int_{AQB} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\tau-\varepsilon} N(s, \sigma) [L'(\sigma, \tau) + m(\sigma, \tau) \pi i] d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \int_C NL d\sigma + \int_{\tau+\varepsilon}^l N(s, \sigma) L'(\sigma, \tau) d\sigma \right\}, \\ \int_{AQ'B} N(s, \sigma) L(\sigma, \tau) d\sigma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\tau-\varepsilon} N(s, \sigma) [L'(\sigma, \tau) - m(\sigma, \tau) \pi i] d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \int_{C'} NL d\sigma + \int_{\tau+\varepsilon}^l N(s, \sigma) L'(\sigma, \tau) d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

wo C die obere und C' die untere Hälfte des den Punkt τ umgebenden Kreises bezeichnet. Aus der Formel (16''') folgt die Eigenschaft (16'') augenscheinlich.

Wir bemerken noch ausdrücklich, daß, der Funktion (6') ähnlich, die Funktion (16'') beschränkt bleibt, wenn die Differenz $s - \tau$ gegen Null strebt. Auch für die Endpunkte des Intervalls $(0, l)$ kann man auf die Funktion $F_1(s, \tau)$ dieselbe Bemerkung anwenden, die seinerzeit auf die Funktion

$F(s, \tau)$ angewandt wurde. Wir wollen jetzt auf ähnliche Weise das dritte iterierte Integral (1) transformieren. Wir schreiben nämlich nach den vorangehenden Überlegungen

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_{APB} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_{AP'B} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &= \frac{1}{4} \int_{AQB} L(s, \sigma) \left[\int_{APB} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQB} L(s, \sigma) \left[\int_{AP'B} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) \left[\int_{APB} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) \left[\int_{AP'B} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma,
 \end{aligned}$$

indem wir für die die Punkte A und B verbindenden Bogen dieselbe Lage, wie oben in der Fig. 2 behalten. Wenn wir das Residuum der Funktion $N(\sigma, \tau)$ in bezug auf die Veränderliche τ im Pole $\tau = \sigma$ mit $R(\sigma)$ bezeichnen, so können wir die Integrale längs der Bogen APB und $AP'B$ durch das Integral längs der Strecke AB folgendermaßen ausdrücken:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{APB} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau - 2\pi i R(\sigma) \mu(\sigma); & (\sigma \text{ auf } AQB), \\ \int_{AP'B} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau; & (\sigma \text{ auf } AQ'B), \\ \int_{APB} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau; & (\sigma \text{ auf } AQB), \\ \int_{AP'B} N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau + 2\pi i R(\sigma) \mu(\sigma); & (\sigma \text{ auf } AQ'B). \end{aligned} \right.$$

Setzt man die Werte (18) in den Ausdruck (17) ein, so nimmt das untersuchte iterierte Integral die folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\
 &= \int_0^l \frac{1}{2} \left[\int_{AQB} L(s, \sigma) N(\sigma, \tau) d\sigma + \int_{AQ'B} L(s, \sigma) N(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{4} 2\pi i \int_{AQB} L(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma + \frac{1}{4} 2\pi i \int_{AQ'B} L(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Wir können aber mit Hilfe einer vom Punkte B ausgehenden und den logarithmischen Punkt $\sigma = s$ auf der Strecke AB umgebenden Schlinge die Formel

$$(20) \quad \int_{AQ'B} L(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma + 2\pi i \int_s^l m(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma \\ = \int_{AQ'B} L(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma$$

ausführen, mit der Verabredung, daß der Hauptwert der Funktion $L(s, \sigma)$ in der Umgebung des Punktes $\sigma = s$ gleich $m(s, \sigma) \log(\sigma - s)$ ist. Nach den Formeln (19) und (20) gelangen wir zu der folgenden Eigenschaft des dritten iterierten Integrals:

$$(21) \quad \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ = \int_0^l F_2(s, \tau) \mu(\tau) d\tau - \pi^2 \int_s^l m(s, \sigma) R(\sigma) \mu(\sigma) d\sigma,$$

die sich ein wenig von der Eigenschaft (16) unterscheidet. Die Funktion $F_2(s, \tau)$ hat ähnliche Eigenschaften als die Funktion $F_1(s, \tau)$; sie ist durch die Summe der Integrale

$$(22) \quad F_2(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) N(\sigma, \tau) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) N(\sigma, \tau) d\sigma$$

definiert, sie ist folglich in der Umgebung der Strecke AB holomorph und nimmt für zwei reelle Werte s und τ im Innern des Intervalls $(0, l)$ dieselben Werte an, als das uneigentliche Integral

$$(22') \quad F_2(s, \tau) = \int_0^l L'(s, \sigma) N(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Wir bemerken noch, daß die Funktion (22') im Intervall $(0, l)$, gleichfalls als die Funktion $F_1(s, \tau)$, beschränkt ist.

Ähnlich können wir das letzte iterierte Integral (1) behandeln und bekommen die folgende Transformation

$$(23) \quad \int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l L_1'(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ = \int_0^l F_3(s, \tau) \mu(\tau) d\tau - \pi^2 \int_s^l \left[\int_s^\tau m(s, \sigma) m_1(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau,$$

wo die Funktionen $m(s, \sigma)$ und $m_1(\sigma, \tau)$ durch die Ausdrücke (3) gegeben sind und die Funktion $F_3(s, \tau)$ durch die Summe

$$(24) \quad F_3(s, \tau) = \frac{1}{2} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) L_1(\sigma, \tau) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) L_1(\sigma, \tau) d\sigma$$

definiert ist; folglich ist die Funktion $F_3(s, \tau)$ im Innern des von den Bogen AQB und $AQ'B$ begrenzten Bereichs holomorph.

Wir wollen beweisen, daß die Funktion (24) für reelle Werte der Veränderlichen s und τ im Intervall $(0, l)$ reelle Werte annimmt. Wir wiederholen also die Überlegung, die uns zu der Eigenschaft (16'') geführt hat. Wir wissen, daß längs der oberhalb des Punktes s der Strecke AB gelegenen Halbkreises (Fig. 3) der Hauptwert der Funktion $L(s, \sigma)$, der in der Formel (24) auftritt, gleich

$$L^r(s, \sigma) + m(s, \sigma) \theta i$$

ist, wo θ den Winkel zwischen dem Vektor $(\vec{\sigma}s)$ und der reellen Achse bezeichnet, der von 0 bis $-\pi$ abnimmt, wenn der Punkt σ den oberen Halbkreis umschreibt. Längs des oberhalb des Punktes τ der Strecke AB gelegenen Halbkreises ist der Hauptwert der Funktion $L_1(\sigma, \tau)$ gleich

$$L_1^r(\sigma, \tau) + m_1(\sigma, \tau) \theta_1 i,$$

wo θ_1 den Winkel zwischen dem Vektor $(\vec{\tau}\sigma)$ und der reellen Achse bezeichnet, der von π bis 0 abnimmt, wenn der Punkt σ den oberen Halbkreis umschreibt. Schreibt der Punkt σ den unterhalb des Punktes s gelegenen Halbkreis um, so nimmt der Winkel θ des Vektors $(\vec{\sigma}s)$ von 0 bis π zu, und schreibt endlich der Punkt σ den unterhalb des Punktes s gelegenen Halbkreis um, so nimmt der Neigungswinkel θ_1 des Vektors $(\vec{\tau}\sigma)$ von $-\pi$ bis 0 zu.

Wir schließen also nach den vorangehenden Bemerkungen, daß, wenn die Punkte s und τ im Intervall $(0, l)$ liegen und wenn $s < \tau$, dann

$$\begin{aligned} \int_{AQ'B} L(s, \sigma) L_1(\sigma, \tau) d\sigma &= \int_0^s L^r(s, \sigma) [L_1^r(\sigma, \tau) + \pi i m_1(\sigma, \tau)] d\sigma \\ &+ \int_s^\tau [L^r(s, \sigma) - \pi i m(s, \sigma)] [L_1^r(\sigma, \tau) + \pi i m_1(\sigma, \tau)] d\sigma \\ &+ \int_\tau^l [L(s, \sigma) - \pi i m(s, \sigma)] L_1^r(\sigma, \tau) d\sigma; \\ \int_{AQ'B} L(s, \sigma) L_1(\sigma, \tau) d\sigma &= \int_0^s L^r(s, \sigma) [L_1^r(\sigma, \tau) - \pi i m(\sigma, \tau)] d\sigma \\ &+ \int_s^\tau [L^r(s, \sigma) + \pi i m(s, \sigma)] [L_1^r(\sigma, \tau) - \pi i m_1(\sigma, \tau)] d\sigma \\ &+ \int_\tau^l [L^r(s, \sigma) + \pi i m(s, \sigma)] L_1^r(\sigma, \tau) d\sigma. \end{aligned}$$

Die Funktion (24) hat folglich für $s < \tau$ den reellen Wert

$$(24') \quad F_3(s, \tau) = \int_0^l L^r(s, \sigma) L_1^r(\sigma, \tau) d\sigma + \pi^2 \int_s^\tau m(s, \sigma) m_1(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Im Falle $\tau < s$ erhalten wir auf ähnliche Weise, daß die Funktion $F_3(s, \tau)$ längs der Strecke AB folgende reellen Werte annimmt:

$$(24'') \quad F_3(s, \tau) = \int_0^l L'(s, \sigma) L'_1(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Die Ausdrücke (24') und (24'') der Funktion $F_3(s, \tau)$ lassen uns die oben erhaltene Transformation (23) verifizieren. In der Tat folgt es aus den Ausdrücken (24') und (24'') (s und τ sind reell)

$$\begin{aligned} \int_0^l F_3(s, \tau) \mu(\tau) d\tau &= \int_0^s F_3(s, \tau) \mu(\tau) d\tau + \int_s^l F_3(s, \tau) \mu(\tau) d\tau \\ &= \int_0^l \left[\int_0^s L'(s, \sigma) L'_1(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau \\ &\quad + \pi^2 \int_s^l \left[\int_s^\tau m(s, \sigma) m_1(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (23) ein, so findet man die bekannte Eigenschaft des iterierten Integrals wieder:

$$\int_0^l L'(s, \sigma) \left[\int_0^l L'_1(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma = \int_0^l \left[\int_0^l L'(s, \sigma) L'_1(\sigma, \tau) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau.$$

II. Teil.

Die im ersten Teil erhaltenen Transformationen der iterierten Integrale (1) finden in der Poincaréschen Randwertaufgabe (l. c.) eine Anwendung. Diese Aufgabe besteht darin, daß man eine Funktion $u(x, y)$ von zwei Veränderlichen zu bestimmen sucht, die im Innern eines von einer geschlossenen Kurve C begrenzten Bereichs (D) die Laplacesche Gleichung

$$(25) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt, und die auf dem Rande C des Bereichs (D) die folgende Randbedingung erfüllt:

$$(26) \quad \frac{du}{dn} + p(s) \frac{du}{ds} + q(s) u + f(s) = 0.$$

In dieser Bedingung bezeichnet $\frac{du}{dn}$ den Grenzwert der Ableitung der Funktion u in bezug auf die Normalrichtung im laufenden Punkt P des Randes C , und $\frac{du}{ds}$ die Ableitung des Grenzwertes der Funktion u in bezug auf die Bogenlänge s der Kurve C im Punkte P ; dabei sind $p(s)$, $q(s)$, $f(s)$ gegebene Funktionen der von einem fixierten Anfangspunkt P_0 in einem bestimmten positiven Sinne gerechneten Bogenlänge $s = P_0P$ der Kurve C .

Da in der Randbedingung (26) die Ableitung $\frac{du}{ds}$ in bezug auf die Bogenlänge auftritt, fordert die Auflösung der zitierten Aufgabe ganz andere Überlegungen, als die Auflösung der gewöhnlichen Aufgabe mit den Randbedingungen der Gestalt:

$$\frac{du}{dn} + q(s)u + f(s) = 0.$$

Es ist bemerkenswert, daß die gestellte, durch die Formeln (25) und (26) ausgedrückte Aufgabe in der Gezeitentheorie ihren Ursprung hat.

Die Auflösung der vorangehenden Aufgabe, die von H. Poincaré (l. c.) gegeben worden ist, ist im Falle der vereinfachten Randbedingung

$$(27) \quad \frac{du}{dn} + p(s)\frac{du}{ds} + f(s) = 0$$

vollständig. Im Falle der Randbedingung (26) dagegen fordert sie einige Änderungen und Ergänzungen, die den Gegenstand dieses zweiten Teiles bilden. Um die durch die Bedingungen (25) und (26) ausgedrückte Aufgabe zu lösen, suchen wir, wie gewöhnlich, den Wert der Funktion $u(A)$ im Punkte $A(x, y)$ des Bereiches (D) in der Gestalt des logarithmischen Potentials einer einfachen Schicht, d. h. in der Gestalt des über die Kurve C ausgedehnten Integrals

$$(28) \quad u(A) = \int_C \log \frac{1}{r_{\sigma}} \cdot \mu(\sigma) d\sigma.$$

Die Dichte $\mu(\sigma)$ ist eine in jedem Punkte Q des Randes bestimmte Funktion der Bogenlänge σ ; r_{σ} bezeichnet die Entfernung zwischen dem inneren Punkte A und dem Randpunkte $Q(\sigma)$.

Bekanntlich sind die Grenzwerte des Potentials u und seiner Ableitungen $\frac{du}{dn}, \frac{du}{ds}$ in einem beliebigen Randpunkte P , dem die Bogenlänge s entspricht, durch folgende Formeln gegeben:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_P = \int_C \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \cdot \mu(\sigma) d\sigma, \\ \left(\frac{du}{dn}\right)_P = -\pi \dot{\mu}(s) + \int_C \frac{\sin \varphi_s}{r_{s\sigma}} \mu(\sigma) d\sigma, \\ \left(\frac{du}{ds}\right)_P = \int_C \frac{\cos \varphi_s}{r_{s\sigma}} \mu(\sigma) d\sigma, \end{array} \right.$$

wo $r_{s\sigma}$ die Entfernung der Punkte $P(s)$ und $Q(\sigma)$, und φ_s den Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und dem positiven Sinne der im Punkte P der Kurve C

gezogenen Tangente Pt bezeichnet. Für die Existenz der Grenzwerte u_P und $\left(\frac{du}{dn}\right)_P$ ist die Stetigkeit der Funktion $\mu(\sigma)$ hinreichend; die Existenz der Ableitung $\left(\frac{du}{ds}\right)_P$ wird von der Differenzierbarkeit der Funktion $\mu(\sigma)$ und der Existenz der Krümmung des Randes C im Punkte P sichergestellt.

Die Funktion $\frac{\sin \varphi_s}{r_{s\sigma}}$ in dem Ausdruck der Ableitung $\frac{du}{dn}$ bleibt beschränkt, wenn der Punkt Q gegen P oder σ gegen s strebt. Die Funktion $\frac{\cos \varphi_s}{r_{s\sigma}}$ in dem Ausdruck der Ableitung $\frac{du}{ds}$ wächst wie $\frac{1}{s-\sigma}$ unbeschränkt, wenn σ gegen s strebt, und das uneigentliche Integral in der dritten der Formeln (29) hat den Cauchyschen Hauptwert. Setzt man die Ausdrücke (29) in die Randbedingung (26), so überzeugt man sich, daß das logarithmische Potential (28) die Bedingung erfüllt, wenn die Funktion $\mu(s)$ die Gleichung

$$(30) \quad -\pi \mu(s) + \int_C \left[\frac{\sin \varphi_s}{r_{s\sigma}} + p(s) \frac{\cos \varphi_s}{r_{s\sigma}} + q(s) \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \right] \mu(\sigma) d\sigma + f(s) = 0$$

erfüllt. Wir haben also unsere Aufgabe auf die Bestimmung der Lösung $\mu(s)$ der Integralgleichung (30) zurückgeführt. Diese Integralgleichung hat die Gestalt einer Fredholmschen Gleichung zweiter Art mit einem singulären Kern. Setzen wir jetzt mit H. Poincaré voraus, daß der Rand C eine analytische Kurve ohne singuläre Punkte ist; wir setzen außerdem voraus, daß die gegebenen Funktionen $p(s)$, $q(s)$, $f(s)$ analytisch sind, eine der Länge der Kurve C gleiche Periode l haben, auf der reellen Achse reell sind und keine Singularitäten in einem die reelle Achse umgebenden Streifen besitzen. Nach diesen Voraussetzungen hat die Gleichung (30) die Gestalt

$$(31) \quad \mu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^r(s, \sigma)] \mu(\sigma) d\sigma,$$

wo die Funktionen

$$(32) \quad N(s, \sigma) = \frac{\sin \varphi_s}{r_{s\sigma}} + p(s) \frac{\cos \varphi_s}{r_{s\sigma}}; \quad L^r(s, \sigma) = q(s) \log \frac{1}{r_{s\sigma}}$$

die am Anfang dieser Arbeit zusammengestellten Eigenschaften besitzen.

Mit Hilfe der Methode der Iteration der Integralgleichung versuchen wir die Integralgleichung (31) mit dem unbeschränkten Kern auf eine Integralgleichung mit dem beschränkten Kern zurückzuführen. Eine solche Iteration stellt wegen des Gliedes mit einer Polsingularität größere Schwierigkeiten dar, als die gewöhnliche Iteration einer Integralgleichung, deren Kern eine Singularität einer niedrigen Ordnung hat. Die Funktion $\mu(s)$, die im

Intervall $(0, l)$ die Gleichung (31) erfüllt, soll auch die iterierte Gleichung erfüllen, d. h. die Gleichung

$$(33) \quad \mu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^r(s, \sigma)] f(\sigma) d\sigma \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^r(s, \sigma)] \left\{ \int_0^l [N(\sigma, \tau) + L^r(\sigma, \tau)] \mu(\tau) d\tau \right\} d\sigma,$$

die man auch nach der Zerlegung des Integrals folgendermaßen schreiben kann:

$$(34) \quad \mu(s) = f_1(s) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l N(s, \sigma) \left[\int_0^l L^r(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l L^r(s, \sigma) \left[\int_0^l N(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l L^r(s, \sigma) \left[\int_0^l L^r(\sigma, \tau) \mu(\tau) d\tau \right] d\sigma,$$

wo die bekannte Funktion $f_1(s)$ die Gestalt

$$(35) \quad f_1(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^r(s, \sigma)] f(\sigma) d\sigma$$

hat.

Die zitierte Transformation (4) und die bewiesenen Transformationen (16), (21), (23) der iterierten Integrale erlauben uns jetzt, die Integralgleichung (34) zu transformieren. Wir setzen $N_1(s, \sigma) = N(s, \sigma)$, $L_1(s, \sigma) = L(s, \sigma)$, $m(s, \sigma) = q(s)$, und wir stellen fest, daß, wenn eine in der Umgebung der Strecke AB holomorphe Funktion $\mu(s)$ in dem Intervall $(0, l)$ die iterierte Integralgleichung (34) erfüllt, diese Funktion auch die folgende Integralgleichung erfüllen soll:

$$(36) \quad \mu(s)[1 + R^2(s)] = f_1(s) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l [F(s, \tau) + F_1(s, \tau) + F_2(s, \tau) + F_3(s, \tau)] \mu(\tau) d\tau \\ - \int_s^l q(s) \left[R(s) + R(\tau) + \int_s^\tau q(\sigma) d\sigma \right] \mu(\tau) d\tau,$$

die man auch kurz folgendermaßen schreiben kann:

$$(37) \quad \mu(s) = \bar{f}(s) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^l \Phi(s, \tau) \mu(\tau) d\tau - \int_s^l \Psi(s, \tau) \mu(\tau) d\tau,$$

wenn man

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(s) = \frac{f_1(s)}{1 + R^2(s)}; \quad \Phi(s, \tau) = \frac{F(s, \tau) + F_1(s, \tau) + F_2(s, \tau) + F_3(s, \tau)}{1 + R^2(s)}, \\ \Psi(s, \tau) = \frac{q(s)}{1 + R^2(s)} \left[R(s) + R(\tau) + \int_s^\tau q(\sigma) d\sigma \right] \end{array} \right.$$

setzt. Die Funktionen F, F_1, F_2, F_3 , gegeben durch die Formeln (6), (16'), (22), (24), sind in Umgebung der Strecke $(0, l)$ holomorph; die Funktion $R(s)$ nimmt außerdem längs der reellen Achse reelle Werte an; es folgt daraus die wesentliche Eigenschaft der Kerne $\Phi(s, \tau)$ und $\Psi(s, \tau)$ der transformierten Integralgleichung (37), daß sie nämlich beschränkt und holomorph sind, wenn die Punkte s und τ in einiger Umgebung der Strecke $(0, l)$ bleiben. Ähnliche Eigenschaft hat die Funktion $f(s)$.

Die Gleichung (37) ist linear, doch ist sie formal weder eine Fredholmsche noch eine Volterrasche Gleichung, da sie gleichzeitig ein Integral mit festen Integrationsgrenzen und ein anderes mit der *veränderlichen* unteren Grenze s enthält.

Man kann die Gleichung (37) auf eine Fredholmsche Gleichung zurückführen. Bemerken wir nämlich, daß die Volterrasche Gleichung

$$(39) \quad \mu(s) = - \int_s^l \Psi(s, \tau) \mu(\tau) d\tau + \psi(s)$$

eine und nur eine Lösung von der Form

$$(40) \quad \mu(s) = \int_s^l \Gamma(s, \tau) \psi(\tau) d\tau + \psi(s)$$

hat, wo die Resolvente $\Gamma(s, \tau)$ die Summe einer absolut konvergenten Reihe

$$(41) \quad \Gamma(s, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(s, \tau)$$

ist. Die Funktionen $\Psi_n(s, \tau)$ sind in der Umgebung der Strecke $(0, l)$ holomorph und werden durch eine Rekursionsformel

$$(42) \quad \Psi_n(s, \tau) = \int_\tau^s \Psi_1(s, \sigma) \Psi_{n-1}(\sigma, \tau) d\sigma; \quad \Psi_1 = -\Psi$$

bestimmt. Es folgt daraus, daß die Lösung der Integralgleichung (37) auch die Lösung der Fredholmschen Gleichung

$$(43) \quad \mu(s) = \lambda \int_0^l K(s, \tau) \mu(\tau) d\tau + f_1(s); \quad \left(\lambda = \frac{1}{\pi^2}\right)$$

ist, und umgekehrt, wo der Kern $K(s, \tau)$ und die Funktion $f_1(s)$ durch die Formeln

$$(44) \quad \begin{cases} K(s, \tau) = \int_s^l \Gamma(s, \sigma) \Phi(\sigma, \tau) d\sigma + \Phi(s, \tau), \\ f_1(s) = \int_s^l \Gamma(s, \tau) f(\tau) d\tau + f(s) \end{cases}$$

ausgedrückt sind. Wenn die Konstante $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ kein Eigenwert des Kernes $K(s, \tau)$ ist, so hat die Fredholmsche Gleichung (43) eine und nur eine durch die bekannte Formel

$$(45) \quad \bar{\mu}(s) = \lambda \int_0^l \mathfrak{N}(s, \tau) f_1(\tau) d\tau + f_1(s)$$

ausgedrückte Lösung $\bar{\mu}$, wo $\mathfrak{N}(s, \tau)$ die Resolvente des Kernes $K(s, \tau)$ ist. Die Funktion $\Gamma(s, \sigma)$, als die Summe einer Reihe (41), ist in der Umgebung der Strecke $(0, l)$ holomorph; daraus folgt, daß die Funktionen $K(s, \tau)$, $\mathfrak{N}(s, \tau)$, $f_1(s)$ und auch die Lösung (45) in der Umgebung der Strecke $(0, l)$ holomorph sind. Nach den Formeln (4), (16), (21), (23), die für jede holomorphe Funktion μ gelten, erfüllt die Lösung $\bar{\mu}(s)$ der Gleichung (43) auch die iterierte Gleichung (34) oder (33). Wir wollen beweisen, daß die erhaltene Funktion $\bar{\mu}(s)$ auch die Urgleichung (31) im Intervall $(0, l)$ erfüllt. Setzen wir also die Lösung (45) der Gleichung (43) unter das Integrationszeichen der Gleichung (31) ein. Wir erhalten dann eine Funktion

$$(46) \quad \mu_1(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^*(s, \sigma)] \bar{\mu}(\sigma) d\sigma,$$

welche im Intervall $(0, l)$ definiert ist und dieselben Werte als eine in der Umgebung der Strecke $(0, l)$ holomorphe Funktion annimmt. Setzen wir noch einmal unter das Integrationszeichen der Gleichung (31) die Funktion $\mu_1(s)$ ein, so kommen wir zu der Funktion $\bar{\mu}(s)$ zurück:

$$(47) \quad \bar{\mu}(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^l [N(s, \sigma) + L^*(s, \sigma)] \mu_1(\sigma) d\sigma,$$

weil die Funktion $\bar{\mu}(s)$ die Lösung der iterierten Gleichung ist. Addiert man beiderseitig die Gleichungen (46) und (47), so überzeugt man sich, daß die Funktion $\frac{1}{2} [\bar{\mu}(s) + \mu_1(s)]$ eine Lösung der Urgleichung (31) ist. Eine solche Funktion soll aber auch die iterierte Gleichung (33) erfüllen. Da die letzte im untersuchten Falle genau eine Lösung $\bar{\mu}(s)$ hat, so folgt $\mu_1(s) = \bar{\mu}(s)$ im Intervall $(0, l)$. Die Funktion $\bar{\mu}(s)$ ist also im Intervall $(0, l)$ eine Lösung der Gleichung (31) und folglich der Gleichung (30), wenn für das Residuum $R(s)$ der Wert

$$R(s) = \lim_{\sigma \rightarrow s} (\sigma - s) N(s, \sigma) = p(s)$$

angenommen wird. Das logarithmische Potential

$$(48) \quad u(A) = \int_C \log \frac{1}{r_\sigma} \cdot \bar{\mu}(\sigma) d\sigma$$

der einfachen Schicht von der Dichte $\bar{\mu}(\sigma)$ ist eine Lösung der gestellten Aufgabe. Die Lösung der Poincaréschen Aufgabe für den Fall der allgemeinen Gleichung des elliptischen Typus habe ich in der am Anfang dieser Arbeit zitierten Abhandlung veröffentlicht

(Eingegangen am 30. 1. 1938.)

Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

E. Digel in Clausthal.

Vor kurzem hat Herr Wazewski die Existenz von Integralen der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right)$ unter geringeren Voraussetzungen bewiesen, als es bisher der Fall war¹⁾. Das Ergebnis gewinnt dadurch an Interesse, daß sich diese Voraussetzungen in gewisser Hinsicht nicht mehr vermindern lassen. Das geht aus den Beispielen hervor, die Herr Wazewski in seiner Arbeit angegeben hat. Beim Beweis seines Satzes benutzt Herr Wazewski Approximationen der Funktion f und der Anfangskurve und zieht außerdem Ergebnisse einer früheren Arbeit heran. Ich will nun zeigen, daß man denselben Satz einfacher beweisen kann, und zwar auf einem ähnlichen Wege, wie er bisher beim Beweis desselben Satzes unter schärferen Voraussetzungen eingeschlagen wurde²⁾. Ich beschränke mich dabei auf die Differentialgleichung $p = f(x, y, z, q)$. Um das wesentliche besser hervortreten zu lassen, unterwerfe ich y keiner Beschränkung und beweise den Satz in folgender Form³⁾:

Satz: *In dem Gebiet*

$$(1) \quad |x - \xi| < \alpha, \quad y, z, q \text{ beliebig,}$$

möge die Funktion $f(x, y, z, q)$ stetig sein und stetige partielle Ableitungen f_y, f_z, f_q nach y, z, q besitzen. Diese Ableitungen seien absolut genommen kleiner als A und mögen außerdem in (1) eine Lipschitzbedingung⁴⁾ in bezug auf y, z, q erfüllen. Die Lipschitzkonstante sei für alle drei Funktionen höchstens gleich A . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $A \geq 1$ angenommen werden.

¹⁾ Math. Zeitschr. 43 (1938), S. 522—532.

²⁾ Vgl. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 352. Leipzig 1930.

³⁾ Die Formulierung lehnt sich an die in Anmerkung 2 angegebenen Stelle an.

⁴⁾ Eine Funktion $h(x, y, z, q)$ erfüllt in (1) eine Lipschitzbedingung mit der Konstanten A , wenn

$$|h(x, y_2, z_2, q_2) - h(x, y_1, z_1, q_1)| \leq A(|y_2 - y_1| + |z_2 - z_1| + |q_2 - q_1|)$$

für beliebiges x aus $|x - \xi| < \alpha$ und beliebiges $y_1, \dots, q_2$ erfüllt ist.

Die Funktion $\omega(\eta)$ sei für alle η definiert, $\omega'(\eta)$ existiere überall, genüge einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten M , und es sei für eine Konstante B

$$(2) \quad 1 + |\omega'(\eta)| + M \leq B.$$

Schließlich möge die Beziehung

$$(3) \quad 4 a A B \leq 1$$

gelten. Dann hat die partielle Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

in dem Gebiet

$$(5) \quad |x - \xi| < a, \quad y \text{ beliebig,}$$

ein Integral $z = \psi(x, y)$, das die Kurve

$$(6) \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \omega(\eta)$$

für $-\infty < \eta < +\infty$ enthält.

Der Beweis benutzt mehrfach folgenden Hilfssatz⁵⁾:

Hilfssatz. Im Intervall $\langle a, b \rangle$ sei die Funktion $u(x)$ stetig und in $a \leq x < b$ nach rechts differenzierbar und erfülle für zwei Konstante $M > 0$ und $N \geq 0$ die Ungleichung

$$|u'_+(x)| \leq Mu(x) + N.$$

Dann ist für je zwei Zahlen x, ξ des Intervalls $\langle a, b \rangle$

$$|u(x)| \leq |u(\xi)| e^{M|x-\xi|} + \frac{N}{M} (e^{M|x-\xi|} - 1).$$

Der Beweis des Satzes wird in mehreren Abschnitten geführt.

1. Durch die Kurve (6) ist bereits ein Integralstreifen festgelegt, nämlich

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \omega(\eta), \quad q = \omega'(\eta), \quad p = f(\xi, \eta, \omega(\eta), \omega'(\eta)).$$

Das Integral wird dadurch bestimmt, daß durch diesen Integralstreifen die charakteristischen Streifen gelegt werden. Diese genügen dem folgenden System von Differentialgleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} y'(x) &= -f_q(x, y, z, q), \\ z'(x) &= f(x, y, z, q) - q f_q(x, y, z, q), \\ q'(x) &= f_y(x, y, z, q) + q f_z(x, y, z, q). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß auf Grund unserer Voraussetzungen durch jeden Punkt des Gebiets (1) genau eine Lösung des Systems (7) geht. Wir zeigen

⁵⁾ Vgl. z. B. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 93.

zunächst, daß die charakteristischen Streifen für $|x - \xi| < a$ existieren. Aus der dritten Gleichung von (7) folgt

$$|q'(x)| \leq A + A|q(x)|,$$

also nach dem Hilfssatz

$$|q(x)| < (1 + |q(\xi)|) e^{aA} - 1 = (1 + |\omega'(\eta)|) e^{aA} - 1 \leq B e^{aA} - 1.$$

Für eine spätere Anwendung schätzen wir q noch weiter ab, indem wir (3) benutzen, sowie die Ungleichungen $B \geq 1$ und $e^u \leq 1 + 2u$ für $0 \leq u \leq 1$ beachten:

$$(8) \quad |q(x)| < B e^{\frac{1}{B}} - 1 \leq B \left(1 + \frac{1}{2B}\right) - 1 < B.$$

Aus der zweiten und ersten Gleichung (7) folgt

$$(9) \quad |z(x) - z(\xi)| < aA(1 + |q(\xi)|) e^{aA}, \quad |y(x) - y(\xi)| < aA.$$

Bei festem Anfangspunkt sind also $y(x)$, $z(x)$ und $q(x)$ beschränkt; sie existieren daher für $|x - \xi| < a$.

2. Wir legen nun durch den gegebenen Anfangsstreifen die charakteristischen Streifen, die mit $Y(x, \eta)$, $Z(x, \eta)$, $Q(x, \eta)$ bezeichnet werden. Y, Z, Q sind stetige Funktionen der Variablen x und η , und es gilt

$$(10) \quad \begin{aligned} Y_x(x, \eta) &= -f_q(x, Y, Z, Q), \\ Z_x(x, \eta) &= f(x, Y, Z, Q) - Qf_q(x, Y, Z, Q), \\ Q_x(x, \eta) &= f_y(x, Y, Z, Q) + Qf_z(x, Y, Z, Q). \end{aligned}$$

Zunächst handelt es sich um den Nachweis, daß die Kurven $Y(x, \eta)$ (η wird als Parameter betrachtet) das Gebiet $|x - \xi| < a$, y beliebig, schlicht überdecken. Das wird sich aus der Abschätzung des Quotienten $\frac{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)}{\eta - \eta_0}$ ergeben. Wir benutzen folgende Abkürzungen ($\eta \neq \eta_0$):

$$(11) \quad u(x) = \frac{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)}{\eta - \eta_0}, \quad v(x) = \frac{Z(x, \eta) - Z(x, \eta_0)}{\eta - \eta_0}, \quad w(x) = \frac{Q(x, \eta) - Q(x, \eta_0)}{\eta - \eta_0}.$$

Weiterhin wird für $Y(x, \eta)$, $Y(x, \eta_0)$, $Z(x, \eta)$, $\dots$ einfach $Y, Y_0, Z, \dots$ geschrieben. Unter Benutzung von (10) erhält man

$$u'(x) = \frac{-f_q(x, Y, Z, Q) + f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{\eta - \eta_0}.$$

f_q erfüllt nun eine Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten A . Daher erhalten wir

$$(12) \quad |u'(x)| \leq As(x)$$

mit $s(x) = |u(x)| + |v(x)| + |w(x)|$. Aus der zweiten Gleichung (10) folgt

$$v'(x) = \frac{f(x, Y, Z, Q) - f(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{\eta - \eta_0} \frac{Q - Q_0}{\eta - \eta_0} f_q(x, Y, Z, Q) - Q_0 \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{\eta - \eta_0}$$

$$|v'(x)| \leq A s(x) + A |w(x)| + A |Q_0| s(x).$$

Wegen (8) und $B \geq 1$ haben wir

$$(13) \quad |v'(x)| \leq 2 A s(x) + A B s(x) \leq 3 A B s(x).$$

Mit Benutzung der dritten Gleichung (10) ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(14) \quad |w'(x)| \leq 3 A B s(x).$$

Nun besitzt $s(x)$ sicher eine rechtsseitige Ableitung $s'_+(x)$, und es ist wegen (12), (13), (14)

$$|s'_+(x)| \leq |u'(x)| + |v'(x)| + |w'(x)| \leq 7 A B s(x).$$

Nach dem Hilfssatz ist daher

$$s(x) \leq s(\xi) e^{7 A B |x - \xi|}.$$

Mit

$$s(\xi) = \left| \frac{Y - Y_0}{\eta - \eta_0} \right| + \left| \frac{Z - Z_0}{\eta - \eta_0} \right| + \left| \frac{Q - Q_0}{\eta - \eta_0} \right| = 1 + \left| \frac{\omega(\eta) - \omega(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \right| + \left| \frac{\omega'(\eta) - \omega'(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \right| \leq B$$

folgt hieraus

$$(15) \quad s(x) \leq B e^{7 A B |x - \xi|}.$$

Hiermit erhält man aus (12)

$$|u'(x)| \leq A B e^{7 A B |x - \xi|},$$

folglich

$$|u(x) - u(\xi)| \leq \frac{1}{7} (e^{7 A B |x - \xi|} - 1)$$

und mit Beachtung von (3), da $u(\xi) = 1$ ist,

$$(16) \quad |u(x) - 1| \leq \frac{1}{7} (e^{\frac{7}{4}} - 1) < 1.$$

Aus (16) geht hervor, daß es eine Zahl $\gamma > 0$ gibt, so daß

$$(17) \quad u(x) = \frac{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)}{\eta - \eta_0} \geq \gamma$$

für $|x - \xi| < a$ und beliebige Zahlen $\eta \neq \eta_0$ ist. Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar, daß $Y(x, \eta) \neq Y(x, \eta_0)$ für $\eta \neq \eta_0$ gilt. Andererseits ergibt sich aus der Abschätzung (9), daß die Funktion $Y(x, \eta)$ für jedes x aus $|x - \xi| < a$ beliebig große positive und beliebig große negative und also, infolge der Stetigkeit von $Y(x, \eta)$, jeden Wert annimmt. Daher läßt sich die Gleichung $y = Y(x, \eta)$ für $|x - \xi| < a$ und beliebiges y eindeutig nach η auflösen, und die Auflösung $\eta = \chi(x, y)$ existiert für $|x - \xi| < a$ und beliebiges y und ist in ihrem Definitionsbereich eine stetige Funktion.

3. Aus (15) und (17) folgen die Abschätzungen

$$\left| \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} \right| \leq \left| \frac{v(x)}{u(x)} \right| \leq \frac{s(x)}{\gamma} \leq \frac{B e^{\gamma A B |x - \xi|}}{\gamma}$$

und

$$\left| \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} \right| \leq \frac{B e^{\gamma A B |x - \xi|}}{\gamma}.$$

Es gibt also eine Konstante $C \geq 1$, so daß $\left| \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} \right| \leq C$ und $\left| \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} \right| \leq C$ ist.

4. Mit der am Ende von Abschnitt 2 konstruierten Funktion $\chi(x, y)$ bilden wir die Funktion $\psi(x, y) = Z(x, \chi(x, y))$ und beweisen, daß sie eine partielle Ableitung nach y mit dem Wert $Q(x, \chi(x, y))$ besitzt. Offenbar genügt es zu zeigen, daß

$$(18) \quad \lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \frac{Z(x, \eta) - Z(x, \eta_0)}{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)} = Q(x, \eta_0)$$

ist. Hierzu wird für beliebiges $\eta \neq \eta_0$

$$H(x, \eta) = \frac{Z(x, \eta) - Z(x, \eta_0)}{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)} - Q(x, \eta_0)$$

gesetzt. Dann ist mit Benutzung von (10) (die Striche bedeuten Ableitungen nach x)

$$\begin{aligned} H'(x, \eta) &= \frac{Z'(x, \eta) - Z'(x, \eta_0)}{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)} - \frac{Z(x, \eta) - Z(x, \eta_0)}{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)} \frac{Y'(x, \eta) - Y'(x, \eta_0)}{Y(x, \eta) - Y(x, \eta_0)} - Q'(x, \eta_0) \\ &= \frac{f(x, Y, Z, Q) - f(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} - \frac{Q f_q(x, Y, Z, Q) - Q_0 f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} \\ &\quad + \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} \\ &\quad - f_y(x, Y_0, Z_0, Q_0) - Q_0 f_z(x, Y_0, Z_0, Q_0) \\ &= \frac{f(x, Y, Z, Q) - f(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} - \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} f_q(x, Y, Z, Q) \\ &\quad - Q_0 \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} \\ &\quad + \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} \\ &\quad - f_y(x, Y_0, Z_0, Q_0) - Q_0 f_z(x, Y_0, Z_0, Q_0). \end{aligned}$$

Indem wir auf das erste Glied rechts den Mittelwertsatz anwenden und das dritte und vierte Glied zusammenfassen, erhalten wir mit $0 < \vartheta < 1$

$$\begin{aligned} H'(x, \eta) &= f_y(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) + \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} f_z(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) \\ &\quad + \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} f_q(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) - \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} f_q(x, Y, Z, Q) \\ &\quad + H(x, \eta) \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0} \\ &\quad - f_y(x, Y_0, Z_0, Q_0) - Q_0 f_z(x, Y_0, Z_0, Q_0). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung des zweiten und letzten Gliedes ergibt sich

$$\begin{aligned} H'(x, \eta) &= [f_y(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) - f_y(x, Y_0, Z_0, Q_0)] \\ &\quad + \frac{Z - Z_0}{Y - Y_0} [f_z(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) - f_z(x, Y_0, Z_0, Q_0)] \\ &\quad + \frac{Q - Q_0}{Y - Y_0} [f_q(x, Y_0 + \vartheta(Y - Y_0), \dots) - f_q(x, Y, Z, Q)] \\ &\quad + H(x, \eta) f_z(x, Y_0, Z_0, Q_0) + H(x, \eta) \frac{f_q(x, Y, Z, Q) - f_q(x, Y_0, Z_0, Q_0)}{Y - Y_0}. \end{aligned}$$

Wenn wir die in Abschnitt 3 angegebenen Abschätzungen verwenden und beachten, daß f_y, f_z, f_q Lipschitzbedingungen erfüllen, so folgt

$$\begin{aligned} |H'(x, \eta)| &\leq (A + 2AC)|Y - Y_0| + 2C(A + 2AC)|Y - Y_0| \\ &\quad + A|H(x, \eta)| + (A + 2AC)|H(x, \eta)| \\ &\leq 9AC^2|Y - Y_0| + 4AC|H(x, \eta)|. \end{aligned}$$

Ist nun ein $\varepsilon > 0$ und ein a_1 , $0 < a_1 < a$, vorgegeben, so gibt es offenbar ein $\delta > 0$, so daß für $|\eta - \eta_0| < \delta$ und alle $|x - \xi| \leq a_1$

$$|H'(x, \eta)| \leq \varepsilon + K|H(x, \eta)|$$

ist ($K > 0$ eine Konstante). Durch Anwendung des Hilfssatzes folgt dann

$$\begin{aligned} |H(x, \eta)| &\leq \left| \frac{Z(\xi, \eta) - Z(\xi, \eta_0)}{\eta - \eta_0} - Q(\xi, \eta_0) \right| e^{Ka} + \frac{\varepsilon}{K} (e^{Ka} - 1) \\ &= \left| \frac{\omega(\eta) - \omega(\eta_0)}{\eta - \eta_0} - \omega'(\eta_0) \right| e^{Ka} + \frac{\varepsilon}{K} (e^{Ka} - 1), \end{aligned}$$

also $\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} |H(x, \eta)| \leq \frac{\varepsilon}{K} (e^{Ka} - 1)$ für jedes $\varepsilon > 0$ und daher $\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} H(x, \eta) = 0$.

Damit ist (18) bewiesen und auch die Stetigkeit von $\psi_y(x, y)$, da ja $Q(x, \chi(x, y))$ eine stetige Funktion ist.

5. Es ist noch zu zeigen, daß $\psi(x, y)$ eine stetige Ableitung nach x hat und der Differentialgleichung genügt. Der Punkt x_0, y_0 sei innerhalb des Gebietes (1) fest gewählt, x_n ($n = 1, 2, \dots$) eine Zahlenfolge mit dem Limes x_0 . Wir wollen die Folge der Differenzenquotienten $\frac{\psi(x_n, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{x_n - x_0}$ untersuchen. Die Zahlen η_n und η_0 seien definiert durch

$$(19) \quad \eta_n = \chi(x_n, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Aus (19) folgt

$$(20) \quad y_0 = Y(x_n, \eta_n) = Y(x_0, \eta_0).$$

Ist $\eta_n \neq \eta_0$ für unendlich viele n , so ist für diese n nach (17) auch $Y(x_n, \eta_n) \neq Y(x_n, \eta_0)$ und es gilt, wenn man noch (20) beachtet,

$$\psi(x_n, y_0) - \psi(x_0, y_0)$$

$$= \frac{Z(x_n, \eta_n) - Z(x_n, \eta_0)}{Y(x_n, \eta_n) - Y(x_n, \eta_0)} (Y(x_0, \eta_0) - Y(x_n, \eta_0)) + Z(x_n, \eta_0) - Z(x_0, \eta_0).$$

Wenn nun $x_n \rightarrow x_0$, so ist auch $\eta_n \rightarrow \eta_0$ und $\frac{Z(x_n, \eta_n) - Z(x_n, \eta_0)}{Y(x_n, \eta_n) - Y(x_n, \eta_0)}$ hat den Limes $Q(x_0, \eta_0)$ wegen (18) und der Stetigkeit von $Q(x, \eta)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{\psi(x_n, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{x_n - x_0} &= -Q(x_0, \eta_0) Y'(x_0, \eta_0) + Z'(x_0, \eta_0) \\ &= Q_0 f_a(x_0, Y_0, Z_0, Q_0) + f(x_0, Y_0, Z_0, Q_0) - Q_0 f_a(x_0, Y_0, Z_0, Q_0) \\ &= f(x_0, Y_0, Z_0, Q_0). \end{aligned}$$

Ist für unendlich viele n das durch (19) definierte η_n gleich η_0 , so haben wir für diese n

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x_n, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{x_n - x_0} &= \frac{Z(x_n, \eta_0) - Z(x_0, \eta_0)}{x_n - x_0} \rightarrow Z'(x_0, \eta_0) \\ &= f(x_0, Y_0, Z_0, Q_0) - Q_0 f_a(x_0, Y_0, Z_0, Q_0). \end{aligned}$$

Nun gilt aber $f_a(x_0, Y_0, Z_0, Q_0) = -Y'(x_0, \eta_0) = 0$, da $Y(x_n, \eta_0) = Y(x_0, \eta_0)$ für unendlich viele n ist. Folglich haben wir auch in diesem Falle das Ergebnis

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{\psi(x_n, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{x_n - x_0} = f(x_0, Y_0, Z_0, Q_0).$$

Gehört die Zahlenfolge x_n nicht zu der einen oder anderen der eben betrachteten Art, so läßt sie sich in zwei Zahlenfolgen der betrachteten Art aufspalten. Die Funktion $\psi(x, y)$ hat daher eine stetige partielle Ableitung nach x und erfüllt die Differentialgleichung.

(Eingegangen am 28. März 1938.)

Minimumsprobleme für Summen absoluter Beträge.

Von

Hermann Raff in Tübingen.

Einleitung.

Die gebräuchlichen Verfahren zur Limitierung von Zahlenfolgen genügen ausnahmslos der Permanenzforderung, d. h. jeder konvergenten Folge wird durch das betreffende Verfahren ein konvergenter Prozeß zugeordnet, dessen Grenzwert mit demjenigen der Ausgangsfolge übereinstimmt. Diese Permanenzforderung spielt in der einschlägigen Literatur eine wesentliche Rolle; für die Matrizenverfahren ist sie eingehend von I. Schur betrachtet und durch ein ihr äquivalentes System von Bedingungen über die Matrizenmitglieder ersetzt worden¹⁾. Aber nur selten ist bisher untersucht worden, welche Grenzwerte sich ergeben können, wenn man auf beschränkte divergente Folgen solche Matrizenverfahren anwendet, die der Permanenzforderung oder den angedeuteten Toeplitz-Schurschen Bedingungen genügen²⁾. Diese Fragestellung, die entsprechenden Beweise und Ergebnisse lassen sich von der Theorie der Matrizenverfahren leicht ablösen; die Fragestellung führt auf die nachstehend formulierten, auch an sich interessierenden Minimumsprobleme für Summen absoluter Beträge.

Sind in der Ebene der komplexen Zahlen endlich viele Punkte $x_1, x_2, \dots, x_k$ gegeben und sind diesen Punkten beziehentlich die komplexen Werte $m_1, \dots, m_k$ mit der Summe 1 zugeordnet (diese Werte seien vorderhand Massen genannt), so heißt der Punkt $z = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k$ der Schwerpunkt der betreffenden Masseverteilung. Und man erkennt unmittelbar, daß es zu den gegebenen Punkten $x_1, \dots, x_k$ und dem gegebenen Schwerpunkt z gewisse Masseverteilungen $\{m_1, \dots, m_k\}$ der Beziehungen

$$(A) \quad m_1 + m_2 + \dots + m_k = 1 \quad \text{und} \quad m_1 x_1 + \dots + m_k x_k = z$$

gibt, wofern es sich um mindestens zwei verschiedene x_k handelt; z. B. besitzt das System (A) für $k = 2$ und $x_1 \neq x_2$ ersichtlich die einzige Lösung

$$(1) \quad m_1 = \frac{z - x_2}{x_1 - x_2}, \quad m_2 = \frac{x_1 - z}{x_1 - x_2}.$$

¹⁾ I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 151 (1921), S. 79—111. Unter der Voraussetzung zeilenfiniter Matrizen findet sich derselbe Satz schon bei O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. 22 (1911), S. 113—119.

²⁾ H. Raff, Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen, Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 1—33; R. Rado, Linear transformations of sequences, Philosophical Transact. of the R. Soc. of London, Ser. A, 235 (1936), S. 367—414.

Man setze nun zunächst voraus, daß die x_k die Ecken eines konvexen k -Ecks sind, daß also Massen nur den Ecken des konvexen Vielecks $x_1 x_2 \dots x_k$ zugewiesen werden können. Für $k \geq 3$ ergeben sich dann $(k-2)$ -fach unendlich viele Lösungen von (A)³⁾. Aus der Gesamtheit dieser Lösungen sollen jetzt diejenigen herausgegriffen werden, für welche die verteilte Absolutmasse

$$|m_1| + |m_2| + \dots + |m_k|$$

ein Minimum ist. Dieser Minimalwert soll in Analogie zu einem Begriff aus der Theorie der Matrizenverfahren die Norm des Systems (A) oder auch die Norm des Punktes z in bezug auf die Punkte $x_1, \dots, x_k$ genannt werden; entsprechende Lösungen sollen normierte Lösungen von (A) oder normierte Lösungen von z in bezug auf $x_1, \dots, x_k$ heißen. Dabei ist noch offen, ob es überhaupt solche normierte Lösungen gibt. Somit besteht das

Problem A. $x_1, x_2, \dots, x_k$ seien die Ecken eines konvexen Vielecks, z sei ein fester Punkt der Ebene dieses Vielecks. Man setze

$$N(z; x_1, x_2, \dots, x_k) = \inf \{|m_1| + \dots + |m_k|\},$$

wo zur Konkurrenz alle Lösungen des Systems (A) zugelassen sind. Kann der Wert $N(z; x_1, \dots, x_k)$ explizit angegeben werden, gibt es normierte Lösungen von (A), und welches sind diese Lösungen?

Im Falle $k = 2$ ist (1) als einzige Lösung von (A) auch die einzige normierte Lösung von (A); es gilt

$$(2) \quad N(z; x_1, x_2) = \frac{|z - x_1| + |z - x_2|}{|x_1 - x_2|},$$

d. h. $N(z; x_1, x_2)$ ist gleich dem reziproken Wert der numerischen Exzentrizität der Ellipse mit den Brennpunkten x_1 und x_2 , die durch z geht. Weiter ist ersichtlich die Menge derjenigen z , für die bei vorgegebenem $N_1 \geq 1$

$$N(z; x_1, x_2) \leq N_1$$

bleibt, identisch mit den Punkten der Ellipse

$$(3) \quad \frac{|z - x_1| + |z - x_2|}{|x_1 - x_2|} \leq N_1.$$

Für eigentliche Vielecke $x_1 x_2 \dots x_k$ ist eine ähnlich naheliegende Lösung nicht bekannt. Durch direkte Abschätzung, Spiegelung am Kreis und mit Hilfsmitteln aus der Theorie der Punktmengen hat aber R. Rado das eben aufgeführte Problem A und auch denjenigen Sonderfall des alsbald zu

³⁾ Sollen ausschließlich nichtnegative Massen verwendet werden, so muß z im Vieleck $x_1 x_2 \dots x_k$ liegen; die Beschränkung auf reelle m_x führt im Falle $k = 3$ auf die bekannten Dreieckskoordinaten.

nennenden, noch tiefer führenden Problems B erledigt, der sich durch Beschränkung auf endliche Summen in (B) ergibt⁴⁾.

Problem B. $\mathfrak{X}$ sei eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge, z ein fester Punkt der Ebene der komplexen Zahlen. Man setze

$$N(z, \mathfrak{X}) = \underline{\text{fin}} \{|m_1| + |m_2| + \dots\},$$

wo zur Konkurrenz alle Lösungen des Systems

$$(B) \quad x_v \in \mathfrak{X}; \quad m_1 + m_2 + \dots = 1; \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots = z$$

zugelassen sind (man beachte, daß hierbei also auch die $\{x_v\}$ als höchstens abzählbare Teilmengen von $\mathfrak{X}$ variabel sind). Kann der Wert $N(z, \mathfrak{X})$ explizit angegeben werden; gibt es normierte Lösungen von (B), und welches sind diese Lösungen?

Dabei ist eine Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ des Systems (B) dann als normierte Lösung bezeichnet, wenn

$$|m_1| + |m_2| + \dots = N(z, \mathfrak{X})$$

ist; eine solche normierte Lösung von (B) werde auch eine normierte Lösung von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ genannt.

In § 1 wird das Problem A, in § 2 das Problem B auf wesentlich elementarerem Wege und zum Teil mit anderen Methoden gelöst, als sie Rado bei seinen entsprechenden Untersuchungen verwendet hat. Die dabei gewonnenen Sätze gehen über die bisher bekannten Sätze hinaus, weil $N(z, \mathfrak{X})$ bei jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{X}$ explizit angegeben wird, falls der kleinste konvexe und $\mathfrak{X}$ enthaltende Bereich ein Polygon ist (Satz 2, 5 und 8), ferner weil bei allgemeinem zugelassenem $\mathfrak{X}$ in (B) unendlich viele m_x und x_x auftreten können und schließlich weil nachgewiesen wird, daß jede normierte Lösung von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ als nichtnegative Linearkombination entsprechender normierter „Hauptlösungen“ darstellbar ist (Satz 4 und 12). In § 3 wird dann die Frage nach der Menge $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ derjenigen Punkte z beantwortet, für die bei vorgegebenem $N_1 \geq 1$

$$(4) \quad N(z, \mathfrak{X}) \leq N_1$$

bleibt; auch diese Resultate reichen über die Radoschen hinaus, u. a. weil $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ für wichtige Sonderfälle explizit angegeben wird (Satz 19) und weil in (B) unendliche Summen zugelassen sind.

Auf die nach dem Radoschen Vorgang naheliegende Betrachtung von Masseverteilungen mittels zweidimensionaler Lebesgue-Stieltjesscher Integrale wird verzichtet, da dieser Integralbegriff wesentlich tiefer liegt als jeder der im folgenden verwendeten Begriffe.

⁴⁾ In seiner in Fußnote 2 genannten Arbeit.

Von den nachstehend gewonnenen Resultaten werden an anderer Stelle⁵⁾ wichtige Anwendungen gegeben; dabei werden die Sätze der vorliegenden Arbeit auf eine die Matrizenverfahren enthaltende, aber wesentlich weitere Klasse von Limitierungsverfahren ausgedehnt, nämlich auf die Integraltransformationen der Form

$$(5) \quad g(y) = \int_0^{\tau} \varphi(t, y) f(t) dt.$$

Dabei wird gezeigt werden:

$f(t)$ sei über jedes abgeschlossene Teilintervall von $(0, \tau)$ integrierbar und besitze für $t \rightarrow \tau$ die beschränkte Häufungsmenge $\mathfrak{X}$; es sei $N_1 \geq 1$ vorgegeben. Dafür, daß bei jedem solchen $f(t)$ die Häufungsmenge von $g(y)$ für $y \rightarrow \eta$ in $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ liegt, ist notwendig und hinreichend, daß die Transformation (5) regulär⁶⁾ und daß

$$(6) \quad \lim_{\substack{T \rightarrow \tau \\ y \rightarrow \eta}} \int_T^{\tau} |\varphi(t, y)| dt \leq N_1$$

ist. Zu jedem solchen $f(t)$ läßt sich eine reguläre Vermittlungsfunktion $\varphi(t, y)$ der Eigenschaft (6) so finden, daß das entsprechende $g(y)$ eine vorgegebene abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ zur Häufungsmenge hat.

Als Sonderfall gewinnt man hieraus eine gewisse Verschärfung des Knopp'schen Kernsatzes⁷⁾, nämlich ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der Kern von $f(t)$ für $t \rightarrow \tau$ den Kern von $g(y)$ für $y \rightarrow \eta$ enthält.

§ 1.

Die Lösung des Problems A.

Die bei der Formulierung des Problems A verwendeten Bezeichnungen und Begriffe werden übernommen. Die Lösung $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ des Systems (A) heiße eine *nichtnegative Lösung*, falls

$$m_{\kappa} \geq 0 \quad \text{für } \kappa = 1, 2, \dots, k$$

⁵⁾ Als Fortsetzung der ersten in Fußnote 6 genannten Arbeit.

⁶⁾ Die Transformation (5) und die Vermittlungsfunktion $\varphi(t, y)$ dieser Transformation heißen regulär, wenn bei der obigen Integrierbarkeitsvoraussetzung aus der Konvergenz von $f(t)$ für $t \rightarrow \tau$ die Konvergenz von $g(y)$ für $y \rightarrow \eta$ und die Gleichheit der beiden in Rede stehenden Grenzwerte folgt. Die bisher allgemeinsten Sätze mit Bedingungen, die für die Regularität der Transformation (5) zugleich notwendig und hinreichend sind, habe ich in den beiden nachstehend aufgeführten Arbeiten gegeben: Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen I, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 629, Satz VII; Über lineare Integraltransformationen, Monatsh. f. Math. u. Physik 45 (1937), S. 386, Satz 6.

⁷⁾ K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 115.

ist (z ist dann Punkt des Vielecks $x_1 x_2 \dots x_k$); sie heiße eine *normierte Hauptlösung*, falls sie eine normierte Lösung ist und höchstens drei der Werte $m_x \neq 0$ sind. Jede nichtnegative Lösung ist hiernach eine normierte Lösung.

Allgemein ist bekannt

Satz 1. Für jedes z des Vielecks $x_1 x_2 \dots x_k$ ist

$$N(z; x_1, \dots, x_k) = 1.$$

Für Randpunkte z von $x_1 x_2 \dots x_k$ gibt es genau eine nichtnegative Lösung von (A); für innere Punkte von $x_1 x_2 \dots x_k$ gibt es genau so viele verschiedene nichtnegative Hauptlösungen von (A) wie Punkte-
tripel $\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\}$ und Punktepaare $\{x_\mu, x_\nu\}$ der-
art, daß z innerer Punkt des Dreiecks $x_\lambda x_\mu x_\nu$,
oder innerer Punkt der Strecke $x_\mu \dots x_\nu$, ist⁸⁾.

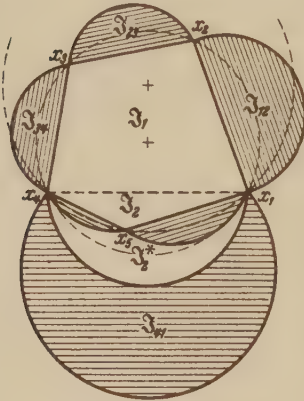


Abb. 1

1. Die Bereiche Z_1, Z_1^* und $Z_{\mu, \nu}$ (Abb. 1)⁹⁾.

Man bestimme diejenigen Kreise R , die $Z \equiv x_1 x_2 \dots x_k$ enthalten und deren Rand durch mindestens drei Eckpunkte von Z geht. Aus dieser Kreismenge wähle man einen ersten Kreis R_1 aus; allgemein schließe man im $(p+1)$ -ten Schritt an die in den ersten p Schritten gewonnene Folge $R_1, \dots, R_{p-1}, \dots, R_p$ diejenigen Kreise der obengenannten Kreismenge an, die von $R_1, \dots, R_p$ verschieden sind und einen der

Kreise $R_{p-1}, \dots, R_p$ in zwei Ecken von Z schneiden: $R_{p+1}, \dots, R_{p+1}$. Die entstehende abbrechende Kreisfolge heiße (R_λ) ; der Rand von R_λ wird mit

$$\xi_\lambda = |y - a_\lambda| = r_\lambda$$

bezeichnet, wobei ersichtlich $a_\lambda \neq a_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ ist.

⁸⁾ Wie man leicht erkennt, gibt es bei innerem Punkte z von $x_1 x_2 \dots x_k$ für $k=3$ genau eine, für $k=4$ genau zwei normierte Hauptlösungen von (A). Für $k \geq 5$ ist die Anzahl der normierten Hauptlösungen nicht allein von k , sondern auch von der Lage des Punktes z im k -Eck abhängig. Da sich für die inneren Punkte des Durchschnittes der Teildreiecke $x_1 x_2 x_3$ und $x_2 x_3 x_4$ von $x_1 x_2 \dots x_k$ genau $k-2$ normierte Hauptlösungen von (A) ergeben, erkennt man sofort, daß in dem folgenden, durch vollständige Induktion leicht zu beweisenden Satz der Wert $k-2$ durch keinen besseren ersetzt werden kann: Bei jedem inneren Punkt z von $x_1 x_2 \dots x_k$ gibt es mindestens $k-2$ nichtnegative Hauptlösungen von (A).

⁹⁾ Die in der vorliegenden Arbeit genannten Bereiche sind, sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt wird, als abgeschlossen vorausgesetzt.

$\mathfrak{Z}_i$ sei der kleinste konvexe Bereich der auf $\mathfrak{f}_i$ gelegenen Ecken von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_i^*$ das Spiegelbild von $\mathfrak{Z}_i$ an $\mathfrak{f}_i$. Diejenigen Seiten des Vielecks

$$\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \dots + \mathfrak{Z}_{i_p},$$

die Eckenlinien von $\mathfrak{Z}$ sind, stellen nach Konstruktion Eckenlinien von $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \dots + \mathfrak{Z}_{i_{p+1}}$ dar, sind aber weder Seiten noch Eckenlinien von $\mathfrak{Z}_1 + \dots + \mathfrak{Z}_{i_{p-1}}$, d. h. jede der betreffenden Seiten ist Schnittsehne zweier Kreise $\mathfrak{R}_{\lambda'}$ und $\mathfrak{R}_\lambda$ der Beziehung $\lambda_{p-1} < \lambda' \leq \lambda_p < \lambda \leq \lambda_{p+1}$, wobei $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ ist und p die Werte $1, 2, \dots$ durchläuft. Solche in zwei Ecken von $\mathfrak{Z}$ sich schneidende Kreise $\mathfrak{R}_{\lambda'}$ und $\mathfrak{R}_\lambda$ der obigen Folge seien zugeordnete Kreise genannt. Mit $\mathfrak{R}_\lambda$ bezeichne man weiter bei $\lambda = 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + 1, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1}$ die Summe des über der Schnittsehne der zugeordneten Kreise $\mathfrak{R}_{\lambda'}$ und $\mathfrak{R}_\lambda$ stehenden, den Bereich $\mathfrak{Z}_1 + \dots + \mathfrak{Z}_{i_p}$ nicht enthaltenden Abschnitts von $\mathfrak{R}_{\lambda'}$ und des Spiegelbilds dieses Abschnitts an $\mathfrak{f}_{\lambda'}$. Für $\mathfrak{Z}_i$ und $\mathfrak{Z}_i^*$ mit $i = 1, 2, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ sei schon bewiesen, daß die $\mathfrak{Z}_i^*$ paarweise untereinander und mit jedem $\mathfrak{Z}_i$ höchstens Ecken von $\mathfrak{Z}$ gemein haben und daß der Durchschnitt von jedem dieser $\mathfrak{Z}_i$ und $\mathfrak{Z}_i^*$ mit jedem $\mathfrak{R}_\lambda$ der Nummer $\lambda = 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + 1, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1}$ keinen inneren Punkt besitzt. Da nun die $\mathfrak{Z}_i^*$ für $i^* = 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + 1, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1}$ bis auf die zugehörigen Ecken von $\mathfrak{Z}$ total in genau einem der genannten $\mathfrak{R}_\lambda$ liegen¹⁰⁾, haben die $\mathfrak{Z}_i^*$ für $i = 1, 2, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1}$ paarweise untereinander und mit jedem solchem $\mathfrak{Z}_i$ höchstens Ecken von $\mathfrak{Z}$ gemein und weiter enthält der Durchschnitt von jedem dieser $\mathfrak{Z}_i^*$ und $\mathfrak{Z}_i$ mit jedem $\mathfrak{R}_\lambda$ der Nummer $\lambda = 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+1} + 1, \dots, 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+2}$ keinen inneren Punkt.

Falls $x_\mu \dots x_\nu$ Eckenlinie von $\mathfrak{Z}$ ist, bezeichne man mit $\mathfrak{Z}_\mu$, dasjenige Kreisbogenzweieck, das $\mathfrak{Z}$ nicht enthält und dessen Ränder die Spiegelbilder von $x_\mu \dots x_\nu$ an den einander zugeordneten Kreisen $\mathfrak{f}_{\lambda'}$ und $\mathfrak{f}_\lambda$ mit den Schnittpunkten x_μ und x_ν sind. Schließlich sei $\mathfrak{Z}_\nu$ die Summe des über der Seite $x_\mu \dots x_\nu$ von $\mathfrak{Z}$ stehenden, den Bereich $\mathfrak{Z}$ nicht enthaltenden Abschnitts von $\mathfrak{R}_\lambda$ und des Spiegelbilds dieses Abschnitts an $\mathfrak{f}_\lambda$, wo $\mathfrak{R}_\lambda$ der durch x_μ und x_ν gehende Kreis der obengenannten Folge ($\mathfrak{R}_\lambda$) ist; dabei gilt $\mathfrak{Z}_{k, k+1} = \mathfrak{Z}_{k1}$. Somit gewinnt man in

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \sum \mathfrak{Z}_i + \sum \mathfrak{Z}_i^* + \sum \mathfrak{Z}_\mu$$

eine Aufteilung der Ebene $\mathfrak{E}$ des Vielecks $\mathfrak{Z}$ derart, daß die $\mathfrak{Z}_i^*$ paarweise untereinander und mit jedem $\mathfrak{Z}_i$ höchstens Ecken von $\mathfrak{Z}$ gemein haben, daß die Durchschnitte $\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_\mu$ und $\mathfrak{Z}_i^* \mathfrak{Z}_\nu$ keine inneren Punkte besitzen und daß die $\mathfrak{Z}_\mu$ paarweise untereinander höchstens Ecken von $\mathfrak{Z}$ gemein haben.

¹⁰⁾ Es wird gesagt, $\mathfrak{A}$ liege total in $\mathfrak{B}$, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

Man beachte, daß μ und ν nach Konstruktion von $\mathfrak{J}_u$, nicht unabhängig voneinander sind und daß die geleistete Aufteilung (7) von der Reihenfolge der $\mathfrak{R}_\lambda$ nicht abhängt.

2. Die normierten Hauptlösungen von (A) für z von $\mathfrak{J}_\lambda^*$.

Satz 2. Für jedes z von $\mathfrak{J}_\lambda^*$ ist

$$(8) \quad N(z; x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{|z - a_\lambda|}{r_\lambda}.$$

Es gibt endlich viele normierte Hauptlösungen $\{m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*\}$ von (A) für z , und zwar genau so viele, wie es nichtnegative Hauptlösungen $\{M_1^*, M_2^*, \dots, M_k^*\}$ von (A) für $z^* = \frac{z - a_\lambda}{|z - a_\lambda|^2} r_\lambda^2 + a_\lambda$ derart gibt, daß den nicht auf $\mathfrak{f}_\lambda$ gelegenen x_κ der Wert $M_\kappa^* = 0$ entspricht. Durch

$$(9) \quad m_\kappa^*(x_\kappa - a_\lambda) = M_\kappa^*(z - a_\lambda) \quad \text{für } \kappa = 1, 2, \dots, k$$

sind die Lösungen der beiden Arten einander umkehrbar eindeutig zugeordnet¹¹⁾.

Beweis. z^* ist der in $\mathfrak{J}_\lambda$ gelegene Spiegelpunkt von z an $\mathfrak{f}_\lambda$. Für jede Lösung $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ der im Satz genannten Art gilt

$$M_\kappa^* \geq 0 \quad \text{für } \kappa = 1, 2, \dots, k; \quad \sum_{\kappa=1}^k M_\kappa^* = 1; \quad \sum_{\kappa=1}^k M_\kappa^* x_\kappa = z^*.$$

Für das dieser Lösung in (9) zugewiesene Wertsystem $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ ist dann

$$(10, 1) \quad \sum_1^k m_\kappa^* = \frac{z - a_\lambda}{|x_\kappa - a_\lambda|^2} \sum M_\kappa^* \overline{(x_\kappa - a_\lambda)} = \frac{(z - a_\lambda) \overline{(z^* - a_\lambda)}}{r_\lambda^2} = 1$$

und

$$(10, 2) \quad \sum_1^k m_\kappa^* (x_\kappa - a_\lambda) = (z - a_\lambda) \sum M_\kappa^* = z - a_\lambda$$

sowie

$$(10, 3) \quad \sum_1^k |m_\kappa^*| = \frac{|z - a_\lambda|}{r_\lambda}.$$

Da nun bei jeder Lösung $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ von (A) für z

$$|z - a_\lambda| = \left| \sum_1^k m_\kappa (x_\kappa - a_\lambda) \right| \leq r_\lambda \sum_1^k |m_\kappa|$$

ist, also nach Definition von $N(z; x_1, \dots, x_k)$

$$N(z; x_1, \dots, x_k) \geq \frac{|z - a_\lambda|}{r_\lambda}$$

¹¹⁾ Bei jeder solchen normierten Hauptlösung $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ sind demnach alle diejenigen $m_\kappa^* = 0$, die einem nicht auf $\mathfrak{f}_\lambda$ gelegenen x_κ entsprechen. Also ist in diesem Falle die Anzahl und die Gestalt der normierten Hauptlösungen allein durch die auf $\mathfrak{f}_\lambda$ gelegenen Ecken von $\mathfrak{J}_\lambda$ bestimmt. Vgl. zu diesem Satz Rado, a. a. O. S. 401, Theorem 17.

gilt, so folgt aus (10), daß (8) gilt und daß $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ eine Lösung der behaupteten Art ist.

Ist umgekehrt $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ eine gegebene normierte Hauptlösung von (A) für z , so haben wegen

$$(11) \quad \sum m_x^* (x_x - a_\lambda) = z - a_\lambda \quad \text{und} \quad \sum |m_x^*| |x_x - a_\lambda| = |z - a_\lambda|$$

die Werte $z - a_\lambda$ und $m_x^* (x_x - a_\lambda)$ für $x = 1, \dots, k$ denselben Arkus, sofern $m_x^* (x_x - a_\lambda) \neq 0$ ist¹²⁾. Für das in (9) zugeordnete Weitsystem $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ gilt dann $M_x^* \geq 0$ und

$$\sum_1^k M_x^* = \frac{1}{z - a_\lambda} \sum m_x^* (x_x - a_\lambda) = 1$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_1^k M_x^* (x_x - a_\lambda) &= \sum \frac{m_x^* (x_x - a_\lambda)}{z - a_\lambda} \cdot \overline{(x_x - a_\lambda)} \\ &= \frac{r_\lambda^2}{|z - a_\lambda|^2} \sum \overline{m_x^*} (z - a_\lambda) = z^* - a_\lambda \end{aligned}$$

(bei dieser Umformung wird benötigt, daß $m_x^* = 0$ für $|x_x - a_\lambda| < r_\lambda$ ist), d. h. $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ ist eine Lösung der behaupteten Art.

Nach dem bisherigen Beweis sind die normierten Hauptlösungen $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ und $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die normierten Hauptlösungen $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ aber übersieht man leicht: Sie sind im wesentlichen identisch mit den Tripeln $M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}$ der Dreieckskoordinaten des Punktes z^* in bezug auf diejenigen Teildreiecke $x_{x_1} x_{x_2} x_{x_3}$ von $\mathfrak{Z}_\lambda$, die z^* enthalten und deren Ecken auf $\mathfrak{f}_\lambda$ liegen. Man braucht nur zu setzen

$$M_x^* = \begin{cases} M_x & \text{für } x = x_1, x_2, x_3, \\ 0 & \text{sonst für } x = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Da es aber nur endlich viele solcher Tripel gibt, gibt es für z von $\mathfrak{Z}_\lambda$ und von $\mathfrak{Z}_\lambda^*$ auch nur endlich viele normierte Hauptlösungen¹³⁾.

3. Die normierten Lösungen von (A) für z von $\mathfrak{Z} + \Sigma \mathfrak{Z}_\lambda^*$.

Satz 3. Die normierten Lösungen $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ von (A) für z von $\mathfrak{Z}_\lambda^*$ und diejenigen nichtnegativen Lösungen $\{M_1^*, \dots, M_k^*\}$ von (A) für

¹²⁾ Bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π . Diese Ergänzung soll im folgenden als selbstverständlich wegb bleiben.

¹³⁾ Und zwar nach Fußnote 8 für innere Punkte von $\mathfrak{Z}_\lambda^*$ mindestens $k_\lambda - 2$, wenn k_λ die Eckenzahl von $\mathfrak{Z}_\lambda$ ist.

$z^* = \frac{z - a_\lambda}{|z - a_\lambda|^2} r_\lambda^2 + a_\lambda$, bei denen jedem nicht auf $\mathfrak{f}_\lambda$ gelegenen x_λ der Wert $M_x^* = 0$ entspricht, sind einander durch (9) umkehrbar eindeutig zugeordnet¹⁴⁾.

Der Beweis stimmt bis auf den sich erübrigenden Schlußabsatz fast wörtlich mit demjenigen von Satz 2 überein.

Fortan wird gesagt, $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ gehe durch nichtnegative Linearkombination aus den endlich oder unendlich vielen Ausdrücken $\{m_{n1}, \dots, m_{nk}\}$ hervor ($n = 1, 2, \dots$), falls

$$(12) \quad M_x = p_1 m_{1x} + p_2 m_{2x} + \dots \quad \text{für } x = 1, 2, \dots, k$$

ist, wo $p_1 + p_2 + \dots = 1$ und $p_n \geq 0$ für $n = 1, 2, \dots$ ist. Bei dieser Bezeichnung gilt

Satz 4. Jede nichtnegative Linearkombination normierter Lösungen von (A) für festes z von $\mathfrak{J} + \sum \mathfrak{J}_\lambda^*$ ergibt eine normierte Lösung von (A) für dasselbe z , und jede solche normierte Lösung läßt sich darstellen durch nichtnegative Linearkombination der normierten Hauptlösungen von (A) für z .

Beweis. Wenn $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ eine nichtnegative Linearkombination der im Satze genannten Art ist, so gilt

$$\sum_{x=1}^k m_x = \sum_{x=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} p_n m_{nx} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{x=1}^k m_{nx} = 1$$

und

$$\sum_1^k m_x x_x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{x=1}^k m_{nx} x_x = z$$

sowie

$$N(z; x_1, \dots, x_k) \leq \sum_{x=1}^k |m_x| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{x=1}^k |m_{nx}| = N(z; x_1, \dots, x_k),$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Nun sei $\{m_1^*, \dots, m_k^*\}$ eine feste normierte Lösung von (A) für z von $\mathfrak{J}$ oder von $\mathfrak{J}_\lambda^*$. Ist $\mathfrak{J}$ ein Dreieck, so ist diese Lösung eine normierte Hauptlösung und die Behauptung ist trivial. Als Induktionsvoraussetzung kann demnach verwendet werden, daß die zweite Behauptung schon für $(k-1)$ -Ecke $\mathfrak{J}$, d. h. aber ersichtlich auch, daß sie schon für solche Lösungen bewiesen sei, in denen mindestens ein $m_x^* = 0$ ist. Somit kann $m_1^* m_2^* \dots m_k^* \neq 0$ gedacht werden. Ist jetzt $\{m_1^{**}, m_2^{**}, \dots, m_k^{**}\}$ eine normierte Hauptlösung von (A) für z (die Existenz solcher Lösungen ist nach Satz 2 gesichert), so bilde man für die von 0 verschiedenen der Werte m_x^{**} die Quotienten $\frac{m_x^*}{m_x^{**}}$;

¹⁴⁾ Auf die normierten Lösungen haben also nur die auf $\mathfrak{f}_\lambda$ gelegenen Ecken von $\mathfrak{J}_\lambda$ einen Einfluß. Vgl. Rado, a. a. O. S. 401, Theorem 17.

diese sind reell und nichtnegativ, weil aus (11) bei jeder normierten Lösung $\{m_1, \dots, m_k\}$ von (A) für z

$$(13) \quad \arccos m_x (x_x - a_x) = \arccos (z - a_x) \quad \text{für } x = 1, 2, \dots, k \quad \text{und} \quad m_x \neq 0$$

folgt; der kleinste dieser Quotienten $\frac{m_x^*}{m_x^{**}}$ wird q genannt. Hiernach und wegen $q < 1$ stellt $\{m_1'', \dots, m_k''\}$ mit

$$m_x'' = \frac{m_x^* - q m_x^{**}}{1 - q} \quad \text{für } x = 1, 2, \dots, k$$

eine normierte Lösung von (A) für z derart dar, daß mindestens ein $m_x'' = 0$ ist. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung folgt aus $m_x'' (1 - q) + q m_x^{**} = m_x^*$ sofort die zweite Behauptung.

4. Die normierten Lösungen von (A) für z von $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$.

Satz 5. Für jedes z von $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ ist

$$(14) \quad N(z; x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{|z - x_\mu| + |z - x_\nu|}{|x_\mu - x_\nu|}.$$

Es gibt genau eine normierte Lösung von (A) für dieses z , nämlich

$$(15) \quad m_x^* = \begin{cases} \frac{z - x_\nu}{x_\mu - x_\nu} & \text{für } x = \mu \\ \frac{x_\mu - z}{x_\mu - x_\nu} & \text{für } x = \nu \\ 0 & \text{sonst für} \\ & x = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Für die Randpunkte von $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ stimmen diese Aussagen mit den entsprechenden Ergebnissen der Sätze 1 und 2 überein.

Beweis (Abb. 2). Da die Behauptung für Punkte der Durchschnitte $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ nach Satz 1 gesichert ist, kann z als nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörig vorausgesetzt werden.

Man verlängere die Strecke $x_\mu \dots z$ über z hinaus um $|z - x_\nu|$ bis z_1 , dann ist

$$(16) \quad |z_1 - x_\mu| = |z - x_\mu| + |z - x_\nu|.$$

Hierauf zeichne man die Streckenzüge $x_\nu z' z$ und $z^* z' x_\nu$ ähnlich zum Streckenzug $x_\nu x_\mu z_1$, so daß gilt

$$(17) \quad \frac{z' - z}{z' - x_\nu} = \frac{x_\mu - z_1}{x_\mu - x_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{z' - x_\nu}{z' - z^*} = \frac{x_\mu - z_1}{x_\mu - x_\nu}.$$

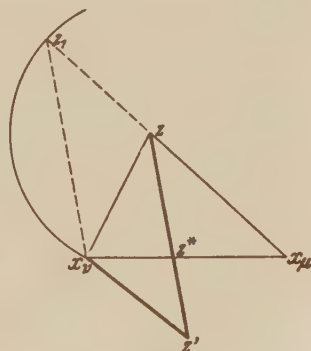


Abb. 2

Hieraus ergibt sich

$$|z - z'| \cdot |z^* - z'| = |z' - x_v|^2,$$

d. h. z und z^* sind spiegelbildlich gelegen in bezug auf den Rand $\mathfrak{k}_0$ des Kreises

$$\mathfrak{R}_0 \equiv |y - z'| \leq |z' - x_v| = |z' - x_\mu|.$$

z gehört also zum Spiegelbild der Strecke $x_\mu \dots x_v$ an $\mathfrak{k}_0$. Weil das Spiegelbild von $x_\mu \dots x_v$ am Rande eines jeden durch x_μ und x_v gehenden Kreises $\mathfrak{R}$ genau dann zu $\mathfrak{J}_{u,v}$ gehört, wenn $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{R}$ liegt, muß $\mathfrak{J}$ auch in $\mathfrak{R}_0$ liegen, und zwar liegt $\mathfrak{J}$ bis auf x_μ und x_v total in $\mathfrak{R}_0$, falls z innerer Punkt von $\mathfrak{J}_\mu$ ist.

Bei jeder Lösung $\{m_1, \dots, m_k\}$ von (A) für z gilt demnach

$$|z - z'| \leq |z' - x_v| (|m_1| + |m_2| + \dots + |m_k|),$$

d. h. nach (16) und (17)

$$(18) \quad |m_1| + |m_2| + \dots + |m_k| \geq \frac{|z - z'|}{|z' - x_v|} = \frac{|z_1 - x_\mu|}{|x_\mu - x_v|} = \frac{|z - x_\mu| + |z - x_v|}{|x_\mu - x_v|}.$$

Weil für (15) hierin das Gleichheitszeichen richtig ist, gilt (14) und stellt (15) eine normierte Lösung von (A) dar.

Sei jetzt z innerer Punkt von $\mathfrak{J}_{u,v}$. Dann gilt (weil x_μ und x_v auf $\mathfrak{k}_0$, die übrigen x_κ aber im Innern von $\mathfrak{R}_0$ liegen) in (18) das Größerzeichen, wenn mindestens ein $m_\kappa \neq 0$ ist für die von μ und v verschiedenen κ . Verschwindet aber m_κ für diese κ , so ergibt sich aus (A) gerade die Lösung (15).

Ist jedoch unter den getroffenen Einschränkungen z Randpunkt von $\mathfrak{J}_{u,v}$, so ist $\mathfrak{R}_0$ mit einem der in 1 konstruierten $\mathfrak{R}_\lambda$ identisch und z auch Randpunkt von $\mathfrak{J}_\lambda^*$. Nach Satz 2 gibt es dann, weil z^* auf $x_\mu \dots x_v$ liegt, genau eine normierte Hauptlösung, nach Satz 4 also genau eine normierte Lösung von (A) für z^* und für z .

Somit ist (15) in den beiden Unterfällen die einzige normierte Lösung, und damit ist das Problem A im vollen Umfang gelöst.

Die numerische Gleichheit der Lösungen (9) und (15) für die nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Randpunkte von $\mathfrak{J}_{u,v}$ ersieht man auch direkt sehr einfach: Nach (9) ist

$$(9a) \quad m_\mu^* = \frac{z^* - x_v}{x_\mu - x_v} \cdot \frac{z - z'}{x_\mu - z'}; \quad m_v^* = \frac{-z^* + x_\mu}{x_\mu - x_v} \cdot \frac{z - z'}{x_v - z'},$$

$$m_\kappa^* = 0 \text{ sonst für } \kappa$$

die normierte Lösung von (A) für z bei der gewohnten Bedeutung von z^* . Mit Hilfe der aus Abb. 2 abzulesenden Beziehungen

$$\frac{z^* - x_v}{z - x_v} = \frac{x_\mu - z'}{z - z'} \quad \text{und} \quad \frac{z^* - x_\mu}{z - x_\mu} = \frac{x_v - z'}{z - z'}$$

folgt aus (9a) unmittelbar die Darstellung (15).

§ 2.

Die Lösung des Problems B.

Fortan werden die bei der Formulierung des Problems B verwendeten Bezeichnungen und Begriffe benützt. Eine normierte Lösung von (B) soll dann eine *normierte Hauptlösung* genannt werden, wenn höchstens drei der Werte $m_x \neq 0$ sind. Zwei Lösungen von (B) sollen gleich heißen, wenn jedem x_x , dem in der einen Lösung ein nicht verschwindendes m_x zugeordnet ist, in der anderen Lösung dasselbe m_x entspricht. Mit $\mathfrak{X}_1$ sei der kleinste konvexe Bereich bezeichnet, der $\mathfrak{X}$ enthält.

5. Einige Sonderfälle des Problems B.

Es gilt der folgende bekannte Satz:

Satz 6. Für jedes z von $\mathfrak{X}_1$ ist

$$N(z, \mathfrak{X}) = N(z, \mathfrak{X}_1) = 1.$$

Es gibt genau so viele verschiedene normierte Hauptlösungen von (B), wie es Dreiecke $x_\lambda x_\mu x_\nu$ und Strecken $x_\mu \dots x_\nu$ derart gibt, daß diese x -Werte zu $\mathfrak{X}$ gehören und daß z im Innern des Dreiecks $x_\lambda x_\mu x_\nu$ oder auf der Strecke $x_\mu \dots x_\nu$ mit Ausschluß der Endpunkte liegt, wozu gegebenenfalls noch die Hauptlösung

$$m_x = 1 \quad \text{für} \quad z = x_x$$

tritt.

Satz 7. $\mathfrak{X}_1$ sei eine Strecke $x_\mu \dots x_\nu$ und z ein nicht zu $\mathfrak{X}_1$ gehöriger Punkt. Dann ist

$$m_\mu^* = \frac{z - x_\nu}{x_\mu - x_\nu}; \quad m_\nu^* = \frac{x_\mu - z}{x_\mu - x_\nu}$$

die einzige normierte Lösung von (B) für z , und es gilt

$$N(z, \mathfrak{X}) = N(z, \mathfrak{X}_1) = N(z; x_\mu, x_\nu) = \frac{|z - x_\mu| + |z - x_\nu|}{|x_\mu - x_\nu|}.$$

Satz 8. $\mathfrak{X}_1$ sei ein konvexes Vieleck $x_1 x_2 \dots x_k$ und z ein nicht zu $\mathfrak{X}_1$ gehöriger Punkt. Auf Zahl und Art der normierten Hauptlösungen und der normierten Lösungen von (B) für z haben nur diejenigen Punkte von $\mathfrak{X}$ einen Einfluß, die Eckpunkte von $\mathfrak{X}_1$ sind, d. h. es ist

$$N(z, \mathfrak{X}) = N(z, \mathfrak{X}_1) = N(z; x_1, \dots, x_k),$$

und die Sätze 2 bis 5 gelten wörtlich für z von $\mathfrak{J}_\lambda^*$ und für z von $\mathfrak{J}_\mu$, wenn $\mathfrak{J}_\lambda^*$ und $\mathfrak{J}_\mu$ zu $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{X}_1$ genau so bestimmt sind wie in 1.¹⁵⁾

Beweis zu Satz 7 und Satz 8. Unter den Voraussetzungen des Satzes 8 bezeichne

$$(19) \quad |y - z'| \leq r$$

¹⁵⁾ Siehe Fußnote 14.

für z von $\mathfrak{J}_\lambda^*$ den Kreis $\mathfrak{R}_\lambda$; für z von $\mathfrak{J}_{\mu\nu}$ und im Falle des Satzes 7 sei (19) zu x_μ, x_ν und z ebenso bestimmt, wie beim Beweis von Satz 5 der Kreis $|y - z'| \leq |z' - x_\nu|$ festgelegt wurde. Für jede Lösung $\{m_1, \dots, m_k, \dots\}$ von (B) mit einem $m_x \neq 0$ und einem zugeordneten x_x derart, daß x_x nicht Endpunkt der Strecke $x_\mu \dots x_\nu$, oder nicht Eckpunkt von $\mathfrak{J}$ ist, gilt dann

$$|m_1| + \dots + |m_k| + \dots > \frac{|z - z'|}{r},$$

d. h. wegen $N(z; x_1, \dots, x_k) = \frac{|z - z'|}{r}$, daß $\{m_1, m_2, \dots\}$ nicht normiert ist.

Nach diesen Sätzen hat es einen Sinn, von normierten Lösungen und normierten Hauptlösungen für z in bezug auf ein Vieleck $\mathfrak{J}$ oder eine Strecke $x_\mu \dots x_\nu$ zu sprechen.

6. Der Wert $N(z, \mathfrak{X})$ für allgemeines zugelassenes $\mathfrak{X}$.

Wenn $\mathfrak{X}$ im konvexen Vieleck $\mathfrak{J}$ oder auf der Strecke $\mathfrak{J} \equiv x_\mu \dots x_\nu$ liegt, ist jede Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) mit $x_x \in \mathfrak{X}$ auch für dasselbe z eine Lösung von (B) mit $x_x \in \mathfrak{J}$, d. h. es gilt

$$(20) \quad N(z, \mathfrak{X}) = \inf \{|m_1| + |m_2| + \dots\} \geq N(z, \mathfrak{J}).$$

Hilfssatz 1. $N(z, \mathfrak{X})$ ist gleichmäßig stetig in z .

Beweis. Nach Definition von $N(z, \mathfrak{X})$ gibt es bei beliebig klein vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) für jedes z_1 , so daß

$$(21) \quad N(z_1, \mathfrak{X}) \leq |m_1| + |m_2| + \dots < N(z_1, \mathfrak{X}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. d sei der Durchmesser von $\mathfrak{X}$. Für zwei feste Punkte x' und x'' von $\mathfrak{X}$ mit einem Abstand $\geq \frac{d}{2}$ setze man bei zunächst noch frei wählbarem z

$$m'_1 = \frac{-z_1 + z}{x' - x''}; \quad m'_2 = \frac{-z + z_1}{x' - x''}; \quad m'_x = m_{x-2} \quad \text{für } x = 3, 4, \dots$$

Dann gilt

$$\sum m'_x = 1 \quad \text{und} \quad m'_1 x' + m'_2 x'' + m'_3 x_1 + \dots = z.$$

Für $|z - z_1| < \frac{\varepsilon d}{8}$ ist weiter

$$N(z, \mathfrak{X}) \leq |m'_1| + |m'_2| + \dots < N(z_1, \mathfrak{X}) + \frac{\varepsilon}{2} + 2 \frac{|z - z_1|}{|x' - x''|} < N(z_1, \mathfrak{X}) + \varepsilon.$$

Bei Vertauschung von z und z_1 folgt für $|z - z_1| < \frac{\varepsilon d}{8}$ entsprechend

$$N(z_1, \mathfrak{X}) < N(z, \mathfrak{X}) + \varepsilon,$$

und die beiden letzten Beziehungen liefern die Behauptung.

Wenn $\mathfrak{X}_1$ ein konvexer Bereich, aber kein Vieleck und keine Strecke ist, lege man jetzt eine Folge von Vielecken $\mathfrak{P}_n$ derart fest, daß $\mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{P}_{n+1}$

liegt, daß die Ecken von $\mathfrak{P}_n$ zu $\mathfrak{X}$ gehören und Randpunkte von $\mathfrak{X}_1$ sind und daß es zu jedem x von $\mathfrak{X}$ ein x' von $\mathfrak{P}_n$ der Beziehung $|x - x'| < \frac{1}{n}$ gibt. Bei festem z konvergiert dann die Folge $N(z, \mathfrak{P}_n)$ als eine nach (20) beschränkte, monoton fallende Folge. Weiter gilt

Satz 9. Auf jedem Kreise $|z| \leq R$ konvergiert die Folge $N(z, \mathfrak{P}_n)$ gleichmäßig gegen $N(z, \mathfrak{X})$.

Beweis. N_0 sei obere Schranke von $N(z, \mathfrak{X})$ auf dem Kreise $|z| \leq R$, d der Durchmesser von $\mathfrak{X}$. Nach Wahl eines beliebig kleinen $0 < \varepsilon < N$ ist für jedes $n > \frac{1}{\delta} = \frac{32 N_0}{d \varepsilon}$ und jedes z_1 von $|z| \leq R$

$$(22) \quad N(z_1, \mathfrak{X}) \leq N(z_1, \mathfrak{P}_n) < N(z_1, \mathfrak{X}) + \varepsilon.$$

Denn jede normierte Lösung für z_1 in bezug auf $\mathfrak{P}_n$ ist für dasselbe z_1 eine Lösung von (B) mit $x_x \in \mathfrak{X}$, d. h. die erste Beziehung (22) ist richtig. — Weiter gibt es eine Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) mit $x_x \in \mathfrak{X}$, die (21) befriedigt. Jedem dieser x_x wird ein y_x von $\mathfrak{P}_n$ der Beziehung $|x_x - y_x| < \frac{1}{n}$ zugeordnet, hierauf $\mathfrak{P}_n$ mit einem Netz von Quadraten der Seitenlänge $\frac{\delta}{2} \sqrt{2}$ überdeckt (wobei die Berandung so gewählt sei, daß jeder Punkt von $\mathfrak{P}_n$ genau einem Quadrat zugewiesen ist), und schließlich wird den im selben Quadrat liegenden Punkten y_x ein und derselbe Punkt x'_x von $\mathfrak{P}_n$ der Beziehung $|y_x - x'_x| \leq \delta$ zugewiesen. Dann ist

$$\sum m_x x'_x = z_1 + \varepsilon' \quad \text{mit} \quad |\varepsilon'| < \left(\delta + \frac{1}{n}\right) N_0 < \frac{\varepsilon}{16} d.$$

Also folgt, wenn $\mathfrak{P}'_n$ das kleinste, die Punkte x'_x enthaltende konvexe Vieleck ist, unter Verwendung von (20)

$$N(z_1 + \varepsilon', \mathfrak{P}_n) \leq N(z_1 + \varepsilon', \mathfrak{P}'_n) \leq |m_1| + |m_2| + \dots < N(z_1, \mathfrak{X}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wendet man hierin auf $N(z, \mathfrak{P}_n)$ die beim Beweis von Hilfssatz 1 gewonnene Abschätzung an, so ergibt sich für $|\varepsilon'| < \frac{\varepsilon d}{16}$ gerade die zweite Behauptung (22), und damit ist Satz 9 bewiesen.

7. Der charakteristische Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$.

Wenn $\mathfrak{X}_1$ ein Vieleck oder eine Strecke und z ein Punkt außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ ist, gibt es, wie beim Beweis von Satz 7 und 8 zusammenfassend vermerkt wurde, einen Kreis

$$(19a) \quad \mathfrak{K}(z, \mathfrak{X}) \equiv |y - a| \leq r,$$

auf dessen Rand mindestens zwei Punkte von $\mathfrak{X}$ liegen, und für den

$$(23) \quad |z - a| = r \cdot N(z, \mathfrak{X})$$

gilt. Daß es nur einen solchen Kreis gibt, wird in Satz 10 mitbewiesen werden.

Sei jetzt $\mathfrak{X}$ eine beschränkte abgeschlossene Menge derart, daß $\mathfrak{X}_1$ keine Strecke und kein Vieleck ist, und sei wieder z ein Punkt außerhalb von $\mathfrak{X}$. Dann wird $\mathfrak{X}_1$ durch eine Folge von Polygonen $\mathfrak{P}_n$ der in 6. genannten Art approximiert; weiter wird eine normierte Hauptlösung $\{m_{n\lambda}, m_{n\mu}, m_{n\nu}\}$ von z in bezug auf $\mathfrak{P}_n$ bestimmt und hierbei $m_{n\nu} = 0$ gedacht, wenn $m_{n\lambda} m_{n\mu} m_{n\nu} = 0$ ist. Im entsprechenden Tripel $\{x_{n\lambda}, x_{n\mu}, x_{n\nu}\}$ soll für $m_{n\nu} = 0$ insbesondere $x_{n\mu} = x_{n\nu}$ sein. Wegen der Beschränktheit der Folgen $(m_{n\kappa})$ und $(x_{n\kappa})$ läßt sich eine Folge natürlicher Zahlen p so wählen, daß $(m_{p\kappa})$ und $(x_{p\kappa})$ für $\kappa = \lambda, \mu, \nu$ konvergieren; m_κ und x_κ seien die entsprechenden Grenzwerte. Die Punkte x_κ gehören zu $\mathfrak{X}$; es gilt

$$m_\lambda + m_\mu + m_\nu = 1 \quad \text{und} \quad m_\lambda x_\lambda + m_\mu x_\mu + m_\nu x_\nu = z$$

sowie nach Satz 9

$$|m_\lambda| + |m_\mu| + |m_\nu| = \lim_{p \rightarrow \infty} \{|m_{p\lambda}| + |m_{p\mu}| + |m_{p\nu}|\} = \lim_{p \rightarrow \infty} N(z, \mathfrak{P}_p) = N(z, \mathfrak{X}),$$

d. h. $\{m_\lambda, m_\mu, m_\nu\}$ ist bei dem genannten $\mathfrak{X}$ eine normierte Hauptlösung von (B) für z . Daraus folgt unmittelbar

$$(24) \quad N(z, \mathfrak{X}) > 1,$$

da eine Lösung $\{m_\lambda, m_\mu, m_\nu\}$ mit $|m_\lambda| + |m_\mu| + |m_\nu| = 1$ einem Punkte von $\mathfrak{X}_1$ entsprechen würde.

Jedem dieser $\mathfrak{P}_n$ wird ein jetzt mit $|y - a_n| \leq r_n$ bezeichneter Kreis (19a) zugeordnet. Die entsprechenden Folgen (a_n) und (r_n) sind beschränkt, da wegen

$$r_n = \text{Max} |x - a_n| \quad \text{für } x \in \mathfrak{X}$$

bei unbegrenztem Wachstum von (a_n) bzw. (r_n) die Werte $\frac{|z - a_n|}{r_n} \rightarrow 1$ streben würden, während doch $1 < N(z, \mathfrak{X}) \leq N(z, \mathfrak{P}_n) = \frac{|z - a_n|}{r_n}$ ist. Somit kann wieder eine Folge natürlicher Zahlen p so gewählt werden, daß $a_p \rightarrow a$ und $r_p \rightarrow r$ strebt. Der Kreis

$$(19b) \quad \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}) \equiv |y - a| \leq r$$

enthält die Mengen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, auf seinem Rande liegen mindestens zwei Punkte von $\mathfrak{X}$, nämlich x_λ, x_μ, x_ν , und es gilt

$$(23b) \quad |z - a| = r \cdot N(z, \mathfrak{X}).$$

Der oben für spezielles $\mathfrak{X}$, hier allgemein definierte Kreis $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ wird der *charakteristische* Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ genannt. Zur Begründung dieser Bezeichnung wird der für Polygone schon angekündigte Satz bewiesen.

Satz 10. $\mathfrak{X}$ sei eine beschränkte abgeschlossene Menge, z ein Punkt außerhalb von $\mathfrak{X}_1$. Für jeden die Menge $\mathfrak{X}$ enthaltenden Kreis $\mathfrak{R} \equiv |y - a'| \leq r'$ gilt dann

$$(25) \quad |z - a'| \leq r' \cdot N(z, \mathfrak{X}),$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen für genau einen Kreis, eben für $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$, den charakteristischen Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ ¹⁶⁾.

Beweis. Bei jeder normierten Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) für z ist

$$(26) \quad |z - a'| = |m_1(x_1 - a') + m_2(x_2 - a') + \dots| \leq r'(|m_1| + |m_2| + \dots).$$

Aus den Festlegungen folgt, daß für $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}) \equiv |z - a| \leq r$ in (25) das Gleichheitszeichen richtig ist.

Sei nun $\mathfrak{R}'$ ein fester Kreis, für den in (25) und (26) das Gleichheitszeichen gilt. Wenn $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ verschieden wäre, müßte $\{m_1, m_2, \dots\}$ eine Lösung des Systems

$$m' + m'' = 1; \quad m'x' + m''x'' = z$$

sein, wo x' und x'' die Schnittpunkte der Ränder von $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ sind. Aus (26) würde dann folgen

$$|m'| + |m''| = \left| \frac{z - a'}{x' - a'} \right| = \left| \frac{z - a}{x' - a} \right| \quad \text{und} \quad \text{arc } m' = \text{arc } \frac{z - a'}{x' - a'} = \text{arc } \frac{z - a}{x' - a},$$

was aber $\frac{z - a'}{x' - a'} = \frac{z - a}{x' - a}$ oder $a = a'$ und damit auch $r = r'$ nach sich zöge. Damit ist ein Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ erzielt; also müssen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ identisch sein, w. z. b. w.

Dieser Satz ist ersichtlich gleichwertig mit

Satz 10a. Für jedes z außerhalb von $\mathfrak{X}$ ist

$$N(z, \mathfrak{X}) = \text{Max}_a \frac{|z - a|}{r(a)},$$

wo $r(a)$ den Radius des kleinsten um a zu beschreibenden und $\mathfrak{X}$ enthaltenden Kreises ist und a die komplexen Zahlen durchläuft. Es gibt genau ein a^* derart, daß $N(z, \mathfrak{X}) = \frac{|z - a^*|}{r(a^*)}$ ist; $|y - a^*| \leq r(a^*)$ ist der charakteristische Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$.

8. Normierte Lösungen von z in bezug auf $\mathfrak{X}$.

Satz 11. Auf Zahl und Art der normierten Lösungen und der normierten Hauptlösungen von (B) für z außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ haben nur die auf $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$ gelegenen Punkte von $\mathfrak{X}$ einen Einfluß, wo $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X}) \equiv |y - a| = r$ den Rand des charakteristischen Kreises von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ bezeichnet.

¹⁶⁾ Rado, a. a. O. S. 397 und 400, Theorem 14 und 16.

z^* , das Spiegelbild von z an $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$, gehört zum kleinsten konvexen Bereich der auf $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$ gelegenen Punkte von $\mathfrak{X}$. Die normierten Lösungen $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) für z und diejenigen (nichtnegativen) normierten Lösungen $\{M_1, M_2, \dots\}$ von (B) für z^* , bei denen $M_x = 0$ ist für die nicht auf $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$ gelegenen x_x , sind einander durch

$$(27) \quad m_x(x_x - a) = M_x(z - a)$$

umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Jedem Dreieck $x_\lambda x_\mu x_\nu$ und jeder Strecke $x_\mu \dots x_\nu$, derart, daß diese x -Werte zu $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$ und zu $\mathfrak{X}$ gehören und daß z^* innerer Punkt von $x_\lambda x_\mu x_\nu$ bzw. von $x_\mu \dots x_\nu$ ist, entspricht in (27) umkehrbar eindeutig eine normierte Hauptlösung von (B) für z , die im zweiten Fall auch explizit durch (15) gegeben ist¹⁷⁾.

Beweis. Jede Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) für z derart, daß einem im Innern von $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ gelegenen x_x ein $m_x \neq 0$ entspricht, ist nicht normiert wegen

$$|z - a| < r(|m_1| + |m_2| + \dots).$$

Ist $(\mathfrak{P}_n)$ eine Polygonfolge der in 6. genannten Art, so gehört z_n^* , das Spiegelbild von z an $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{P}_n)$, zu $\mathfrak{P}_n$. Da nach 7. die Kreisfolge $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{P}_n)$ gegen $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$ konvergiert, strebt z_n^* gegen das Spiegelbild von z an $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$, also eben gegen z^* .

Die übrigen Behauptungen folgen wie die Behauptungen des Satzes 2 oder sind in den Sätzen 2 und 5 enthalten.

Zu jeder normierten Lösung $\{m_1, m_2, \dots\}$ von (B) für z außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ findet man also $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ sofort wie folgt: Wenn mindestens drei $m_x \neq 0$ sind, zeichne man den Umkreis eines Dreiecks $x_\lambda x_\mu x_\nu$, derart, daß $m_\lambda m_\mu m_\nu \neq 0$ ist. Sind aber genau die beiden Werte m_μ und m_ν von 0 verschieden und sind x_μ und x_ν die zugeordneten Werte, so zeichne man den charakteristischen Kreis von z in bezug auf x_μ und x_ν wie beim Beweis von Satz 5. Nach der letzten Behauptung des Satzes 11 übersieht man dann die normierten Hauptlösungen von (B) für das betreffende z und diese normierten Hauptlösungen bilden, wie alsbald gezeigt wird, ein „normiertes Hauptsystem“ der Lösungen von (B) für z .

Es werde entsprechend zu 3. gesagt, $\{m_1, m_2, \dots\}$ gehe durch nicht-negative Linearkombination aus den endlich oder unendlich vielen Ausdrücken $\{m_{n1}, m_{n2}, \dots\}$ hervor ($n = 1, 2, \dots$), falls

$$m_x = p_1 m_{1x} + p_2 m_{2x} + \dots \quad \text{für } x = 1, 2, \dots$$

¹⁷⁾ Rado, a. a. O. S. 401, Theorem 17.

ist, wo $p_1 + p_2 + \dots = 1$ und $p_n \geq 0$ für $n = 1, 2, \dots$ ist. Dabei soll jedem m_{n_x} für $n = 1, 2, \dots$ dasselbe x_x entsprechen. Dann gilt in Erweiterung von Satz 4

Satz 12. *$\mathfrak{X}$ sei eine beschränkte abgeschlossene Menge und z ein Punkt der Ebene dieser Menge. Jede nichtnegative Linearkombination normierter Lösungen von (B) für z ergibt eine normierte Lösung derselben Art, und jede solche normierte Lösung läßt sich darstellen als nichtnegative Linearkombination normierter Hauptlösungen von (B) für z .*

Beweis. Die erste Behauptung wird wie die erste Behauptung von Satz 4 bewiesen; die zweite Behauptung aber erfordert etwas tiefergehende Untersuchungen.

$\{m_1, m_2, \dots\}$ sei eine normierte Lösung von (B) für z , deren Zerlegbarkeit nachzuweisen ist. Wegen Satz 4 können unendlich viele $m_x \neq 0$ gedacht werden. Weiter kann vorausgesetzt werden, daß $z \neq x_x$ für $m_x \neq 0$ ist. Denn wenn $z = x_v$ bei festem v ist und $0 < m_v < 1$ gilt, so stellt $\{m'_1, m'_2, \dots\}$ mit

$$m'_x = \frac{m_x}{1 - m_v} \text{ für } x \neq v; \quad m'_v = 0$$

eine normierte Lösung der eben vorausgesetzten Eigenschaft dar; bei $m_v = 1$ sind alle übrigen $m_x = 0$.

Für z von $\mathfrak{X}_1$ ist $m_x \geq 0$; für z außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ gilt aber bei $m_x \neq 0$ nach (27)

$$\arccos m_x = \arccos \frac{z - a}{x_x - a},$$

wo a der Mittelpunkt von $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ ist. Bei allen normierten Lösungen von (B) für z haben dann die zum selben x_x gehörigen m_x denselben Arkus, sofern sie von 0 verschieden sind. Für z von $\mathfrak{X}_1$ sei $z^* = z$, für z außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ bedeute z^* das Spiegelbild von z an $\mathfrak{f}(z, \mathfrak{X})$.

Jetzt lege man diejenigen Punktepaare $\{x_\mu, x_\nu\}$ und diejenigen Punkte-
tripel $\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\}$ fest, für die z^* innerer Punkt der Strecke $x_\mu \dots x_\nu$ bzw. innerer Punkt des Dreiecks $x_\lambda x_\mu x_\nu$ ist und für die entsprechend $m_\mu m_\nu \neq 0$ bzw. $m_\lambda m_\mu m_\nu \neq 0$ gilt. Diese abzählbar vielen Punktepaare und Punkte-
tripel ordne man zu einer Folge $(x_n^{(1)})$, und wegen der Übersichtlichkeit des folgenden Induktionsbeweises setze man

$$m_x^{(1)} = m_x \text{ für } x = 1, 2, \dots$$

Es sei $r = 1$. Nach Satz 2 und Satz 5 gibt es genau eine normierte Haupt-
lösung $\{m_{r_1}, m_{r_2}, \dots\}$ von z in bezug auf $\{x_\mu, x_\nu\}$ bzw. $\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\}$. Für die nicht verschwindenden m_{r_x} bilde man die positiven Quotienten $\frac{m_x^{(r)}}{m_{r_x}}$; der

kleinste dieser Werte wird p_r genannt. Dann ist $0 < p_r < 1 - p_0 - \dots - p_{r-1}$ mit $p_0 = 0$. Weiter wird

$$(28) \quad m_x^{(r+1)} = m_x^{(r)} - p_r m_{rx} \quad \text{für } x = 1, 2, \dots$$

gesetzt. Für mindestens ein x mit $m_x^{(r)} \neq 0$ ist $m_x^{(r+1)} = 0$. Nun streiche man in $(x_n^{(r)})$ alle Glieder, die ein x_x derart enthalten, daß $m_x^{(r+1)} = 0$ ist. Die Restfolge heiße $(x_n^{(r+1)})$. Aus (28) folgt unmittelbar, daß $\sum_{x=1}^{\infty} m_x^{(r+1)}$ zu einem von 0 verschiedenen Wert konvergiert und daß $\{M_1^{(r+1)}, M_2^{(r+1)}, \dots\}$ mit

$$M_x^{(r+1)} = m_x^{(r+1)} \cdot \sum_x m_x^{(r+1)}$$

eine normierte Lösung von (B) mit unendlich vielen $M_x^{(r+1)} \neq 0$ ist. Somit gibt es in $x_n^{(r)}$ abzählbar viele Punktepaare $\{x_\mu, x_\nu\}$ und Punktetripel $\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\}$ derart, daß z^* innerer Punkt der Strecke $x_\mu \dots x_\nu$ bzw. des Dreiecks $x_\lambda x_\mu x_\nu$ ist und daß $M_\mu^{(r+1)} M_\nu^{(r+1)} \neq 0$ bzw. $M_\lambda^{(r+1)} M_\mu^{(r+1)} M_\nu^{(r+1)} \neq 0$ gilt. Also ist $(x_n^{(r+1)})$ eine unendliche Folge.

Derselbe Prozeß sei nacheinander für $r = 1, 2, \dots$ ausgeführt. So gewinnt man abzählbar viele normierte Hauptlösungen $\{m_{r1}, m_{r2}, \dots\}$ von (B) für z und abzählbar viele positive Werte p_r einer Summe ≤ 1 . Nach (28) gilt für $m_x^{(r)} \neq 0$

$$0 \leq \frac{m_x^{(r+1)}}{m_x^{(1)}} = \frac{m_x^{(r+1)}}{m_x^{(r)}} \cdot \frac{m_x^{(r)}}{m_x^{(1)}} \leq \frac{m_x^{(r)}}{m_x^{(1)}} \leq 1.$$

Bei festem x konvergiert also $\left(\frac{m_x^{(r)}}{m_x^{(1)}}\right)$ für $r \rightarrow \infty$ gegen einen nichtnegativen Wert M_x , und es ist

$$(29) \quad m_x^{(1)} = M_x m_x^{(1)} + p_1 m_{1x} + p_2 m_{2x} + \dots$$

Weil die Werte $m_x^{(1)}$ und m_{rx} bei festem x und $r = 1, 2, \dots$ denselben Arkus haben, sofern sie von 0 verschieden sind, folgt

$$\sum_x |m_x^{(1)}| = \sum_x (M_x |m_x^{(1)}| + \sum_r p_r |m_{rx}|) = \sum_x M_x |m_x^{(1)}| + \sum_r p_r \cdot \sum_x |m_x^{(1)}|.$$

Somit konvergiert $\sum_r p_r$ zu einem Werte $P < 1$ genau dann, wenn mindestens ein $M_x > 0$ ist; in diesem Fall ist

$$1 = \sum_x m_x^{(1)} = \sum_x M_x m_x^{(1)} + P$$

so wie

$$z = \sum_x m_x^{(1)} x_x = \sum_x M_x m_x^{(1)} x_x + P \cdot z,$$

und daraus folgt unmittelbar, daß $\left\{\frac{M_1 m_1^{(1)}}{1-P}, \frac{M_2 m_2^{(1)}}{1-P}, \dots\right\}$ eine normierte Lösung von (B) für z ist. Sind dabei zwei oder mehr $M_x \neq 0$, so gibt es ein zu $(x_n^{(1)})$ gehöriges Punktepaar oder Punktetripel, das bei dem oben be-

schriebenen Verfahren entgegen der Vorschrift keine Verwendung gefunden hat. Der Fall, daß genau ein $M_x \neq 0$ ist, führt auf die beim Beweiseingang ausgeschlossene Beziehung $z = x_x$.

Somit zieht die Annahme $\sum p_r < 1$ einen Widerspruch nach sich. Deshalb ist

$$\sum p_r = 1 \quad \text{und} \quad m_x^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} p_r m_{r,x},$$

d. h. mit den genannten p_r und $\{m_{r,1}, m_{r,2}, \dots\}$ ist die behauptete Zerlegung geleistet.

Damit ist das Problem B gelöst.

§ 3.

Über die Struktur der Bereiche $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

9. Gebietseigenschaften von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

Bei beschränktem abgeschlossenem $\mathfrak{X}$ und festem $N_1 \geq 1$ sei mit $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ die Gesamtheit der Werte z bezeichnet, für die

$$N(z, \mathfrak{X}) \leq N_1$$

ist. Hierfür gilt

$$\mathfrak{M}(1, \mathfrak{X}) \equiv \mathfrak{X}_1.$$

Denn nach Satz 6 ist $\mathfrak{X}_1$ Teilmenge von $\mathfrak{M}(1, \mathfrak{X})$, und für jedes z außerhalb von $\mathfrak{X}_1$ gilt nach (24) $N(z, \mathfrak{X}) > 1$.

Satz 13. Bei jedem $N_1 > 1$ ist $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ ein beschränktes, abgeschlossenes, konvexes Gebiet. Für die inneren Punkte von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gilt $N(z, \mathfrak{X}) < N_1$, für die Randpunkte $N(z, \mathfrak{X}) = N_1$ ¹⁸⁾.

Beweis. a) $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ ist abgeschlossen. Ist z_0 der Grenzwert einer Folge (z_n) , für deren Glieder

$$N(z_n, \mathfrak{X}) \leq N_1$$

gilt, so wird zu jedem z_n eine normierte Lösung $\{m_{n,1}, m_{n,2}, m_{n,3}\}$ von (B) bestimmt. Nun gibt es eine Folge natürlicher Zahlen p derart, daß $(m_{p,x})$ und die zugeordneten Folgen $(x_{p,x})$ für $p \rightarrow \infty$ bei $x = 1, 2, 3$ konvergieren. Sind m_x und x_x die entsprechenden Grenzwerte, so ist $\{m_1, m_2, m_3\}$ ersichtlich eine Lösung von (B) für z_0 , und es gilt

$$N(z_0, \mathfrak{X}) \leq |m_1| + |m_2| + |m_3| = \lim_{p \rightarrow \infty} N(z_p, \mathfrak{X}) \leq N_1,$$

d. h. z_0 gehört zu $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

¹⁸⁾ Bei Raff, a. a. O. S. 27f. enthalten. — Rado, a. a. O. S. 379, Theorem 7.

b) $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ ist konvex. Gilt für die beiden Punkte z' und z''

$$N(z', \mathfrak{X}) = N' \leq N_1 \quad \text{und} \quad N(z'', \mathfrak{X}) = N'' \leq N_1,$$

so lege man mit Hilfe der normierten Lösungen $\{m'_1, m'_2, \dots\}$ und $\{m''_1, m''_2, \dots\}$ von (B) für z' und z'' (dabei soll jeweils $x'_x = x''_x$ sein) das Wertsystem $\{m_1, m_2, \dots\}$ durch

$$m_x = \frac{m'_x + \lambda m''_x}{1 + \lambda} \quad \text{für } x = 1, 2, \dots$$

bei vorbestimmtem $\lambda > 0$ fest. Dieses Wertsystem ist eine Lösung von (B) für $z = \frac{z' + \lambda z''}{1 + \lambda}$, und es gilt

$$(30) \quad N(z, \mathfrak{X}) \leq \sum |m_x| \leq N_1,$$

d. h. jeder Punkt der Strecke $z' \dots z''$ gehört zu $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$. — Man beachte, daß in (30) rechts das Größerzeichen gilt, wenn $\lambda > 0$ und mindestens einer der Werte N' und N'' kleiner als N_1 ist.

c) z ist innerer Punkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, falls $N(z, \mathfrak{X}) < N_1$ ist, und für jeden inneren Punkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gilt $N(z, \mathfrak{X}) < N_1$. Die erste Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $N(z, \mathfrak{X})$. Weiter gibt es zu jedem inneren Punkt z von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ ein z_1 von $\mathfrak{X}$ und ein z_2 von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, so daß z innerer Punkt der Strecke $z_1 \dots z_2$ ist. Nach (30) und der Schlußbemerkung von b) gilt dann $N(z, \mathfrak{X}) < N_1$.

d) z ist Randpunkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, falls $N(z, \mathfrak{X}) = N_1$ ist, und für jeden Randpunkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gilt $N(z, \mathfrak{X}) = N_1$. Da $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ wegen der schon bewiesenen Konvexität keine isolierten Punkte besitzt, folgt d) unmittelbar aus c).

Satz 14. $\{|y - a| \leq r\}$ sei die Gesamtheit derjenigen Kreise, die $\mathfrak{X}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ der Durchschnitt der Kreismenge

$$\{|y - a| \leq r N_1\}^{19}.$$

Beweis. Da die Behauptung für $N_1 = 1$ trivial ist, wird $N_1 > 1$ gedacht.

Nach Satz 10 liegt $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ in jedem der zugelassenen $|y - a| \leq r N_1$, also im Durchschnitt dieser Kreise, und bei jedem Randpunkt z von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gilt für den charakteristischen Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$

$$|z - a'| = r' N_1,$$

d. h. z ist auch Randpunkt des genannten Durchschnitts, w. z. b. w.

Satz 15. Für $N_1 < N_2$ liegt $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ total in $\mathfrak{M}(N_2, \mathfrak{X})$.

¹⁹⁾ Rado, a. a. O. S. 403, Theorem 17''. Hierin ist enthalten, daß, wenn $\mathfrak{X}$ der Kreis $|y - a| \leq r$ ist, $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ durch den Kreis $|y - a| \leq r N_1$ dargestellt wird.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $N(z, \mathfrak{X})$ gibt es ein $r > 0$ derart, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ mit einer r -Umgebung in $\mathfrak{M}(N_2, \mathfrak{X})$ liegt.

Satz 16. Wenn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ beschränkte abgeschlossene Mengen sind, $\mathfrak{X}_1$ Teilmenge von $\mathfrak{Y}_1$ ist und $N_1 \geq 1$ gilt, so liegt $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ in $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{Y})$.

Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 14, da jeder $\mathfrak{Y}$ enthaltende Kreis auch $\mathfrak{X}$ enthält.

Hilfssatz 2. $|y - \alpha| \leq \varrho$ sei der kleinste $\mathfrak{X}$ enthaltende Kreis. Dann liegen auf seinem Rande entweder drei Punkte x_1, x_2, x_3 von $\mathfrak{X}$ derart, daß α innerer Punkt des Dreiecks $x_1 x_2 x_3$ ist, oder es gibt einen Durchmesser $x_1 \dots x_2$ dieses Kreises, so daß x_1 und x_2 zu $\mathfrak{X}$ gehören.

Wenn nämlich auf einem durch die Endpunkte eines Durchmessers begrenzten abgeschlossenen Bogen von $|y - \alpha| = \varrho$ kein Punkt von $\mathfrak{X}$ liegt, läßt sich dieser Kreis senkrecht zum genannten Durchmesser so verschieben, daß auf dem Rande des verschobenen Kreises kein Punkt von $\mathfrak{X}$ liegt; $|y - \alpha| \leq \varrho$ wäre dann also nicht der kleinste $\mathfrak{X}$ enthaltende Kreis.

Satz 17. Ist $|y - \alpha| \leq \varrho$ der kleinste $\mathfrak{X}$ enthaltende Kreis, so ist $|y - \alpha| \leq \varrho N_1$ der kleinste $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ enthaltende Kreis²⁰.

In den beiden in Hilfssatz 2 genannten Fällen gehören die Punkte $N_1(x - \alpha) + \alpha$ zu $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$. $|y - \alpha| \leq \varrho N_1$ ist der kleinste diese Punkte und $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ enthaltende Kreis.

Satz 18. $|y - \alpha| \leq \varrho$ sei der kleinste $\mathfrak{X}$ enthaltende Kreis. Für jedes z ist dann

$$(31) \quad \frac{|z - \alpha|}{\varrho} \leq N(z, \mathfrak{X}) \leq \frac{|z - \alpha|}{\varrho} + 1,$$

und für $z \rightarrow \infty$ strebt $\left(N(z, \mathfrak{X}) - \frac{|z - \alpha|}{\varrho}\right)$ gegen 0; genauer, es ist

$$(32) \quad 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} |z - \alpha| \left(N(z, \mathfrak{X}) - \frac{|z - \alpha|}{\varrho} \right) \leq \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |z - \alpha| \left(N(z, \mathfrak{X}) - \frac{|z - \alpha|}{\varrho} \right) \leq \frac{\varrho}{2}.$$

Beweis. Für z von $\mathfrak{X}_1$ ist (31) trivial; also kann z als äußerer Punkt von $\mathfrak{X}_1$ vorausgesetzt werden. Die linke Abschätzung (31) folgt jetzt aus Satz 10, und weiter gilt, wenn $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}) \equiv |y - \alpha| \leq r$ der charakteristische Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$ ist,

$$N(z, \mathfrak{X}) = \frac{|z - \alpha|}{r} \leq \frac{|z - \alpha| + |\alpha - \alpha|}{r} \leq \frac{|z - \alpha|}{\varrho} + 1.$$

Denn α liegt innerhalb von $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$, da sonst $|y - \alpha| \leq \varrho$ nicht der kleinste $\mathfrak{X}$ enthaltende Kreis wäre. Damit ist (31) bewiesen.

²⁰) Rado, a. a. O. S. 405, Theorem 18.

Wenn α innerer Punkt eines Dreiecks ist, dessen Ecken auf $|y - \alpha| = \varrho$ liegen und zu $\mathfrak{X}$ gehören, so gilt nach Satz 11 für alle z eines hinreichend großen Absolutbetrages

$$N(z, \mathfrak{X}) = \frac{|z - \alpha|}{\varrho}.$$

Wenn α diese Eigenschaft nicht hat, gibt es nach Hilfssatz 2 einen Durchmesser $x_1 \dots x_2$ von $|y - \alpha| = \varrho$, dessen Endpunkte zu $\mathfrak{X}$ gehören; nach Satz 11 ist dann

$$N(z, \mathfrak{X}) - \frac{|z - \alpha|}{\varrho} \leq \frac{|z - x_1| + |z - x_2|}{|x_1 - x_2|} - \frac{2 \left| z - \frac{x_1 + x_2}{2} \right|}{|x_1 - x_2|}.$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen für die auf der Geraden $x_1 \dots x_2$ gelegenen z . Aus den beiden vorhergehenden Beziehungen folgt (32) durch elementare Umformungen der letzten Ungleichung.

Wählt man für $\mathfrak{X}$ die Strecke $-1 \dots +1$, so erkennt man sofort, daß (32) nicht verschärft werden kann.

10. Randeigenschaften von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

Ist $\mathfrak{X}$ die Strecke $x_1 \dots x_2$, so ist $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ bei festem $N_1 > 1$ nach dem in der Einleitung Ausgeführten die Ellipse (3). Zusammen mit Satz 14 ergibt sich das auch für sich interessierende Resultat: Die Ellipse mit den Brennpunkten x_1 und x_2 und der numerischen Exzentrizität $\frac{1}{N} < 1$ ist der Durchschnitt derjenigen Kreise, die nach einer Zusammenziehung im Verhältnis $1:N$ die Strecke $x_1 \dots x_2$ enthalten.

Ist $\mathfrak{X}$ eine abgeschlossene Menge mit polygonalem $\mathfrak{X}_1 \equiv x_1 x_2 \dots x_k$, sind $\mathfrak{R}_\lambda, \mathfrak{J}_\lambda$ und $\mathfrak{J}_\lambda^*$ zu $\mathfrak{J} \equiv \mathfrak{X}_1$ ebenso konstruiert wie in 1., bedeutet $N_1 \times \mathfrak{E}_\mu$, die Ellipse $\frac{|y - x_\mu| + |y - x_\nu|}{|x_\mu - x_\nu|} \leq N_1$, weiter $N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda$ den im Verhältnis $N_1:1$ gestreckten Kreis $\mathfrak{R}_\lambda$ und $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ den im Verhältnis $N_1:1$ gestreckten charakteristischen Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$, so gilt

Satz 19. Bei polygonalem $\mathfrak{X}_1$ und jedem $N_1 > 1$ ist

$$(33) \quad \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}) \equiv \sum_{\lambda} (N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda) (\mathfrak{J}_\lambda + \mathfrak{J}_\lambda^*) + \sum_{\mu, \nu} N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu, \nu}.$$

Die Randkurve von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ setzt sich aus endlich vielen Stücken der Ränder von $N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda$ und $N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu, \nu}$ zusammen; sie besitzt in jedem ihrer Punkte z eine stetige Tangente, die mit der Tangente im Punkte z an $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ übereinstimmt²¹⁾.

Beweis. Der in (33) rechts stehende Ausdruck stellt nach Satz 2 und Satz 5 eine Teilmenge von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ dar. Sei nun z ein fester zu $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$

²¹⁾ Bei Hado, a. a. O. S. 413, Theorem 21 enthalten.

gehöriger Punkt und bedeute $\{m_1, m_2, \dots\}$ eine normierte Lösung von (B) für z ; je nachdem genau drei oder weniger als drei der Werte m_x von 0 verschieden sind, gehört z zu einem $N \times \mathfrak{R}_\lambda$ oder zu einem $N \times \mathfrak{E}_{\mu\nu}$. Also gilt (33).

Da hiernach $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ Summe von endlich vielen Kreisen $N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda$ und Ellipsen $N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu\nu}$ ist, setzt sich sein Rand aus endlich vielen Stücken der Ränder dieser Gebiete zusammen. Ersichtlich existiert eine stetige Tangente an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ entlang eines jeden zum Rande gehörigen offenen Kreis- oder Ellipsenbogens. Ist aber z ein Randpunkt von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, jedoch nicht innerer Punkt eines solchen Kreis- oder Ellipsenbogens, so ist z nach 1. sowohl Randpunkt eines $\mathfrak{Z}_\lambda^*$ als auch eines $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$. Dann fällt $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ mit dem entsprechenden $N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda$ zusammen und berührt die entsprechende Ellipse $N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu\nu}$ von außen. Somit fallen in z die Tangenten an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, $N_1 \times \mathfrak{R}_\lambda$, $N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu\nu}$ und $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ zusammen, und es folgt gleichzeitig die Stetigkeit der Tangenten in solchen Stoßstellen.

Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich ein einfacher Weg, um $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ und $N(z, \mathfrak{X})$ bei polygonalem $\mathfrak{X}_1$ in endlich vielen Schritten zu gewinnen: x_λ, x_μ, x_ν sollen paarweise verschieden, im übrigen aber unabhängig voneinander die Ecken von $\mathfrak{X}_1$ durchlaufen, $N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu\nu}$ bedeute die Ellipse $\frac{|y - x_\mu| + |y - x_\nu|}{|x_\mu - x_\nu|} \leq N_1$, $\mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu}$ das Teildreieck $x_\lambda x_\mu x_\nu$ von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{R}_{\lambda\mu\nu} \equiv |y - a_{\lambda\mu\nu}| \leq r_{\lambda\mu\nu}$ den Umkreis von $\mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu}$, $\mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu}^*$ das Spiegelbild von $\mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu}$ am Rande von $\mathfrak{R}_{\lambda\mu\nu}$ und $N_1 \times \mathfrak{R}_{\lambda\mu\nu}$ den im Verhältnis $N_1:1$ gestreckten Kreis $\mathfrak{R}_{\lambda\mu\nu}$; dann ist

$$\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}) \equiv \sum_{\lambda, \mu, \nu} (N_1 \times \mathfrak{R}_{\lambda\mu\nu}) \cdot (\mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu} + \mathfrak{Z}_{\lambda\mu\nu}^*) + \sum_{\mu, \nu} N_1 \times \mathfrak{E}_{\mu\nu},$$

und

$$N(z, \mathfrak{X}) = \text{Min}_{\lambda, \mu, \nu} \left\{ \frac{|z - a_{\lambda\mu\nu}|}{r_{\lambda\mu\nu}}, \frac{|z - x_\mu| + |z - x_\nu|}{|x_\mu - x_\nu|} \right\}.$$

Es werde fortan gesagt, die Mengenfolge $\mathfrak{M}_n$ approximiere das beschränkte abgeschlossene konvexe Gebiet $\mathfrak{M}$ von innen, falls jedes $\mathfrak{M}_n$ in $\mathfrak{M}$ liegt und sich nach Wahl eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß bei jedem $n \geq n_0$ zu jedem x von $\mathfrak{M}$ ein x' von $\mathfrak{M}_n$ gefunden werden kann, für das

$$(34) \quad |x - x'| < \varepsilon$$

gilt. $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ sei bei allgemeinem zugelassenem $\mathfrak{X}$ der im Verhältnis $N_1:1$ gestreckte charakteristische Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$.

Satz 20. Ist $(\mathfrak{P}_n)$ eine den Bereich $\mathfrak{X}_1$ von innen approximierende Polygonfolge, so approximiert die Gebietsfolge $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{P}_n)$ das Gebiet $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ von innen. Für $N_1 > 1$ gehört kein Geradenstück zum Rande von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, und

dieser Rand besitzt in jedem Punkte z eine stetige Tangente, die mit der Tangente in z an $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ übereinstimmt²²⁾.

Beweis. Nach Satz 16 liegt $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{P}_n)$ in $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

$\varepsilon > 0$ sei beliebig klein vorgegeben, und $\mathfrak{P}_n$ sei so gewählt, daß es zu jedem x von $\mathfrak{X}_1$ ein x' von $\mathfrak{P}_n$ der Beziehung (34) gibt. Ist jetzt $\{m_1, m_2, \dots\}$ eine normierte Lösung von (B) für festes z von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, so läßt sich zu jedem der entsprechenden x_α ein x'_α von $\mathfrak{P}_n$ der Beziehung (34) finden, und hierfür gilt

$$m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + \dots = z + \varepsilon' \quad \text{mit} \quad |\varepsilon'| < \varepsilon N_1.$$

Für $\mathfrak{P}'_n$, den kleinsten konvexen Bereich dieser x'_α , gilt

$$N(z + \varepsilon', \mathfrak{P}'_n) \leq |m_1| + |m_2| + \dots \leq N_1,$$

also liegt $z + \varepsilon'$ in $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{P}'_n)$, nach Satz 16 auch in $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{P}_n)$, d. h. zu jedem z von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gibt es ein $z + \varepsilon'$ von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{P}_n)$ derart, daß $|\varepsilon'| < \varepsilon N_1$ ist. Die Approximationsaussage ist damit bewiesen.

Sind z' und z'' zwei Randpunkte von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$, sind $\{m'_1, m'_2, m'_3\}$ und $\{m''_1, m''_2, m''_3\}$ entsprechende normierte Hauptlösungen von (B), so ist $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}(N_1; x'_1, \dots, x'_3)$ Teilmenge von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$. Die Randkurve von $\mathfrak{M}^*$ geht durch z' und z'' und enthält nach Satz 19 kein Geradenstück, also liegt die Strecke $z' \dots z''$ bis auf ihre Endpunkte im Innern von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$.

Weil $N_1 \times \mathfrak{R}(z', \mathfrak{X})$ mit $N_1 \times \mathfrak{R}(z'; x'_1, x'_2, x'_3)$ übereinstimmt und die Tangente in z' an $\mathfrak{M}(N_1; x'_1, x'_2, x'_3)$ existiert, existiert auch die Tangente in z' an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ und stimmt mit derjenigen in z' an $N_1 \times \mathfrak{R}(z', \mathfrak{X})$ überein.

Der Rand von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ und die Tangenten an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ seien orientiert durch die Festlegung, daß $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ links von jeder dieser Tangenten liegen soll. Durchläuft nun z den Rand von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ im festgelegten positiven Sinn, ist $\varphi(z)$ der Richtungswinkel der Tangente in z an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ und sind diese Richtungswinkel bei festem φ_0 durch

$$\varphi_0 \leq \varphi < \varphi_0 + 2\pi$$

normiert, so ist $\varphi(z)$ eine mit fortschreitendem z monoton wachsende Funktion, und zwar läßt $\varphi(z)$ keinen Wert des Intervalls $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ aus. Denn wegen der eigentlichen Konvexität von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ gibt es bei fest gewähltem φ_1 der Beziehung $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_0 + 2\pi$ genau einen Strahl mit dem Richtungswinkel φ_1 , der mit dem Rande von $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{R})$ genau einen Punkt z_1 gemein hat. $N_1 \times \mathfrak{R}(z_1, \mathfrak{X})$ berührt diesen Strahl, der somit die Tangente in z_1 an $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ darstellt. Demnach ist $\varphi(z)$ eine in $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ stetige Funktion, und weil φ_0 frei wählbar war, ist damit der Satz bewiesen.

²²⁾ Rado, a. a. O. S. 403 und 413, Theorem 7' und 21.

11. Einige ergänzende Sätze.

Satz 21. Bei $N(z, \mathfrak{K}) = N > 1$ ist $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ der kleinste Kreis, der $\mathfrak{M}(N, \mathfrak{K})$ enthält und dessen Rand durch z geht.

Beweis. Sei $\mathfrak{K}_1$ irgendein Kreis, der $\mathfrak{M}(N, \mathfrak{K})$ enthält und dessen Rand durch z geht. Dann sind nach Satz 10 die Tangenten in z an $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ und an $\mathfrak{K}_1$ identisch, d. h. die beiden Kreise berühren einander in z .

$\{m_1, m_2, m_3\}$ sei eine normierte Hauptlösung von (B) für z . Verschwindet keiner der drei Werte m_x , liegt also das Spiegelbild von z am Rande von $\mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ im Dreieck $x_1 x_2 x_3$, so gehört ein gewisser, den Punkt z enthaltender Bogen des Randes von $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ zum Rand von $\mathfrak{M}(N, \mathfrak{K})$, d. h. $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ liegt in $\mathfrak{K}_1$.

Sind genau zwei der Werte $m_x \neq 0$, z. B. m_1 und m_2 , und ist dabei $|m_1| \neq |m_2|$, so geht der Rand von $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ auch durch z_0 , den Spiegelpunkt von z am Mittellot über $x_1 \dots x_2$, denn $\{\bar{m}_2, \bar{m}_1\}$ ist eine normierte Lösung von z_0 in bezug auf $\{x_1, x_2\}$, weil ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ gedacht werden kann und außer $N(z_0, \mathfrak{K}) = N$ und $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 = 1$ dann

$$\bar{m}_2 x_1 + \bar{m}_1 x_2 = -(\overline{-m_1 + m_2}) = -\bar{z} = z_0$$

gilt. Ist aber $|m_1| = |m_2|$, so ergibt sich

$$\left| \frac{z - z'}{z - x_1} \right| = \left| \frac{z_1 - x_2}{z_1 - x_1} \right|,$$

falls z_1 und z' zu z wie in 4. konstruiert sind; bedeutet jetzt a die große, b die kleine Halbachse der Ellipse

$$\mathfrak{E} \equiv \frac{|y - x_1| + |y - x_2|}{|x_1 - x_2|} \leq N,$$

so folgt

$$|z - z'| = \frac{a^2}{b}.$$

Der Rand von $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ berührt also die zu $\mathfrak{M}(N; \mathfrak{K})$ gehörige Ellipse $\mathfrak{E}$ im ersten Fall in zwei Punkten von außen, im zweiten Fall als Krümmungskreis von außen, d. h. $N \times \mathfrak{K}(z, \mathfrak{K})$ liegt in $\mathfrak{K}_1$.

Damit sind die möglichen Unterfälle erschöpft, und der Satz ist bewiesen.

Satz 22. Bei $N_1 \geq 1$ und $N_2 \geq 1$ ist

$$\mathfrak{M}(N_1 N_2; \mathfrak{K}) \equiv \mathfrak{M}(N_2; \mathfrak{M}(N_1; \mathfrak{K}))^{23}.$$

Beweis. Für $N_1 = 1$ ist die Behauptung in Satz 4 enthalten. Also wird $N_1 > 1$ gedacht.

²³⁾ Rado, a. a. O. S. 383, Theorem 9.

Da $\mathfrak{M}(N_1 N_2; \mathfrak{X})$ nach Satz 14 der Durchschnitt derjenigen Kreise $|y - a| \leq N_1 N_2 r$ ist, für die $\mathfrak{X}$ in $|y - a| \leq r$ liegt, und da $\mathfrak{M}(N_2; \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}))$ in jedem dieser Kreise $|y - a| \leq N_1 N_2 r$, also im selben Durchschnitt liegt, ist $\mathfrak{M}(N_2; \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}))$ Teilmenge von $\mathfrak{M}(N_1 N_2; \mathfrak{X})$.

Sei jetzt $|y - a'| \leq r'$ ein beliebiger, aber fester Kreis, der die Menge $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ enthält, und sei

$$(35) \quad |y - a'| \leq r''$$

derjenige konzentrische Kreis, der gleichfalls $\mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X})$ enthält und auf dessen Rand mindestens ein Punkt z dieser Menge liegt. Nach Satz 21 liegt $N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ in (35) und deshalb $N_2 N_1 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ in $|y - a'| \leq N_2 r$ mit $r \geq r''$. $\mathfrak{M}(N_2; \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}))$ ist nach Satz 14 der Durchschnitt der Kreise $|y - a'| \leq N_2 r'$ mit den oben zugelassenen a' und r' , enthält also den Durchschnitt der zugeordneten Kreise $N_1 N_2 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$, und dieser Durchschnitt enthält $\mathfrak{M}(N_1 N_2; \mathfrak{X})$, d. h. $\mathfrak{M}(N_1 N_2; \mathfrak{X})$ ist Teilmenge von $\mathfrak{M}(N_2; \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{X}))$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich $\mathfrak{M}(N_0, \mathfrak{X})$ explizit angeben, wenn $\mathfrak{X}$ bei gegebenem $N_1 > 1$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}(N_1, \mathfrak{Y})$$

und $\mathfrak{Y}_1$ ein Kreis, ein Vieleck oder eine Strecke ist. So ist z. B. für

$$\mathfrak{X} \equiv \frac{|y - x_1| + |y - x_2|}{|x_1 - x_2|} \leq N_1$$

die Menge $\mathfrak{M}(N_0, \mathfrak{X})$ dargestellt durch

$$(36) \quad \frac{|y - x_1| + |y - x_2|}{|x_1 - x_2|} \leq N_0 N_1.$$

Die Existenz normierter Lösungen von (B) für einen Randpunkt z von (36) ist bei diesem $\mathfrak{X}$ nach Satz 11 gesichert. Nach Satz 21 ist

$$N_0 \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}) \equiv N_0 N_1 \times \mathfrak{R}(z; x_1, x_2)$$

der kleinste Kreis, der durch z geht und $\mathfrak{M}(N_0, \mathfrak{X})$ enthält. $N_1 \times \mathfrak{R}(z; x_1, x_2)$ ist also der charakteristische Kreis von z in bezug auf $\mathfrak{X}$. Da der Rand dieses Kreises den Bereich $\mathfrak{X}$ in zwei Punkten x' und x'' berührt, gibt es genau eine normierte Lösung von z in bezug auf $\mathfrak{X}$, nämlich die Lösung von

$$m' + m'' = 1 \quad \text{und} \quad m' x' + m'' x'' = z.$$

Die Punkte x' und x'' sind auch die Schnittpunkte des Randes von $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X})$ mit dem Spiegelbild der Geraden $x_1 \dots x_2$ am Rande von $\mathfrak{R}(z; x_1, x_2)$.

Satz 23. Bei gegebenem $\mathfrak{Z}$ hat die Gleichung

$$(37) \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{M}(N; \mathfrak{X})$$

dann und nur dann mindestens eine Lösung $\mathfrak{X}_N$ für jedes $N \geq 1$, wenn $\mathfrak{Z}$ ein abgeschlossener Kreis oder ein Punkt ist.

Wenn $\mathfrak{Z}$ eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe Menge, aber kein Kreis ist, so gibt es ein $N^* \geq 1$ derart, daß (37) mindestens eine Lösung für jedes $1 \leq N < N^*$, aber keine Lösung für $N > N^*$ besitzt. Wenn $\mathfrak{Z}$ keine abgeschlossene konvexe Menge ist, besitzt (37) keine Lösung²⁴).

Beweis. Der triviale Fall, daß $\mathfrak{Z}$ ein Punkt ist, sei ausgeschlossen.

Wenn $\mathfrak{Z}$ ein Kreis $|y - a| \leq r$ ist, so stellt

$$|y - a| \leq \frac{r}{N}$$

bei jedem $N \geq 1$ eine Lösung von (37) dar.

Sei nun $\mathfrak{Z}$ eine Menge derart, das (37) für jedes $N \geq 1$ eine Lösung $\mathfrak{X}_N$ besitzt. Nach Satz 13 ist dann $\mathfrak{Z}$ ein abgeschlossenes konvexes Gebiet; nach Satz 20 besitzt die Randkurve dieses Gebiets in jedem ihrer Punkte z eine stetige Tangente und nach Satz 21 ist $N \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ bei jedem solchen z und jedem $1 \leq N < \infty$ der kleinste Kreis, der $\mathfrak{Z}$ enthält und dessen Rand durch z geht. Bei festem z ist also der Durchschnitt der Kreise $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ für $1 \leq N < \infty$ der gemeinsame Mittelpunkt all dieser Kreise, d. h. für $1 \leq N < \infty$ ist der Durchschnitt der $\mathfrak{X}_N$ ein Punkt α . Sämtliche der Kreise $N \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ und $\mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ haben demnach, wenn z den Rand von $\mathfrak{Z}$ durchläuft, denselben Mittelpunkt α , d. h. die Kreise $N \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ fallen für die zugelassenen N und z zusammen, $\mathfrak{Z}$ ist mit dem Kreise $N \times \mathfrak{R}(z, \mathfrak{X}_N)$ identisch.

Besitzt (37) für ein gewisses $N' > 1$ eine Lösung $\mathfrak{X}'$, so gibt es nach Satz 22 eine Lösung derselben Gleichung für jedes $1 \leq N \leq N'$; wenn $\mathfrak{Z}$ kein Kreis ist, existiert nach dem vorhergehenden Abschnitt keine Lösung von (37) für hinreichend großes N . Somit gibt es unter den im Satz genannten Voraussetzungen ein N^* der behaupteten Art. Die restliche Aussage folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}(N, \mathfrak{X})$.

Mit den bisher bewiesenen Sätzen lassen sich die Bereiche $\mathfrak{M}(N, \mathfrak{X})$ explizit angeben, wenn $\mathfrak{X}_1$ ein konvexer Bereich ist, dessen Rand sich aus Strecken, Kreis- und Ellipsenbögen zusammensetzt; die Durchführung bietet keine Schwierigkeit. Offen bleibt dagegen die Frage, zu welchen $\mathfrak{Z}$ eine Lösung von (37) bei $N > 1$ existiert und welches die entsprechenden Lösungen sind.

Eine Erweiterung der behandelten Fragen ergibt sich mit folgender Problemstellung: $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, b_i\}$ seien l Systeme komplexer Zahlen, $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ sei eine Lösung des Gleichungssystems

$$(38) \quad m_1 x_{i1} + m_2 x_{i2} + \dots + m_k x_{ik} = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

²⁴) Rado, a. a. O. S. 413, Theorem 22.

Man bestimme

$$N(x_{i_k}; b_i) = \underline{\text{fin}} \{|m_1| + \dots + |m_k|\},$$

wenn zur Konkurrenz alle Lösungen von (38) zugelassen sind. Läßt sich der Wert $N(x_{i_k}; b_i)$ explizit angeben, gibt es Lösungen, für die $|m_1| + \dots + |m_k| = N(x_{i_k}; b_i)$ gilt, und welches sind diese Lösungen? — Bei Beschränkung auf reelle x_{i_k} , b_i und m_k hat J. Sommer Methoden zur Beantwortung dieses Problems entwickelt²⁵⁾; für den allgemeinen Fall ist bisher keine Lösung gegeben worden.

²⁵⁾ J. Sommer, Minimumsprobleme für Summen absoluter Beträge, Zeitschr. f. Vermessungswesen **48** (1919), S. 105—125.

(Eingegangen am 14. März 1938.)

Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Das System linearer Differentialgleichungen

$$(A) \quad x^{1-k} \frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) y_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo k eine der Zahlen $1, 2, \dots$ und

$$P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist, ist bisher unter der Voraussetzung behandelt worden, daß die zur Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ gehörige charakteristische Gleichung $\Delta(s) = 0$, wo

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

und $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha \geq \beta$) ist, m verschiedene Wurzeln hat¹⁾. Die im Jahresber. d. D. Math.-Vereinigung 24 (1915), S. 309 f. gegebene Behandlung eines Systems (A) mit lauter verschiedenen Wurzeln von $\Delta(s) = 0$ ist ohne wesentliche Änderungen auf diejenige Lösung übertragbar, welche einer *einfachen Wurzel* der charakteristischen Gleichung entspricht, ohne Rücksicht darauf, ob die übrigen Wurzeln einfach oder mehrfach sind.

Um zu den Lösungen zu gelangen, welche *mehrfachen Wurzeln* der Gleichung $\Delta(s) = 0$ entsprechen, führen wir, wenn die Determinante $\Delta(s)$ nicht von vornherein lauter lineare Elementarteiler besitzt, unser Differentialgleichungssystem durch Einführung einer neuen unabhängigen und neuer abhängiger Veränderlichen in ein Differentialgleichungssystem über, bei welchem *wenigstens derjenige Elementarteiler höheren Grades, zu welchem die gesuchten*

¹⁾ Literaturangaben in der Arbeit des Verfassers: Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 85—95.

Lösungen gehören, durch lineare Elementarteiler ersetzt ist, die nicht notwendig verschieden sind. Der Rang der Unbestimmtheitsstelle wird durch die anzuwendende Substitution erhöht.

Für gewisse Systeme von drei und vier Differentialgleichungen habe ich nicht nur die hier behandelte Zurückführung auf einfachere Formen, sondern auch deren Integration durch Laplacesche Integrale in den §§ 2 bis 4 und 7 der Arbeit „Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen“ in Math. Annalen 111 (1935) und 113 (1936) ausgeführt, allerdings nur soweit, wie es für die Anwendung in der Theorie der hypergeometrischen Funktionen zweier Veränderlichen erforderlich war.

Anzuführen sind ältere Arbeiten von C. E. Love, der für eine lineare Differentialgleichung zweiter und dritter Ordnung mit einer reellen unabhängigen Veränderlichen den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung nach der Methode von Dini behandelt hat (Amer. Journ. of Math. 1914, 1916).

Für lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit beliebigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung zeigt W. J. Trjitzinsky (Act. math. 62, 1934), daß aus den von E. Fabry (Thèse Paris 1885) aufgestellten formalen Reihen analytische Lösungen hergeleitet werden können, welche durch diese Reihen asymptotisch dargestellt werden. Unter wesentlichen Einschränkungen findet Trjitzinsky (Transact. Am. Math. Soc. 37, 1935) als Lösungen Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen. Vgl. den Vortrag von Trjitzinsky im Bull. Am. Math. Soc. 44, 1938.

In den §§ 1 bis 3 der vorliegenden Arbeit nehmen wir an, die charakteristische Gleichung $\Delta(s) = 0$ des Differentialgleichungssystems (A) habe die m -fache Wurzel $s = 0^2$), die entsprechenden Elementarteiler der Determinante $\Delta(s)$ seien $s^p, s^{p'}, s^{p''}, \dots$ ($p + p' + p'' + \dots = m$). In § 1 wird der Fall eines einzigen Elementarteilers s^p , in § 2 der Fall zweier Elementarteiler $s^p, s^{p'}$ und in § 3 der Fall dreier Elementarteiler $s^p, s^{p'}, s^{p''}$ betrachtet. In den §§ 4 bis 5 nehmen wir an, die charakteristische Gleichung habe nicht lauter gleiche Wurzeln. Neben der mehrfachen Wurzel $s = 0$, mit der wir uns beschäftigen, seien irgendwelche von Null verschiedene Wurzeln vorhanden. Zur Wurzel $s = 0$ gehört in § 4 der Elementarteiler s^p , in § 5 die beiden Elementarteiler $s^p, s^{p'}$ von $\Delta(s)$. In § 6 werden für einfache Systeme (A) die formal genügenden Reihen aufgestellt, soweit sie den linearen Elementarteilern $s, \dots, s$ von $\Delta(s)$ entsprechen.

Die wirkliche Lösung unserer Differentialgleichungen ist eine weitere Aufgabe, mit der wir uns hier nicht beschäftigen.

²⁾ Zu dem Wurzelwert $s = 0$ gelangt man durch eine Substitution

$$y_\alpha = e^{-\frac{\alpha x^k}{k}} z_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

hat, wenn $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ ist, p verschiedene Wurzeln

$$\varepsilon = p K_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

wo

$$K_\alpha = \varepsilon^{\alpha-1} K \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

und

$$K = \sqrt[p]{a_{1p}^{(1)}}$$

einer der p Werte der p -ten Wurzel ist.

Wir führen an Stelle von $Y_1, \dots, Y_p$ neue Veränderliche $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_p$ so ein, daß Differentialgleichungen gelten:

$$t^{2-p} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + p K_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^p \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{t} + \dots \right) \mathfrak{Y}_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p).$$

Es ist eine lineare Verbindung

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_p Y_p$$

so vorhanden, daß in den Ausdrücken für

$$\frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} \quad \text{und} \quad \lambda_1 \frac{dY_1}{dt} + \dots + \lambda_p \frac{dY_p}{dt}$$

die in $Y_1, \dots, Y_p$ linearen Glieder übereinstimmen, d. h. daß

$$p K_\alpha (\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_p Y_p) = \lambda_2 p Y_1 + \dots + \lambda_p p Y_{p-1} + \lambda_1 p a_{1p}^{(1)} Y_p$$

ist. Man hat demnach

$$\lambda_2 = K_\alpha \lambda_1, \dots, \lambda_p = K_\alpha \lambda_{p-1}, \quad a_{1p}^{(1)} \lambda_1 = K_\alpha \lambda_p.$$

Die p ersten Gleichungen ergeben

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_p = 1 : K_\alpha : \dots : K_\alpha^{p-1}$$

und die p -te Gleichung

$$a_{1p}^{(1)} = K_\alpha^p;$$

demnach haben wir die neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_1 + K_\alpha Y_2 + \dots + K_\alpha^{p-1} Y_p \quad (\alpha = 1, \dots, p).$$

In dem ausgeschlossenen Falle $a_{1p}^{(1)} = 0^3$) geht das Differentialgleichungssystem durch die Substitution

$$y_1 = Y_1, \dots, y_{p-1} = Y_{p-1}, \quad y_p = x Y_p$$

³⁾ Derartige Ausnahmefälle lassen wir für gewöhnlich außer acht.

über in

$$x^{1-k} \frac{dY_1}{dx} + \dots = 0.$$

$$x^{1-k} \frac{dY_2}{dx} + Y_1 + a_{2,p}^{(1)} Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{1-k} \frac{dY_{p-1}}{dx} + Y_{p-2} + a_{p-1,p}^{(1)} Y_p + \dots = 0,$$

$$x^{1-k} \frac{dY_p}{dx} + \dots = 0.$$

Dieses System, dessen charakteristische Determinante die Elementarteiler s^{p-1} , s hat, wird nach § 2 behandelt.

Ein System von zwei Differentialgleichungen mit der Doppelwurzel $s = 0$ der charakteristischen Gleichung kann nach dem Bisherigen auf ein System mit zwei verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung oder auf ein System von geringerem Rang zurückgeführt werden.

§ 2.

Die Determinante $\Delta(s)$ habe zwei Elementarteiler s^p , $s^{p'}$; es sei $p \geq p'$.

Wir können dem Differentialgleichungssystem (A), indem wir $p + p' = m$ setzen, die Form geben:

$$x^{1-k} \frac{dy_1}{dx} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{1,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$x^{1-k} \frac{dy_2}{dx} + y_1 + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{2,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{1-k} \frac{dy_p}{dx} + y_{p-1} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{p,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$x^{1-k} \frac{dy_{p+1}}{dx} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{p+1,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$x^{1-k} \frac{dy_{p+2}}{dx} + y_{p+1} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{p+2,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{1-k} \frac{dy_{p+p'}}{dx} + y_{p+p'-1} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{p+p',\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0.$$

Wenn $p > p'$ und $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ ist, können wir $a_{p+1,p}^{(1)} = 0$ voraussetzen.

Wir führen nämlich, indem wir

$$g = \frac{a_{p+1,p}^{(1)}}{a_{1p}^{(1)}}$$

setzen, an Stelle von $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+p'}$ die neuen Veränderlichen ein:

$$\eta_{p+1} = y_{p+1} - g y_1,$$

$$\eta_{p+2} = y_{p+2} - g y_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\eta_{p+p'} = y_{p+p'} - g y_{p'}.$$

Dadurch wird $a_{p+1,p}^{(1)}$ durch $a_{p+1,p}^{(1)} - g a_{1p}^{(1)} = 0$ ersetzt.

Wir unterscheiden die beiden Fälle $p > p'$ und $p = p'$.

1. Im ersten Falle $p > p'$ benutzen wir die Substitution

$$x = t^p; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = t Y_2, \quad \dots, \quad y_p = t^{p-1} Y_p,$$

$$y_{p+1} = Y_{p+1}, \quad y_{p+2} = t Y_{p+2}, \quad \dots, \quad y_{p+p'} = t^{p'-1} Y_{p+p'};$$

Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$t^{2-pk} \frac{dY_1}{dt} + p a_{1p}^{(1)} Y_p + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_2}{dt} + p Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_p}{dt} + p Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+1}}{dt} + p a_{p+1,p}^{(1)} Y_p + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+2}}{dt} + p Y_{p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'}}{dt} + p Y_{p+p'-1} + \dots = 0,$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder t im Nenner enthalten.

Wir nehmen $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ an, so daß $a_{p+1,p}^{(1)} = 0$ gesetzt werden kann. An Stelle von $Y_1, \dots, Y_p$ führen wir die neuen Veränderlichen $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_p$ wie in § 1 ein. Das durch die Veränderlichen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_1 + K_\alpha Y_2 + \dots + K_\alpha^{p-1} Y_p \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

$$\mathfrak{Y}_{p+1} = Y_{p+1}, \quad \dots, \quad \mathfrak{Y}_{p+p'} = Y_{p+p'}$$

befriedigte *Differentialgleichungssystem*

$$t^{2-pk} \frac{dY_\alpha}{dt} + pK_\alpha Y_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+1}}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+2}}{dt} + pY_{p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'}}{dt} + pY_{p+p'-1} + \dots = 0,$$

wo die Glieder mit t im Nenner weggelassen sind, hat die Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ vom Rang $pk - 1$. Die charakteristische Gleichung hat die p voneinander und von Null verschiedenen Wurzeln $s = pK_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, p$) und die p' -fache Wurzel $s = 0$ mit dem Elementarteiler $s^{p'}$. Die p Lösungen, welche den einfachen Wurzeln pK_α entsprechen, lassen sich nach Jahresbericht 24, S. 309f. berechnen.

Im Falle $p > 1$, $p' = 1$ hat die charakteristische Gleichung $p + 1$ einfache Wurzeln $pK_1, \dots, pK_p$ und 0, so daß man sämtliche $p + 1$ Lösungen erhält.

Es sei jetzt $p' > 1$. Um die zum Elementarteiler $s^{p'}$ gehörigen Lösungen des Differentialgleichungssystems (A) zu finden, benutzen wir die Substitution

$$x = t^{p'}; \quad y_1 = Y_1, \dots, y_p = Y_p,$$

$$y_{p+1} = Y_{p+1}, \quad y_{p+2} = tY_{p+2}, \dots, \quad y_{p+p'} = t^{p'-1}Y_{p+p'}.$$

Wir erhalten Differentialgleichungen von der Form

$$t^{1-p'k} \frac{dY_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_2}{dt} + p'Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_p}{dt} + p'Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+1}}{dt} + \frac{p'a_{p+1, p+p'}}{t} Y_{p+p'} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+2}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'-1} + \dots = 0;$$

in den p ersten Gleichungen sind die Glieder mit $t, t^2, \dots$, in den p' letzten Gleichungen die Glieder mit $t^2, t^3, \dots$ im Nenner nicht angeschrieben.

Wir setzen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

$$\mathfrak{Y}_{p+\alpha'} = Y_{p+1} + K'_{\alpha'} Y_{p+2} + \dots + K'_{\alpha'}{}^{p'-1} Y_{p+p'} \quad (\alpha' = 1, \dots, p').$$

Dabei ist

$$K'_{\alpha'} = \varepsilon'^{\alpha'-1} K' \quad (\alpha' = 1, \dots, p'),$$

$$\varepsilon' = e^{\frac{2\pi i}{p'}},$$

$$K' = \sqrt[p']{a_{p+1, p+p'}^{(1)}}$$

unter der Annahme $a_{p+1, p+p'}^{(1)} \neq 0$. Dann gelten die Differentialgleichungen vom Rang $p'k$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_2}{dt} + p' \mathfrak{Y}_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_p}{dt} + p' \mathfrak{Y}_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+\alpha'}}{dt} + \frac{p' K'_{\alpha'}}{t} \mathfrak{Y}_{p+\alpha'} + \dots = 0 \quad (\alpha' = 1, \dots, p').$$

Es handelt sich um die p' Lösungen, welche den p' linearen Elementarteilern entsprechen.

Die Annahme $p > p'$ ist hier nicht erforderlich. Man könnte also nach dieser Methode, wenn $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ ist, auch die Lösungen des Differentialgleichungssystems (A) bestimmen, welche zum Elementarteiler s^p gehören. Wenn man aber

$$x = t^p; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = t Y_2, \quad \dots, \quad y_p = t^{p-1} Y_p,$$

$$y_{p+1} = Y_{p+1}, \quad \dots, \quad y_{p+p'} = Y_{p+p'},$$

setzt, erhält man ein Differentialgleichungssystem vom Rang pk , während die zuerst angewandte Substitution auf ein Differentialgleichungssystem vom geringeren Rang $pk - 1$ geführt hat.

2. Im zweiten Falle $p = p'$ benutzen wir wieder die Substitution

$$x = t^p; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = t Y_2, \quad \dots, \quad y_p = t^{p-1} Y_p,$$

$$y_{p+1} = Y_{p+1}, \quad y_{p+2} = t Y_{p+2}, \quad \dots, \quad y_{2p} = t^{p-1} Y_{2p},$$

welche zu den Differentialgleichungen führt:

$$t^{2-pk} \frac{dY_1}{dt} + p a_{1,p}^{(1)} Y_p + p a_{1,2p}^{(1)} Y_{2p} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_3}{dt} + p Y_1 + \dots = 0,$$

...

$$t^{2-pk} \frac{dY_p}{dt} + p Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+1}}{dt} + p a_{p+1,p}^{(1)} Y_p + p a_{p+1,2p}^{(1)} Y_{2p} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+2}}{dt} + p Y_{p+1} + \dots = 0,$$

...

$$t^{2-pk} \frac{dY_{2p}}{dt} + p Y_{2p-1} + \dots = 0.$$

Wenn die zur Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ vom Rang $pk - 1$ gehörige charakteristische Gleichung $2p$ voneinander und von Null verschiedene Wurzeln

$$p K_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, 2p)$$

besitzt, führen wir an Stelle von $Y_1, \dots, Y_{2p}$ neue Veränderliche $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_{2p}$ so ein, daß die Differentialgleichungen gelten:

$$t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + p K_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 2p)$$

wo die weggelassenen Glieder t im Nenner enthalten. Es ist eine lineare Verbindung

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{2p} Y_{2p}$$

so vorhanden, daß

$$K_\alpha (\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{2p} Y_{2p}) = \lambda_2 Y_1 + \dots + \lambda_p Y_{p-1} + \lambda_{p+2} Y_{p+1} + \dots + \lambda_{2p} Y_{2p-1} + \lambda_1 a_{1,p}^{(1)} Y_p + \lambda_{p+1} a_{p+1,p}^{(1)} Y_p + \lambda_1 a_{1,2p}^{(1)} Y_{2p} + \lambda_{p+1} a_{p+1,2p}^{(1)} Y_{2p}$$

ist. Die Vergleichung der Glieder mit $Y_1, \dots, Y_{p-1}, Y_{p+1}, \dots, Y_{2p-1}$ ergibt

$$\lambda_2 = K_\alpha \lambda_1, \dots, \lambda_p = K_\alpha \lambda_{p-1},$$

$$\lambda_{p+2} = K_\alpha \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2p} = K_\alpha \lambda_{2p-1},$$

also

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_p = 1 : K_\alpha : \dots : K_\alpha^{p-1},$$

$$\lambda_{p+1} : \lambda_{p+2} : \dots : \lambda_{2p} = 1 : K_\alpha : \dots : K_\alpha^{p-1}.$$

Aus der Vergleichung der Koeffizienten von Y_p, Y_{2p} folgt

$$(a_{1,p}^{(1)} - K_\alpha^p) \lambda_1 + a_{p+1,p}^{(1)} \lambda_{p+1} = 0,$$

$$a_{1,2p}^{(1)} \lambda_1 + (a_{p+1,2p}^{(1)} - K_\alpha^p) \lambda_{p+1} = 0.$$

Wir setzen $p + p' + p'' = m$. An Stelle der Punkte steht in der α -ten Differentialgleichung ($\alpha = 1, \dots, m$):

$$\sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) y_{\beta}.$$

Wenn $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ und $p > p'$ ist, können wir wie in § 2

$$a_{p+1,p}^{(1)} = 0,$$

ferner, wenn $p' > p''$ ist,

$$a_{p+p'+1,p}^{(1)} = 0$$

voraussetzen. Letzteres erreichen wir, wenn

$$h = \frac{a_{p+p'+1,p}^{(1)}}{a_{1p}^{(1)}}$$

gesetzt wird, durch die Substitution

$$\begin{aligned} y_{p+p'+1} &= y_{p+p'+1} - h y_1, \\ y_{p+p'+2} &= y_{p+p'+2} - h y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{p+p'+p''} &= y_{p+p'+p''} - h y_{p''}. \end{aligned}$$

I. Um die zum Elementarteiler s^p gehörigen Lösungen unseres Differentialgleichungssystems zu finden, benutzen wir die Substitution

$$\begin{aligned} x &= t^p; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = t Y_2, \quad \dots, \quad y_p = t^{p-1} Y_p, \\ y_{p+1} &= Y_{p+1}, \quad y_{p+2} = t Y_{p+2}, \quad \dots, \quad y_{p+p'} = t^{p'-1} Y_{p+p'}, \\ y_{p+p'+1} &= Y_{p+p'+1}, \quad y_{p+p'+2} = t Y_{p+p'+2}, \quad \dots, \\ &\quad y_{p+p'+p''} = t^{p''-1} Y_{p+p'+p''}. \end{aligned}$$

Im Falle $p > p' > p''$ gehen unsere Differentialgleichungen über in

$$\begin{aligned} t^{2-pk} \frac{dY_1}{dt} + p a_{1p}^{(1)} Y_p + \dots &= 0, \\ t^{2-pk} \frac{dY_2}{dt} + p Y_1 + \dots &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ t^{2-pk} \frac{dY_p}{dt} + p Y_{p-1} + \dots &= 0, \\ t^{2-pk} \frac{dY_{p+1}}{dt} + p a_{p+1,p}^{(1)} Y_p + \dots &= 0, \\ t^{2-pk} \frac{dY_{p+2}}{dt} + p Y_{p+1} + \dots &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'}}{dt} + p Y_{p+p'-1} + \dots &= 0, \\
t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'+1}}{dt} + p a_{p+p'+1,p}^{(1)} Y_p + \dots &= 0, \\
t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'+2}}{dt} + p Y_{p+p'+1} + \dots &= 0, \\
\dots & \\
t^{2-pk} \frac{dY_{p+p'+p''}}{dt} + p Y_{p+p'+p''-1} + \dots &= 0.
\end{aligned}$$

Wir nehmen $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ an und setzen nach dem vorausgeschickten Satze

$$a_{p+1,p}^{(1)} = 0, \quad a_{p+p'+1,p}^{(1)} = 0.$$

Wir bestimmen K_α ($\alpha = 1, \dots, p$) wie in § 1 und schreiben unter Einführung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_\alpha &= Y_1 + K_\alpha Y_2 + \dots + K_\alpha^{p-1} Y_p \quad (\alpha = 1, \dots, p), \\
\mathfrak{Y}_{p+1} &= Y_{p+1}, \dots, \mathfrak{Y}_{p+p'+p''} = Y_{p+p'+p''}
\end{aligned}$$

unser Differentialgleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned}
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + p K_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \dots &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p), \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+1}}{dt} + \dots &= 0, \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+2}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{p+1} + \dots &= 0, \\
\dots & \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+p'}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{p+p'-1} + \dots &= 0, \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+p'+1}}{dt} + \dots &= 0, \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+p'+2}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{p+p'+1} + \dots &= 0, \\
\dots & \\
t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+p'+p''}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{p+p'+p''-1} + \dots &= 0.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung hat p voneinander und von Null verschiedene Wurzeln pK_α ($\alpha = 1, \dots, p$), die p' -fache Wurzel $s = 0$ mit dem Elementarteiler $s^{p'}$ und die p'' -fache Wurzel $s = 0$ mit dem Elementarteiler $s^{p''}$. Die zu den p einfachen Wurzeln pK_α gehörigen Lösungen können nach Jahresber. 24 bestimmt werden.

Wenn man, wie in § 2, 2., unter der Voraussetzung, daß die dort aufgestellte Gleichung $2p$ -ten Grades für K *voneinander und von Null verschiedene Wurzeln* K_α ($\alpha = 1, \dots, 2p$) besitzt, $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_{2p}$ durch $Y_1, \dots, Y_{2p}$ ausdrückt und

$$\mathfrak{Y}_{2p+1} = Y_{2p+1}, \quad \dots, \quad \mathfrak{Y}_{2p+p''} = Y_{2p+p''}$$

setzt, erhält man die Differentialgleichungen

$$t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + p K_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 2p),$$

$$t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{2p+1}}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{2p+2}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{2p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_{2p+p''}}{dt} + p \mathfrak{Y}_{2p+p''-1} + \dots = 0.$$

Die charakteristische Gleichung hat die einfachen Wurzeln $p K_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, 2p$), denen nach Jahresber. 24 zu bestimmende Lösungen entsprechen, und die p'' -fache Wurzel $s = 0$ mit dem Elementarteiler $s^{p''}$.

Im Falle $p = p' = p''$ führen wir durch dieselbe Substitution wie oben die neuen Veränderlichen Y ein. Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$t^{2-pk} \frac{dY_1}{dt} + p a_{1p}^{(1)} Y_p + p a_{1,2p}^{(1)} Y_{2p} + p a_{1,3p}^{(1)} Y_{3p} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_2}{dt} + p Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+1}}{dt} + p a_{p+1,p}^{(1)} Y_p + p a_{p+1,2p}^{(1)} Y_{2p} + p a_{p+1,3p}^{(1)} Y_{3p} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{p+2}}{dt} + p Y_{p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{2p+1}}{dt} + p a_{2p+1,p}^{(1)} Y_p + p a_{2p+1,2p}^{(1)} Y_{2p} + p a_{2p+1,3p}^{(1)} Y_{3p} + \dots = 0,$$

$$t^{2-pk} \frac{dY_{2p+2}}{dt} + p Y_{2p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Wenn die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1p}^{(1)} - K^p, & a_{1,2p}^{(1)}, & a_{1,3p}^{(1)} \\ a_{p+1,p}^{(1)}, & a_{p+1,2p}^{(1)} - K^p, & a_{p+1,3p}^{(1)} \\ a_{2p+1,p}^{(1)}, & a_{2p+1,2p}^{(1)}, & a_{2p+1,3p}^{(1)} - K^p \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten K voneinander und von Null verschiedene Wurzeln K_α ($\alpha = 1, \dots, 3p$) besitzt, kommt man nach dem Muster von § 2, 2. auf Differentialgleichungen

$$t^{2-pk} \frac{d \mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + p K_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 3p).$$

II. Um die zum Elementarteiler $s^{p'}$ gehörigen Lösungen zu erhalten, benutzen wir die Substitution

$$\begin{aligned} x &= t^{p'}; & y_1 &= Y_1, & \dots, & y_p &= Y_p, \\ y_{p+1} &= Y_{p+1}, & y_{p+2} &= t Y_{p+2}, & \dots, & y_{p+p'} &= t^{p'-1} Y_{p+p'}, \\ y_{p+p'+1} &= Y_{p+p'+1}, & y_{p+p'+2} &= t Y_{p+p'+2}, & \dots, \\ & & y_{p+p'+p''} &= t^{p''-1} Y_{p+p'+p''}. \end{aligned}$$

Im Falle $p > p' > p''$ erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} t^{1-p'k} \frac{d Y_1}{dt} + \dots &= 0, \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_2}{dt} + p' Y_1 + \dots &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_p}{dt} + p' Y_{p-1} + \dots &= 0, \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+1}}{dt} + \frac{p' a_{p+1, p+p'}^{(1)}}{t} Y_{p+p'} + \dots &= 0, \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+2}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+1} + \dots + 0, \\ &\dots \dots \dots \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+p'}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'-1} + \dots &= 0, \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+p'+1}}{dt} + \frac{p' a_{p+p'+1, p+p'}^{(1)}}{t} Y_{p+p'} + \dots &= 0, \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+p'+2}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'+1} + \dots &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ t^{1-p'k} \frac{d Y_{p+p'+p''}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'+p''-1} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

In den p ersten Differentialgleichungen enthalten die weggelassenen Glieder $t, t^2, \dots$ im Nenner, in den $p' + p''$ letzten Gleichungen $t^2, \dots$. Unter der Annahme $a_{p+1, p+p'}^{(1)} \neq 0$ können wir

$$a_{p+p'+1, p+p'}^{(1)} = 0$$

setzen. Die Veränderlichen

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_\alpha &= Y_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p; p + p' + 1, \dots, p + p' + p''), \\ \mathfrak{Y}_{p+\alpha'} &= Y_{p+1} + K_{\alpha'} Y_{p+2} + \dots + K_{\alpha'}^{p'+1} Y_{p+p'} \quad (\alpha' = 1, \dots, p'), \end{aligned}$$

wo $K'_{\alpha'}$, wie bei der entsprechenden Untersuchung in § 2 definiert ist, genügen den *Differentialgleichungen vom Rang $p'k$*

$$t^{1-p'k} \frac{dY_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_2}{dt} + p' Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_p}{dt} + p' Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'+1}}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'+2}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'+p''}}{dt} + \frac{p'}{t} Y_{p+p'+p''-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+\alpha'}}{dt} + \frac{p' K'_{\alpha'}}{t} Y_{p+\alpha'} + \dots = 0 \quad (\alpha' = 1, \dots, p').$$

Im *Falle* $p > p' = p''$ haben nach Einführung der Veränderlichen Y die $(p+1)$ -te und die $(p+p'+1)$ -te Differentialgleichung die Form

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+1}}{dt} + \frac{p' a_{p+1, p+p'}^{(1)}}{t} Y_{p+p'} + \frac{p' a_{p+1, p+2p'}^{(1)}}{t} Y_{p+2p'} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'+1}}{dt} + \frac{p' a_{p+p'+1, p+p'}^{(1)}}{d} Y_{p+p'} + \frac{p' a_{p+p'+1, p+2p'}^{(1)}}{t} Y_{p+2p'} + \dots = 0.$$

Unter einer nach § 2, 2. leicht anzugebenden Bedingung kommen wir auf *Differentialgleichungen von der Form*:

$$t^{1-p'k} \frac{dY_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_2}{dt} + p' Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_p}{dt} + p' Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{dY_{p+\alpha'}}{dt} + \frac{p' K'_{\alpha'}}{t} Y_{p+\alpha'} + \dots = 0 \quad (\alpha' = 1, \dots, 2p').$$

III. Die zum Elementarteiler $s^{p''}$ gehörigen Lösungen sind im Falle $p \geq p' > p''$ zu bestimmen. Die Substitution

$$x = t^{p''}; \quad y_1 = Y_1, \dots, y_{p+p'} = Y_{p+p'},$$

$$y_{p+p'+1} = Y_{p+p'+1}, \quad Y_{p+p'+2} = t Y_{p+p'+2}, \dots, y_{p+p'+p''} = t^{p''-1} Y_{p+p'+p''}$$

führt zu den Differentialgleichungen

$$t^{1-p''k} \frac{dY_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_2}{dt} + p'' Y_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_p}{dt} + p'' Y_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+1}}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+2}}{dt} + p'' Y_{p+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+p'}}{dt} + p'' Y_{p+p'-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+p'+1}}{dt} + \frac{p'' a_{p+p'+1, p+p'+p''}^{(1)}}{t} Y_{p+p'+p''} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+p'+2}}{dt} + \frac{p''}{t} Y_{p+p'+1} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p''k} \frac{dY_{p+p'+p''}}{dt} + \frac{p''}{t} Y_{p+p'+p''-1} + \dots = 0.$$

Wenn $a_{p+p'+1, p+p'+p''}^{(1)} \neq 0$ ist, genügen die Veränderlichen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p+p'),$$

$$\mathfrak{Y}_{p+p'+\alpha''} = Y_{p+p'+1} + K_{\alpha''}'' Y_{p+p'+2} + \dots + K_{\alpha''}''^{p''-1} Y_{p+p'+p''}$$

$$(\alpha'' = 1, \dots, p''),$$

wo die voneinander und von Null verschiedenen Größen $K_{\alpha''}''$ ($\alpha'' = 1, \dots, p''$) nach dem Muster von § 2 bestimmt werden, einem Differentialgleichungssystem, in welchem die p'' letzten Gleichungen die Form haben:

$$t^{1-p''k} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+p'+\alpha''}}{dt} + \frac{p'' K_{\alpha''}''}{t} \mathfrak{Y}_{p+p'+\alpha''} + \dots = 0 \quad (\alpha'' = 1, \dots, p'').$$

$$\begin{aligned}
t^{2-pk} \frac{dY_p}{dt} + \left(\frac{p a_{p1}^{(1)}}{t^{2p-2}} + \dots \right) Y_1 + \dots + \left(\frac{p a_{pp}^{(1)}}{t^{p-1}} + \dots + \frac{p-1}{t^{pk-1}} \right) Y_p \\
+ \sum_{\beta=p+1}^m \left(\frac{p a_{p\beta}^{(1)}}{t^{2p-2}} + \dots \right) Y_\beta = 0, \\
t^{1-pk} \frac{dY_\alpha}{dt} + \left(\frac{p a_{\alpha 1}^{(1)}}{t^p} + \dots \right) Y_1 + \dots + \left(\frac{p a_{\alpha p}^{(1)}}{t^p} + \dots \right) Y_p \\
+ \sum_{\beta=p+1}^m \left(p a_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{p a_{\alpha\beta}^{(1)}}{t^p} + \dots \right) Y_\beta = 0 \quad (\alpha = p+1, \dots, m).
\end{aligned}$$

Die unter der Annahme $a_{1p}^{(1)} \neq 0$ einzuführenden neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_1 + K_\alpha Y_2 + \dots + K_\alpha^{p-1} Y_p \quad (\alpha = 1, \dots, p),$$

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_\alpha \quad (\alpha = p+1, \dots, m)$$

genügen Differentialgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
t^{1-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + \frac{p K_\alpha}{t} \mathfrak{Y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{t^2} + \dots \right) \mathfrak{Y}_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p), \\
t^{1-pk} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=p+1}^m p a_{\alpha\beta}^{(0)} \mathfrak{Y}_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{t} + \dots \right) \mathfrak{Y}_\beta = 0 \\
(\alpha = p+1, \dots, m).
\end{aligned}$$

Zur Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ vom Rang pk gehört eine charakteristische Gleichung mit der p -fachen Wurzel $s = 0$, welcher p lineare Elementarteiler entsprechen, und $m - p$ von Null verschiedenen Wurzeln. Es handelt sich hier um die zu $s = 0$ gehörigen Lösungen des Differentialgleichungssystems.

§ 5.

Die Gleichung $\Delta(s) = 0$ habe die mehrfache Wurzel $s = 0$ mit den Elementarteilern $s^p, s^{p'}$ und $m - p - p'$ von Null verschiedene Wurzeln.

Wir haben jetzt ein Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Veränderlichen $y_1, \dots, y_{p+p'}, y_{p+p'+1}, \dots, y_m$. Zunächst haben wir $p + p'$ Differentialgleichungen von derselben Form wie am Anfang von § 2, wo aber jetzt $m > p + p'$ ist. Dazu kommen noch $m - p - p'$ Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
x^{1-k} \frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=p+p'+1}^m a_{\alpha\beta}^{(0)} y_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0 \\
(\alpha = p + p' + 1, \dots, m);
\end{aligned}$$

An Stelle der Punkte stehen in $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_m$ lineare Glieder mit $t^2, \dots$ im Nenner in den $p + p'$ ersten, mit $t, t^2, \dots$ im Nenner in den $m - p - p'$ letzten Gleichungen. Zur Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ vom Rang p, k gehört eine charakteristische Gleichung mit $p + p'$ verschwindenden Wurzeln, welchen lineare Elementarteiler entsprechen, und $m - p - p'$ von Null verschiedenen Wurzeln.

Um die zum Elementarteiler $s^{p'}$ gehörigen Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichungen zu erhalten, benutzen wir die Substitution

$$\begin{aligned} x &= t^{p'}; \quad y_1 = Y_1, \dots, y_p = Y_p, \\ y_{p+1} &= Y_{p+1}, y_{p+2} = t Y_{p+2}, \dots, y_{p+p'} = t^{p'-1} Y_{p+p'}, \\ y_\alpha &= Y_\alpha \quad (\alpha = p + p' + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Zu den linken Seiten der $p + p'$ Differentialgleichungen auf S. 487, welche mit

$$t^{1-p'k} \frac{dY_1}{dt}, \dots, t^{1-p'k} \frac{dY_{p+p'}}{dt}$$

beginnen, kommen je $m - p - p'$ in $Y_{p+p'+1}, \dots, Y_m$ lineare Glieder hinzu, deren Koeffizienten für $t = \infty$ verschwinden. Es kommen die $m - p - p'$ Gleichungen hinzu:

$$\begin{aligned} t^{1-p'k} \frac{dY_\alpha}{dt} + \left(\frac{p' a_{\alpha 1}^{(1)}}{t^{p'}} + \dots \right) Y_1 + \dots + \left(\frac{p' a_{\alpha p}^{(1)}}{t^{p'}} + \dots \right) Y_p \\ + \left(\frac{p' a_{\alpha, p+1}^{(1)}}{t^{p'}} + \dots \right) Y_{p+1} + \dots + \left(\frac{p' a_{\alpha, p+p'}^{(1)}}{t^{p'}} + \dots \right) Y_{p+p'} \\ + \sum_{\beta=p+p'+1}^m \left(p' a_{\alpha \beta}^{(0)} + \frac{p' a_{\alpha \beta}^{(1)}}{t^{p'}} + \dots \right) Y_\beta = 0 \\ (\alpha = p + p' + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, p; p + p' + 1, \dots, m),$$

$$\mathfrak{Y}_{p+\alpha'} = Y_{p+1} + K'_{\alpha'} Y_{p+2} + \dots + K'_{\alpha' p'-1} Y_{p+p'}, \quad (\alpha' = 1, \dots, p'),$$

wo die $K'_{\alpha'}$ wie auf S. 488 definiert sind. Wir haben aus den Differentialgleichungen

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_1}{dt} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_2}{dt} + p' \mathfrak{Y}_1 + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_p}{dt} + p' \mathfrak{Y}_{p-1} + \dots = 0,$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_{p+\alpha'}}{dt} + \frac{p' K'_{\alpha'}}{t} \mathfrak{Y}_{p+\alpha'} + \dots = 0 \quad (\alpha' = 1, \dots, p'),$$

$$t^{1-p'k} \frac{d\mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=p+p'+1}^m p' a_{\alpha \beta}^{(0)} \mathfrak{Y}_\beta + \dots = 0 \quad (\alpha = p + p' + 1, \dots, m)$$

die Lösungen zu bestimmen, welche den p' linearen Elementarteilern $s, \dots, s$ entsprechen.

2. Im zweiten Falle $p = p'$ benutzen wir die Substitution

$$\begin{aligned} x &= t^p; \quad y_1 = Y_1, \quad y_2 = t Y_2, \quad \dots, \quad y_p = t^{p-1} Y_p, \\ y_{p+1} &= Y_{p+1}, \quad y_{p+2} = t Y_{p+2}, \quad \dots, \quad y_{2p} = t^{p-1} Y_{2p}, \\ y_\alpha &= Y_\alpha \quad (\alpha = 2p+1, \dots, m) \end{aligned}$$

Zu den wie in § 2, 2. eingeführten Veränderlichen $\mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_{2p}$ kommen die Veränderlichen

$$\mathfrak{Y}_\alpha = Y_\alpha \quad (\alpha = 2p+1, \dots, m)$$

hinzu. Wir haben Differentialgleichungen von der Form

$$t^{1-pk} \frac{d \mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + \frac{p K_\alpha}{t} \mathfrak{Y}_\alpha + \dots = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 2p),$$

$$t^{1-pk} \frac{d \mathfrak{Y}_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=2p+1}^m p a_{\alpha\beta}^{(0)} \mathfrak{Y}_\beta + \dots = 0 \quad (\alpha = 2p+1, \dots, m).$$

Die charakteristische Gleichung hat neben $m - 2p$ von Null verschiedenen Wurzeln $2p$ verschwindende Wurzeln, welchen lineare Elementarteiler entsprechen.

§ 6.

In dem Differentialgleichungssystem (A) habe die Determinante

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

nur lineare Elementarteiler $s - a_1, \dots, s - a_m$, und zwar sei $a_1 = \dots = a_\mu = 0$, aber $a_{\mu+1}, \dots, a_m$ von Null verschieden. Wenn auch die Determinante

$$|a_{\alpha\beta}^{(1)} - s \delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, \mu)$$

nur lineare Elementarteiler besitzt, kann man durch eine lineare Transformation von $y_1, \dots, y_\mu$ erreichen, daß

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, \mu; \alpha \neq \beta)$$

verschwindet, so daß die Differentialgleichungen vorliegen:

$$x^{1-k} \frac{d y_\alpha}{dx} + \frac{a_{\alpha\alpha}^{(1)}}{x} y_\alpha + \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} y_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) y_\beta = 0$$

$$(\alpha = 1, \dots, \mu),$$

$$x^{1-k} \frac{d y_\alpha}{dx} + a_{\alpha\alpha} y_\alpha + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) y_\beta = 0 \quad (\alpha = \mu+1, \dots, m).$$

Wir wollen in den einfachsten Fällen $k = 1$ und $k = 2$ die den linearen Elementarteilen von $\Delta(s)$ entsprechenden, unseren Differentialgleichungen *formal genügenden Reihen* aufstellen. Wir setzen $a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ ($\alpha = 1, \dots, \mu$) als verschieden voraus.

Wenn $k = 1$ ist, bestimmen wir eine formale Lösung

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^r}$ ergibt wegen $a_\alpha \neq 0$ ($\alpha = \mu + 1, \dots, m$)

$$A_{\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = \mu + 1, \dots, m).$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+1}}$ erhält man

$$\begin{aligned} (a_{\alpha\alpha}^{(1)} - r) A_{\alpha 0} &= 0 & (\alpha = 1, \dots, \mu), \\ a_\alpha A_{\alpha 1} + \sum_{\beta=1}^m a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 0} &= 0 & (\alpha = \mu + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Wenn

$$r = a_{11}^{(1)} \text{ *)}$$

angenommen wird, ist A_{10} willkürlich und

$$\begin{aligned} A_{\alpha 0} &= 0 & (\alpha = 2, \dots, \mu), \\ A_{\alpha 1} &= -\frac{a_{\alpha 1}^{(1)}}{a_\alpha} A_{10} & (\alpha = \mu + 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+2}}$ ergibt sich

$$(a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)} - 1) A_{\alpha 1} + a_{\alpha 1}^{(2)} A_{10} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \mu),$$

wodurch $A_{\alpha 1}$ ($\alpha = 1, \dots, \mu$) bestimmt ist, wenn $a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \neq 1$ ist, und für $\alpha = \mu + 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} -(r+1) A_{\alpha 1} + a_\alpha A_{\alpha 2} + \sum_{\beta=1}^m a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + a_{\alpha 1}^{(2)} A_{10} &= 0, \\ a_\alpha A_{\alpha 2} + \sum_{\beta=1}^m (a_{\alpha\beta}^{(1)} - (a_{11}^{(1)} + 1) \delta_{\alpha\beta}) A_{\beta 2} + a_{\alpha 1}^{(2)} A_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Wenn $a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)}$ ($\alpha = 2, \dots, \mu$) keine ganze positive Zahl ist, sind alle Koeffizienten $A_{\alpha n}$ ($\alpha = 1, \dots, m$) bestimmt.

*) Es könnte r auch gleich einer der Größen $a_{22}^{(1)}, \dots, a_{\mu\mu}^{(1)}$ sein.

Wenn $k = 2$ ist, führen wir unsere Differentialgleichungen durch die Substitution

$$y_\alpha = e^{-a_{11}^{(1)} x} z_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

über in

$$x^{-1} \frac{dz_\alpha}{dx} + \frac{a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)}}{x} z_\alpha + \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} z_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) z_\beta = 0$$

$$(\alpha = 1, \dots, \mu),$$

$$x^{-1} \frac{dz_\alpha}{dx} + a_{\alpha\alpha} z_\alpha + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \delta_{\alpha\beta}}{x} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) z_\beta = 0$$

$$(\alpha = \mu + 1, \dots, m).$$

Wir bestimmen eine formale Lösung

$$z_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^r}$ erhält man wegen $a_{\alpha\alpha} \neq$

$$(\alpha = \mu + 1, \dots, m)$$

$$A_{\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = \mu + 1, \dots, m).$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+1}}$ ergibt

$$(a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)}) A_{\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \mu),$$

so daß A_{10} willkürlich und

$$A_{\alpha 0} = 0 \quad (\alpha = 2, \dots, \mu)$$

ist, ferner

$$a_{\alpha\alpha} A_{\alpha 1} + a_{\alpha 1}^{(1)} A_{10} = 0 \quad (\alpha = \mu + 1, \dots, m),$$

also

$$A_{\alpha 1} = -\frac{a_{\alpha 1}^{(1)}}{a_{\alpha\alpha}} A_{10} \quad (\alpha = \mu + 1, \dots, m).$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+2}}$ in den μ ersten Differentialgleichungen ergibt

$$-r A_{10} + \sum_{\beta=\mu+1}^m a_{1\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + a_{11}^{(2)} A_{10} = 0,$$

$$(a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)}) A_{\alpha 1} + \sum_{\beta=\mu+1}^m a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + a_{\alpha 1}^{(1)} A_{10} = 0 \quad (\alpha = 2, \dots, \mu).$$

⁵⁾ An die Stelle von $a_{11}^{(1)}$ kann eine der Größen $a_{22}^{(1)}, \dots, a_{\mu\mu}^{(1)}$ treten.

Nach Einsetzung von $A_{\alpha 1}$ ($\beta = \mu + 1, \dots, m$) ist

$$r = a_{11}^{(2)} - \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{1\beta}^{(1)} a_{\beta 1}^{(1)}}{a_{\beta\beta}},$$

$$(a_{\alpha\alpha}^{(1)} - a_{11}^{(1)}) A_{\alpha 1} = - \left(a_{\alpha 1}^{(2)} - \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)} a_{\beta 1}^{(1)}}{a_{\beta\beta}} \right) A_{10} \quad (\alpha = 2, \dots, \mu).$$

Aus den $m - \mu$ letzten Differentialgleichungen folgt:

$$a_{\alpha} A_{\alpha 2} + a_{\alpha 1}^{(1)} A_{11} + \sum_{\beta=2}^{\mu} (a_{\alpha\beta}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \delta_{\alpha\beta}) A_{\beta 1} + a_{\alpha 1}^{(2)} A_{10} = 0$$

$$(\alpha = \mu + 1, \dots, m),$$

wo für $A_{\beta 1}$ ($\beta = \mu + 1, \dots, m$ und $\beta = 2, \dots, \mu$) die gefundenen Werte einzusetzen sind. Durch Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^{r+3}}$ in der ersten

Differentialgleichung erhalten wir

$$-(r+1)A_{11} + \sum_{\beta=\mu+1}^m a_{1\beta}^{(1)} A_{\beta 2} + \sum_{\beta=1}^m a_{1\beta}^{(2)} A_{\beta 1} + a_{11}^{(3)} A_{10} = 0$$

oder, wenn der obige Ausdruck für $A_{\beta 2}$ ($\beta = \mu + 1, \dots, m$) eingesetzt und die bekannten Glieder weggelassen werden,

$$\left(a_{11}^{(3)} - \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{1\beta}^{(1)} a_{\beta 1}^{(1)}}{a_{\beta\beta}} - r - 1 \right) A_{11} + \dots = 0$$

oder

$$-A_{11} + \dots = 0.$$

Damit sind die Koeffizienten A_{11} und $A_{\alpha 2}$ ($\alpha = \mu + 1, \dots, m$) bestimmt; usw.

Die dargestellte Methode überträgt sich auf das oben angeschriebene Differentialgleichungssystem vom Rang $k > 2$. Man setzt

$$y_{\alpha} = e^{-\frac{\sigma^{(1)} x^{k-1}}{k-1} - \dots - \sigma^{(k-1)} x} z_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

und bestimmt $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(k-1)}$ so, daß die Differentialgleichungen für die z_{α} durch Reihen

$$z_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt werden.

Man könnte allgemeiner voraussetzen, in dem Differentialgleichungssystem (A) habe die charakteristische Gleichung

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

verschwindende Wurzeln, welchen μ lineare Elementarteiler $s, \dots, s$ und die Elementarteiler höheren Grades $s^p, s^{p'}, \dots$ entsprechen, und von Null verschiedene (einfache oder mehrfache) Wurzeln, welche der Gleichung

$$|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| = 0 \quad \text{mit} \quad |a_{\alpha\beta}^{(0)}| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = \mu + p + p' + \dots + 1, \dots, m)$$

genügen. Wenn $a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \mu$) ist und die Determinante

$$|a_{\alpha\beta}^{(1)} - s\delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, \mu)$$

nur lineare Elementarteiler hat⁶⁾, kann man durch lineare Transformation von $y_1, \dots, y_\mu$ erreichen, daß $a_{\alpha\beta}^{(1)}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \mu; \alpha \neq \beta$) verschwindet. Man hat dann die Differentialgleichungen:

$$x^{1-k} \frac{d y_\alpha}{d x} + \frac{a_{\alpha\alpha}^{(1)}}{x} y_\alpha + \sum_{\beta=\mu+1}^m \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} y_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{x^2} + \dots \right) y_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \mu),$$

$$x^{1-k} \frac{d y_{\mu+1}}{d x} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\mu+1,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0$$

$$x^{1-k} \frac{d y_{\mu+2}}{d x} + y_{\mu+1} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\mu+2,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

.....

$$x^{1-k} \frac{d y_{\mu+p}}{d x} + y_{\mu+p-1} + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\mu+p,\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0,$$

.....

$$x^{1-k} \frac{d y_\alpha}{d x} + \sum_{\beta=\mu+p+p'+\dots+1}^m a_{\alpha\beta}^{(0)} y_\beta + \sum_{\beta=1}^m \left(\frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \dots \right) y_\beta = 0$$

($\alpha = \mu + p + p' + \dots + 1, \dots, m$).

Man kann auch hier z. B. für $k = 1$ unter gewissen Bedingungen Reihen von der oben betrachteten Form aufstellen, welche den Differentialgleichungen formal genügen und den μ linearen Elementarteilern $s, \dots, s$ von $\Delta(s)$ entsprechen.

Es bietet sich nun die Aufgabe dar, die formalen Reihen soweit wie möglich durch Laplacesche Integrale zu ersetzen, welche wirkliche Lösungen der Differentialgleichungen darstellen. In einfachen Fällen ist dies in den in der Einleitung angeführten Arbeiten in Math. Annalen 111 und 113 geschehen. Die dort benutzte besondere Form der Laplaceschen Integrale ist aber von beschränkter Anwendbarkeit. Die Lösung allgemeinerer Differentialgleichungssysteme erfordert noch weitere Untersuchungen.

⁶⁾ Man könnte auch beliebige Elementarteiler dieser Determinante zulassen.

Über singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen*.

Von

Ernst Rudolf Lonn.

§ 1.

Fragestellung.

Wir betrachten in dieser Arbeit eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{H_1(x, y) + \eta_1(x, y)}{H_2(x, y) + \eta_2(x, y)}$$

korrekter ausgedrückt: ein System von zwei Differentialgleichungen

$$(1') \quad \frac{dy}{dt} = H_1 + \eta_1, \quad \frac{dx}{dt} = H_2 + \eta_2;$$

und zwar sollen H_1, H_2 etwa homogene Polynome vom gleichen Grade m sein, die keinen reellen Linearfaktor gemeinsam haben (es würde auch genügen, wenn sie nicht Polynome, sondern irgendwelche andere für $x, y \neq 0, 0$ analytische, homogene Funktionen m -ter Stufe wären). Ferner sollen die „Zusatzglieder“ η_1, η_2 stetig und $= o(r^m)$ sein ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Der Punkt $(0, 0)$ ist dann singuläre Stelle der Differentialgleichung (1). Wir wollen aber weiter noch voraussetzen, daß die Differentialgleichung sich im übrigen in einer Umgebung dieser Stelle $(0, 0)$ *regulär* verhält.

Es handelt sich nun darum, Kriterien aufzustellen, mit denen man die Art des singulären Punktes feststellen kann; insbesondere darum, ob dieser singuläre Punkt von derselben Art wie derjenige der „verkürzten“ Gleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)}$$

ist.

Diese Frage ist von Poincaré und von Bendixson behandelt worden unter der Voraussetzung, daß die Zusatzglieder η_1, η_2 Potenzreihen in x, y seien. O. Perron¹⁾ hat zuerst dieselbe Frage behandelt ohne die Annahme, daß die Zusatzglieder analytisch seien; und zwar handelt es sich bei Perron um den Spezialfall *linearer* Hauptglieder H_1, H_2 . Die wichtigsten der hier vorhandenen Möglichkeiten hat dann G. Hoheisel²⁾ in wesentlich einfacherer Weise und

*) Diese Arbeit wurde von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau als Dissertation (D 2) angenommen.

¹⁾ Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 121—146; 16 (1923), S. 273—295.

²⁾ Jahresber. d. D. M. V. 42 (1933), S. 33—42.

unter stark verringerten Voraussetzungen behandelt. Schließlich ist neuerdings eine Arbeit von H. Forster³⁾ erschienen, in der analoge Bedingungen für den allgemeinen Fall nicht linearer H_1, H_2 bewiesen werden.

Während es sich bei den genannten Arbeiten darum handelt, *hinreichende Bedingungen* dafür aufzustellen, daß der singuläre Punkt der Gleichung (1) von derselben Art ist wie derjenige der Gleichung (2), ist das Ziel einer Arbeit von M. Frommer⁴⁾ Verfahren anzugeben, die gestatten, die Natur des singulären Punktes für eine *beliebige* vorgegebene Differentialgleichung der Gestalt (1), und in noch allgemeineren Fällen, festzustellen.

In dieser Arbeit bemühen wir uns hauptsächlich darum, möglichst scharf die Grenze festzustellen, bis zu der noch Übereinstimmung zwischen den singulären Punkten von Gleichung (1) und (2) besteht, bzw. wo diese Übereinstimmung aufhört; wir suchen also *hinreichende Bedingungen, die zugleich „fast notwendig“ sind*, und umgekehrt. Es könnte scheinen, daß diese Aufgabe durch die Frommerschen Untersuchungen bereits erledigt wäre; aber die von Frommer entwickelten Verfahren sind doch recht mühsam, so daß sie nicht zur Aufstellung von übersichtlichen allgemeinen Kriterien geführt haben. Überdies sind die genannten Verfahren auch wohl nur anwendbar unter stärker einschränkenden Bedingungen für die Zusatzglieder, als wir hier voraussetzen wollen.

Kriterien der gewünschten Art lassen sich, wie wir sehen werden, auf sehr elementare Weise gewinnen.

§ 2.

Allgemeine Bemerkungen, Fallunterscheidung.

Wir benutzen vielfach Polarkoordinaten r, φ . Dann treten an die Stelle der Gleichungen (1') diese:

$$(3) \quad \begin{cases} r \frac{dr}{dt} = (xH_2 + yH_1) + (x\eta_2 + y\eta_1), \\ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = (xH_1 - yH_2) + (x\eta_1 - y\eta_2). \end{cases}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(4) \quad \begin{cases} H_1(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \cos \varphi - H_2(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = F(\varphi), \\ H_1(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \sin \varphi + H_2(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \cos \varphi = G(\varphi); \\ \eta_1 \cdot \cos \varphi - \eta_2 \cdot \sin \varphi = f(r, \varphi), \\ \eta_1 \cdot \sin \varphi + \eta_2 \cdot \cos \varphi = g(r, \varphi). \end{cases}$$

³⁾ Math. Zeitschr. 43 (1937), S. 271–320.

⁴⁾ Math. Annalen 99 (1928), S. 222–272.

Wir setzen bis auf weiteres voraus, daß die Funktion $F(\varphi)$ nicht identisch verschwinde. Den hiernit ausgeschlossenen Fall $F(\varphi) \equiv 0$ behandelt § 9.

Um die Art des singulären Punktes $(0,0)$ festzustellen, erweist es sich als zweckmäßig, die Umgebung dieses Punktes in Sektoren zu zerlegen, deren jeder höchstens eine Nullstelle der Funktion $F(\varphi)$ enthält. Kennt man den Verlauf der Integralkurven von (1) in jedem dieser Sektoren, so ist damit im allgemeinen die Natur des singulären Punktes festgestellt. Nur in einem Falle reicht die sektorweise Untersuchung nicht aus. Wenn nämlich $F(\varphi)$ keine reellen Nullstellen besitzt — und noch in gewissen, sehr speziellen, anderen Fällen, die wir später auffinden werden —, ist der singuläre Punkt im allgemeinen ein „Strudelpunkt“, d. h. die Integralkurven sind Spiralen, die sich unendlich oft um diesen Punkt herumwinden; in Sonderfällen besteht jedoch auch die Möglichkeit, daß unendlich viele oder sogar alle geschlossene Kurven sind, die den singulären Punkt in ihrem Innern enthalten. — Mit der Frage, zwischen diesen Möglichkeiten zu entscheiden, beschäftigen wir uns in dieser Arbeit nicht.

Wir denken uns also die Umgebung der singulären Stelle in der oben besprochenen Weise in Sektoren eingeteilt und behalten uns dabei vor, diejenigen Sektoren, die eine Nullstelle von $F(\varphi)$ enthalten, nötigenfalls später noch „schmäler“ zu machen. Wir unterscheiden nun unter den Sektoren vier Arten:

A. Sektoren, in denen $F(\varphi)$ keine Nullstelle besitzt.

B. Sektoren, in denen $F(\varphi)$ eine Nullstelle φ_0 von ungerader Ordnung k besitzt, so daß in der Nähe von φ_0 eine Entwicklung

$$F(\varphi) = C(\varphi - \varphi_0)^k + o(|\varphi - \varphi_0|^k)$$

möglich ist. — Sei ferner $G(\varphi_0) = G_0$; diese Größe kann nicht $= 0$ sein, denn würden F und G zugleich für $\varphi = \varphi_0$ verschwinden, so müßte nach (4) für H_1 und H_2 dasselbe gelten, und H_1 und H_2 hätten den reellen Linearfaktor $y \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0$ gemeinsam, was der Voraussetzung widerspricht. — Es besteht nun ein wesentlicher Unterschied, je nachdem, ob

$$(B1) \quad \frac{C}{G_0} > 0 \quad \text{oder} \quad (B2) \quad \frac{C}{G_0} < 0 \quad \text{ist.}$$

C. Sektoren, in denen $F(\varphi)$ eine Nullstelle von gerader Ordnung k besitzt.

Wir werden die Sektoren der verschiedenen Arten der Reihe nach behandeln. Es zeigt sich dabei, daß für unsere in § 1 formulierte Fragestellung vor allem die Sektoren der Art C von Bedeutung sind.

Wie in § 1 erwähnt, soll der Punkt $(0,0)$ isolierte singuläre Stelle der Differentialgleichung (1) sein. Das ist z. B. sicherlich dann der Fall, wenn die Funktionen η_1, η_2 in einer Umgebung jedes von $(0,0)$ verschiedenen Punktes eine Lipschitz-Bedingung (nach x und y) erfüllen. Unter dieser oder einer ähnlichen Voraussetzung läuft — wie man sofort den bekannten Sätzen über

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen entnimmt — innerhalb einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ durch jeden von $(0, 0)$ verschiedenen Punkt eine und nur eine Integralkurve.

§ 3.

Fall A.

Ist $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ein Sektor, in dem die Funktion $F(\varphi)$ nicht verschwindet, so hat $|F(\varphi)|$ dort eine positive untere Grenze $\bar{F}$, und nach den Voraussetzungen über η_1, η_2 wird für $r \leq R_1$ die Größe $f(r, \varphi)$ immer absolut kleiner als $\frac{1}{2} \bar{F} r^m$ bleiben. Es ist also für $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r \leq R_1$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = r^{m+1} F(\varphi) + r f(r, \varphi) \neq 0,$$

man kann den Winkel φ als Kurvenparameter benutzen, und es ist nach (3)

$$\left| \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} \right| \text{ beschränkt, etwa } \leq M,$$

und daher, wenn $0 < r' < r'' \leq R_1$ ist:

$$\left| \log \frac{r''}{r'} \right| = \left| \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{dr}{r d\varphi} d\varphi \right| \leq M \cdot (\varphi_2 - \varphi_1).$$

In einem solchen Sektor laufen daher die Integralkurven von einem Randstrahl zum anderen, ohne dem singulären Punkt beliebig nahe zu kommen oder sich von ihm beliebig weit zu entfernen.

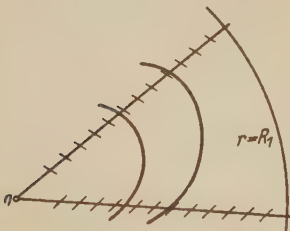


Fig. 1. Fall A.

Hat die Funktion $F(\varphi)$ insbesondere überhaupt keine reellen Nullstellen, so gibt es also nur Sektoren der Art A, dann laufen die Integralkurven unendlich oft um den singulären Punkt herum, dieser ist im allgemeinen ein Strudelpunkt. Es kann jedoch auch sein, daß die Kurven in sich zurücklaufen; dies führt zu den in § 2 erwähnten Möglichkeiten, die wir

hier nicht weiter untersuchen. — Klar ist jedoch folgendes: Gibt es (in dem Kreise $r \leq R_1$) eine geschlossene Integralkurve, so ist ja auf ihr

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dr}{r d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{G + g r^{-m}}{F + f r^{-m}} d\varphi = 0.$$

Gibt es nun solche geschlossenen Integralkurven in beliebiger Nähe des singulären Punktes, so ist aber innerhalb einer Folge solcher Kurven, die sich auf den singulären Punkt zusammenziehen,

$$\lim I = \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)} d\varphi.$$

Ein solches Verhalten ist daher nur dann möglich, wenn

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)} d\varphi = 0$$

ist; und in diesem Falle hat offenbar die verkürzte Differentialgleichung (2) — in Polarkoordinaten geschrieben:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)}$$

— einen „Wirbelpunkt“, d. h. alle ihre Integralkurven sind, wegen

$$\log \frac{r(\varphi_0 + 2\pi)}{r(\varphi_0)} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)} d\varphi = 0,$$

geschlossene Kurven. Wir können also sagen: Wenn die Funktion $F(\varphi)$ keine reellen Nullstellen hat, und wenn

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)} d\varphi \neq 0$$

ist, oder was dasselbe ist: wenn der singuläre Punkt der verkürzten Gleichung (2) ein Strudelpunkt ist, dann ist der singuläre Punkt der Gleichung (1) unter allen Umständen ebenfalls ein Strudelpunkt. Wir brauchen hier gar nichts weiter über die Zusatzglieder η_1, η_2 vorauszusetzen.

§ 4.

Fall B 1.

Jetzt betrachten wir die Sektoren, die eine Nullstelle φ_0 der Funktion $F(\varphi)$ enthalten. Auf Grund unserer Voraussetzungen muß dann — wie in § 2 bewiesen — $G(\varphi_0) = G_0 \neq 0$ sein; und wir wollen unsere Sektoren

$$|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$$

immer so schmal wählen, daß in ihnen

1. $F(\varphi)$ außer für $\varphi = \varphi_0$ nicht mehr verschwindet,
2. $G(\varphi)$ nicht verschwindet.

Weil die Funktionen η_1, η_2 und daher auch $f, g = o(r^m)$ sind, können wir dann eine Größe $\hat{R}(\delta)$ finden, so daß

a) in dem Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$: $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta, \quad 0 < r \leq \hat{R}(\delta)$ durchweg

$$\frac{1}{r^m} \frac{dr}{dt} = G + \frac{g}{r^m} \neq 0$$

und

b) auf den Randstrecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$, $0 < r \leq \hat{R}(\delta)$ überall

$$\frac{1}{r^{m-1}} \frac{d\varphi}{dt} = F + \frac{f}{r^m} \neq 0$$

ist. — In dem Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ ist r als Kurvenparameter geeignet; es gibt auf jeder Integralkurve eine Richtung, in der r beständig abnimmt.

Es handle sich nun also zunächst um eine Nullstelle φ_0 von ungerader Ordnung k , und es sei, mit den in § 2 eingeführten Bezeichnungen, $C: G_0 > 0$. Es ist dann auf der Randstrecke $\varphi = \varphi_0 - \delta$, $0 < r \leq \hat{R}(\delta)$ von $\mathfrak{S}(\delta)$

$$\text{sign } r \cdot \frac{dr}{dt} = \text{sign } G_0 \quad \text{und} \quad \text{sign } r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\text{sign } C,$$

also $r \cdot \frac{d\varphi}{dr} < 0$. Auf der anderen Randstrecke $\varphi = \varphi_0 + \delta$, $0 < r \leq \hat{R}$ ist dagegen $r \cdot \frac{d\varphi}{dr} > 0$.

Betrachten wir nun irgendeine Integralkurve $\mathfrak{C}$ von (1), die in das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ eintritt, und denken wir sie im Sinne abnehmender r durchlaufen. Es muß möglich sein, sie bis an den Rand des Gebietes $\mathfrak{S}(\delta)$ zu verfolgen. — Aber über eine der Strecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$, $0 < r \leq \hat{R}$ aus dem Gebiet heraus-treten kann die Kurve nicht, denn dann müßte an dieser Stelle entweder auf der Randstrecke $\varphi_0 - \delta$ $r \frac{d\varphi}{dr} \geq 0$ sein, oder auf der Randstrecke $\varphi_0 + \delta$ $r \frac{d\varphi}{dr} \leq 0$; beides trifft nicht zu. — Es bleibt also die einzige Möglichkeit, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ durch den Punkt $(0, 0)$ hindurch verläßt.

Und zwar muß die Kurve mit der Tangente $y = x \tan \varphi_0$ in den singulären Punkt hineinlaufen. Sei nämlich δ' irgendeine positive Größe $< \delta$. Dazu gibt es, genau wie zu δ , eine Zahl $\hat{R}(\delta')$ und ein Gebiet $\mathfrak{S}(\delta')$. Gehen wir nun auf der Kurve $\mathfrak{C}$ in der Richtung abnehmender r , bis $r < \hat{R}(\delta')$ geworden ist. Die Kurve muß dann sicher einmal in den Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ eintreten; denn die beiden Restsektoren

$$\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 - \delta'$$

und

$$\varphi_0 + \delta' \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta$$

sind Sektoren der Art A, und in einem solchen kann eine Integralkurve, wie wir aus § 3 wissen, dem singulären Punkt nicht beliebig nahe kommen. — Also $\mathfrak{C}$ tritt jedenfalls einmal in

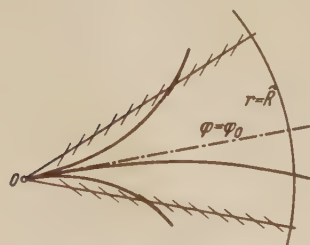


Fig. 2. Fall B 1.

das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta')$ ein; dann gilt aber genau dieselbe Schlußweise wie vorhin bei $\mathfrak{S}(\delta)$: die Kurve läuft innerhalb des Sektors $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ in den singulären Punkt hinein. — Da sie also für hinreichend kleine r ganz in

einem beliebig schmalen Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ verläuft, so läuft sie mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in diesen Punkt $(0, 0)$ ein. Wir haben also dieses Resultat: Jede Integralkurve von (1), die überhaupt in das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ eintritt, läuft darin mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in den singulären Punkt hinein.

§ 5.

Fall B2.

Ein ganz anderes Bild als in dem soeben besprochenen Falle ergibt sich, wenn φ_0 ebenfalls Nullstelle ungerader Ordnung, aber der Quotient $\frac{C}{G_0} < 0$ ist.

Konstruieren wir wieder, wie in § 4, ein Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$, so ist jetzt auf der Randstrecke $\varphi = \varphi_0 - \delta$, $0 < r \leq \widehat{R}(\delta)$: $r \frac{d\varphi}{dr} > 0$ und auf der anderen Randstrecke $\varphi = \varphi_0 + \delta$, $0 < r \leq \widehat{R}$: $r \frac{d\varphi}{dr} < 0$.

Betrachten wir nun eine Integralkurve $\mathfrak{C}_+$ bzw. $\mathfrak{C}_-$, die über eine der Randstrecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$, etwa bei $r = \bar{r}$, in das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ eintritt. Die Richtung auf der Kurve, die nach dem Innern von $\mathfrak{S}(\delta)$ weist, ist dann immer die Richtung zunehmender r . Verfolgen wir nun die Kurve, bis sie das Gebiet wieder verläßt: das kann nicht über eine der Strecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$ geschehen, denn dann müßte an der Austrittsstelle entweder auf der Randstrecke $\varphi_0 - \delta$ $r \frac{d\varphi}{dr} \leq 0$ sein, oder auf der Randstrecke $\varphi_0 + \delta$ $r \frac{d\varphi}{dr} \geq 0$, beides ist ausgeschlossen. — Also bleibt nur die Möglichkeit, daß die Kurve das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ über den Kreisbogen $r = \widehat{R}(\delta)$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$ verläßt. Das mag etwa bei $\varphi = \lambda_+(\bar{r})$ bzw. bei $\varphi = \lambda_-(\bar{r})$ geschehen.

Diese Integralkurven treten also — wenn wir sie wieder lieber im Sinne abnehmender r durchlaufen denken — über den Kreisbogen $r = \widehat{R}$ in das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ ein und verlassen es wieder über eine der Randstrecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$, ohne dem singulären Punkt nahezukommen.

Daneben muß es jedoch offensichtlich auch Integralkurven geben, die innerhalb $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hineinlaufen.

Denn $\lambda_+(\bar{r})$ und $\lambda_-(\bar{r})$ sind offenbar monotone Funktionen von $\bar{r}$, und zwar nimmt λ_- zu und λ_+ ab, wenn $\bar{r}$ abnimmt. Ferner ist stets $\lambda_- < \lambda_+$. Es existiert daher ein

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \lambda_-(\bar{r}) = A_-$$

und ein

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \lambda_+(\bar{r}) = A_+, \quad (A_- \leq A_+)$$

und die Integralkurven durch die Punkte $r = \widehat{R}$, $\varphi = A_-$ bzw. $r = \widehat{R}$, $\varphi = A_+$ laufen nun gerade in den singulären Punkt hinein. — Es ist wieder

leicht zu sehen, daß eine Integralkurve $\mathfrak{C}$, die innerhalb $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hineinläuft, dort notwendigerweise die Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ besitzt. Sei nämlich δ' irgendeine positive GröÙe $< \delta$. Wir verfolgen die Kurve in der Richtung abnehmender r , bis $r \leq \hat{R}(\delta')$ geworden ist. Von diesem Augenblick ab muß $\mathfrak{C}$ dauernd in dem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ bleiben. Denn nehmen wir an, die Kurve würde diesen Sektor noch einmal verlassen, während r weiter abnimmt: sie kann dann jedenfalls nicht mehr in den Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ zurückkehren; aber andererseits sind die Restsektoren

$$\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 - \delta' \quad \text{und} \quad \varphi_0 + \delta' \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta$$

solche der Art A, in ihnen kann $\mathfrak{C}$ also nach § 3 nicht in den singulären Punkt laufen. Wenn also die Integralkurve $\mathfrak{C}$ nicht für hinreichend kleine r beständig in dem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ bliebe, so könnte sie überhaupt nicht innerhalb $\mathfrak{S}(\delta)$ in den Punkt hineinlaufen.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

a) Es ist $\Lambda_- = \Lambda_+$. Dann gibt es nur *eine* einzige Integralkurve, die im Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ (mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$) in den singulären Punkt hineinläuft. — Dieser Fall liegt insbesondere immer vor bei der „verkürzten“ Gleichung (2).

b) Oder aber es ist $\Lambda_- < \Lambda_+$. Dann laufen *unendlich viele* Integralkurven in $\mathfrak{S}(\delta)$ (mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$) in den singulären Punkt hinein; nämlich genau alle Integralkurven durch die Punkte $r = \hat{R}(\delta), \Lambda_- \leq \varphi \leq \Lambda_+$.

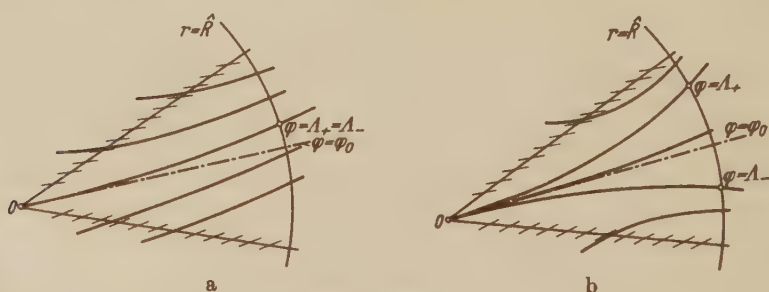


Fig. 3. Fall B 2

Obwohl wir auf die Entscheidung darüber, welche der Möglichkeiten a, b in einem konkreten Falle vorliegt, kein so großes Gewicht legen wie auf eine andere Alternative, die in § 6 zur Sprache kommen wird, müssen wir doch der Vollständigkeit wegen kurz eingehen auf hinreichende Bedingungen dafür, daß bei der Differentialgleichung (1), ebenso wie bei der verkürzten Gleichung (2), der Fall a vorliegt.

In dem Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ — auf das wir unsere Betrachtung beschränken wollen — kann man r als Kurvenparameter benutzen; wir erhalten dann aus (3) die Differentialgleichung

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{F + \frac{f}{r^m}}{G + \frac{g}{r^m}} \equiv \Psi(r, \varphi).$$

Wir wollen nun annehmen, es sei eine Abschätzung des Differenzenquotienten von Ψ möglich:

$$(5) \quad \frac{\Psi(r, \varphi_1) - \Psi(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \leq D(r) \quad [D(r) \geq 0]$$

und es sei das mit der Abschätzungsfunktion $D(r)$ gebildete Integral

$$\int_0^{r_0} \frac{D(r)}{r} dr$$

konvergent. Unter diesen Umständen liegt sicher der Fall a vor und nicht b.

Nehmen wir nämlich versuchsweise an, es gebe zwei Integralkurven, die in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hineinlaufen, $\varphi = \varphi_1(r)$ und $\varphi = \varphi_2(r)$. Sie werden sich nicht schneiden; es sei also etwa, für $r > 0$, $\varphi_1 > \varphi_2$. Dann haben wir

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \{\Psi(r, \varphi_1) - \Psi(r, \varphi_2)\} \leq \frac{D(r)}{r} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

und daher, wenn $0 < r' < r'' < \hat{R}$ ist,

$$\log [\varphi_1(r) - \varphi_2(r)] \Big|_{r'}^{r''} \leq \int_0^{r''} \frac{D(r)}{r} dr.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\log [\varphi_1(r') - \varphi_2(r')] \geq \text{einer gewissen Konstanten } K,$$

also

$$\varphi_1(r') - \varphi_2(r') \geq e^K.$$

Das gilt, wie klein wir auch r' wählen. Dieses Ergebnis widerspricht aber dem früher gefundenen, daß die Kurven $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ beide mit derselben Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in den Punkt einlaufen müssen.

Es bleibt noch zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine Abschätzung (5) der verlangten Art existiert. Wir wollen zunächst speziell annehmen, daß φ_0 eine einfache Nullstelle der Funktion $F(\varphi)$ sei (also $k = 1$); es ist dann also

$$F(\varphi) = C(\varphi - \varphi_0) + o(|\varphi - \varphi_0|).$$

Die Differenz $\Psi(r, \varphi_1) - \Psi(r, \varphi_2)$ läßt sich nun in dieser Weise schreiben (wobei wir die Argumente φ_1, φ_2 durch Indizes andeuten):

$$\begin{aligned}\Psi_1 - \Psi_2 &= (G_1 + g_1/r^m)^{-1} (G_2 + g_2/r^m)^{-1} \\ &\quad \{ (F_1 - F_2) G_1 - F_1 (G_1 - G_2) \\ &\quad + [(F_1 - F_2) g_1 - F_1 (g_1 - g_2)]/r^m \\ &\quad + [(f_1 - f_2) G_1 - f_1 (G_1 - G_2)]/r^m \\ &\quad + [(f_1 - f_2) g_1 - f_1 (g_1 - g_2)]/r^{2m} \}.\end{aligned}$$

Nun erfüllen die Funktionen F, G jedenfalls Lipschitz-Bedingungen; insbesondere wird die Größe $(F_1 - F_2) G_1$, wenn wir unser Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ nur klein genug wählen, mit beliebig guter Annäherung durch

$$G_0 C(\varphi_1 - \varphi_2)$$

dargestellt.

Wenn wir nun voraussetzen, daß für die Funktionen f/r^m und g/r^m Lipschitz-Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^m} \cdot \left| \frac{f(r, \varphi_1) - f(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| &\leq C_f, \\ \frac{1}{r^m} \cdot \left| \frac{g(r, \varphi_1) - g(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| &\leq C_g,\end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Konstante der Funktion f/r^m nicht zu groß sein soll, nämlich

$$C_f < |C|,$$

und wenn wir beachten, daß f und $g = o(r^m)$ sind und daß $F(\varphi_0) = 0$ ist, so finden wir dieses Ergebnis:

Bei Beschränkung auf ein genügend kleines Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ hat der Differenzenquotient

$$\frac{\Psi(r, \varphi_1) - \Psi(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

das Vorzeichen von $(F_1 - F_2) G_1/(\varphi_1 - \varphi_2)$, er ist also wegen $\frac{C}{G_0} < 0$ negativ. Es gilt daher eine Abschätzung (5); man kann die Abschätzungsfunktion $D(r)$ z. B. $\equiv 0$ wählen.

Von den Funktionen $f/r^m, g/r^m$ überträgt sich unsere Voraussetzung ohne weiteres auf η_1/r^m und η_2/r^m . Wir können daher auf die Frage nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß in einem Sektor der Art B 2 die Differentialgleichung (1) sich ebenso verhält wie die Gleichung (2) — m. a. W. daß der „Fall a“ vorliegt und nicht b — folgendes antworten:

Ist φ_0 insbesondere eine einfache Nullstelle der Funktion $F(\varphi)$, so genügt es, daß die Funktionen $\eta_{1,2}/r^m$ „Lipschitz-Bedingungen“ der folgenden Art erfüllen:

$$\frac{1}{r^m} |\eta_i(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1) - \eta_i(r \cos \varphi_2, r \sin \varphi_2)| \leq C_i |\varphi_1 - \varphi_2|$$

mit „nicht zu großen“ Lipschitz-Konstanten C_i .

Ein Resultat ähnlicher Art findet sich (speziell für den Fall linearer $H_{1,2}$) in der oben (§ 1) genannten Arbeit von G. Hoheisel.

Ist φ_0 Nullstelle höherer Ordnung von $F(\varphi)$, so muß man weitergehende Voraussetzungen machen. Ein System von hinreichenden Bedingungen für diesen Fall enthält die oben erwähnte Arbeit von H. Forster (§§ 10 und 11).

§ 6.

Fall C.

Wir kommen jetzt zu dem letzten der vier in § 2 unterschiedenen Fälle. Dieser ist in gewissem Sinne am wichtigsten für die anfangs bezeichnete Problemstellung, möglichst scharf die Grenze zu bestimmen, bis zu der noch Übereinstimmung im Verhalten der Differentialgleichung (1) und (2) vorhanden ist bzw. wo die Übereinstimmung aufhört. Denn während wir in den Fällen A und B 1 überhaupt keine über § 1 hinausgehenden Voraussetzungen zu machen brauchten, und während wir im Falle B 2 weitergehende Bedingungen für die Zusatzglieder η_1, η_2 nur dazu stellen mußten, um garantieren zu können, daß in der betreffenden Richtung φ_0 nur eine einzige Integralkurve in den singulären Punkt einläuft und nicht unendlich viele — so wird dagegen durch das Verhalten der Zusatzglieder in den Sektoren der Art C die Natur des singulären Punktes weitgehend beeinflußt; dieser kann eventuell, unter sonst gleichen Umständen, je nach der Wahl der Zusatzglieder ein Knotenpunkt verschiedener Art oder auch ein Strudelpunkt sein.

φ_0 sei also jetzt eine Nullstelle der Funktion $F(\varphi)$ von gerader Ordnung k ; wir wollen von den vier möglichen Vorzeichenkombinationen der Größen C und G_0 nur diese betrachten:

$$(6) \quad C > 0, \quad G_0 > 0.$$

Denn man kann diesen Fall immer erreichen dadurch, daß man die Funktionen H_1, H_2, η_1 und η_2 mit -1 multipliziert, oder daß man die Richtung der y -Achse umkehrt, oder beides zugleich. Wir konstruieren wieder, wie früher, ein Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$. Da k jetzt gerade ist, so hat diesmal $F(\varphi)$ auf den beiden Randstrecken $\varphi = \varphi_0 \pm \delta$ dasselbe Vorzeichen, und daher hat auch $r \frac{d\varphi}{dr}$ auf beiden Randstrecken das gleiche Vorzeichen, und zwar wegen der Annahme (6) das positive. Wir betrachten wieder eine Integralkurve $\mathfrak{C}$, die in das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ eintritt, und verfolgen sie in der Richtung abnehmender r . Es sei δ' eine positive Größe $< \delta$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

α) Die Kurve läuft in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hinein, und zwar bleibt sie für hinreichend kleine r beständig in dem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$.

β) Oder die Kurve verläßt das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta$, ohne dem singulären Punkt nahegekommen zu sein.

Denn vertolgen wir die Kurve $\mathfrak{C}$ bis zu einem Punkte P , in dem $r < \hat{R}(\delta')$ geworden ist (wenn sie $\mathfrak{S}(\delta)$ nicht schon vorher verlassen hat).

1. Es kann sein, daß P in dem Sektor $\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 - \delta'$ liegt. Dies ist ein Sektor der Art A; die Kurve wird ihn daher, wenn r weiter abnimmt, wieder über eine seiner beiden Randstrecken verlassen. Und zwar über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta$; denn die andere Randstrecke $\varphi_0 - \delta'$ kann sie, wegen $r \frac{d\varphi}{dr} > 0$, nicht überschreiten, während r abnimmt. — Damit verläßt $\mathfrak{C}$ aber zugleich das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$, es liegt der Fall β vor.

2. Es kann sein, daß P in dem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ liegt. Dann bleibt die Kurve $\mathfrak{C}$ entweder, wenn r weiter abnimmt, beständig in diesem Sektor, dies ist Fall α ; oder aber sie verläßt den Sektor noch einmal, und zwar notwendigerweise über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta'$, dann tritt sie also in den Sektor $\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 - \delta'$ über, und es liegt, wie wir unter 1. gesehen haben, Fall β vor.

3* Endlich kann es sein, daß P in dem Sektor $\varphi_0 + \delta' \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta$ liegt. Dies ist ein Sektor der Art A; die Kurve wird ihn also wieder verlassen, und zwar notwendigerweise über die Randstrecke $\varphi_0 + \delta'$. Damit tritt sie in den Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta'$ über, es liegt also nach 2. einer der Fälle α , β vor.

Es bestehen demnach nur die beiden Möglichkeiten α , β . Da δ' dabei beliebig klein sein darf, muß die Kurve im Falle α mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ einlaufen.

Für das Verhalten der Differentialgleichung (1) in dem ganzen Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ gibt es nun ebenfalls zwei Möglichkeiten:

a) Es gibt unter den Integralkurven, die durch das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ laufen, eine solche vom Typus α . Wir nehmen an, sie trete bei $r = \hat{R}(\delta)$, $\varphi = \bar{\varphi}$ in das Gebiet ein. (Würde sie über eine der Randstrecken $\varphi_0 \pm \delta$ eintreten, so brauchten wir nur $\hat{R}$ kleiner zu wählen.) Nun läuft durch jeden Punkt des Kreisbogens $r = \hat{R}$, $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$ eine Integralkurve. Für gewisse φ , die wir als φ_α bezeichnen, ist die Kurve vom Typus α ; z. B. für $\varphi = \bar{\varphi}$. Für andere φ , die wir φ_β nennen, sind die Kurven vom Typus β ; dies trifft sicher zu für alle φ , die nahe genug an $\varphi_0 - \delta$ liegen. Jedes φ_α ist größer als jedes φ_β . Nun haben die φ_α eine untere Grenze φ_* . Die Integralkurve durch den Punkt $r = \hat{R}$, $\varphi = \varphi_*$ läuft selbst noch in den singulären Punkt hinein, ist also vom Typus α ; sie ist, wenn wir im positiven Sinne um den singulären Punkt herumgehen, „die erste“ Integralkurve vom Typus α . Es ergibt sich damit das folgende Bild:

Es gibt unendlich viele Integralkurven — und zwar unter ihnen eine erste —, die in $\mathfrak{S}(\delta)$ mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in den singulären Punkt

einlaufen. Die übrigen Integralkurven, die in $\mathfrak{S}(\delta)$ eintreten, laufen dort nicht in den singulären Punkt, sondern verlassen das Gebiet wieder über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta$.

b) Die andere Möglichkeit ist, daß es *keine* Integralkurve vom Typus α gibt, daß also keine von ihnen in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt einläuft, sondern alle das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ wieder über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta$ verlassen.

Nachdem wir so die verschiedenen im Fall C vorhandenen Möglichkeiten festgestellt haben, handelt es sich nun darum, zu entscheiden, welche von ihnen in einem konkreten Beispiele tatsächlich verwirklicht ist. Bei der „verkürzten“ Differentialgleichung (2) ist es stets der Fall a. Dann ist nämlich die Gerade $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ selber eine Integralkurve vom Typus α .

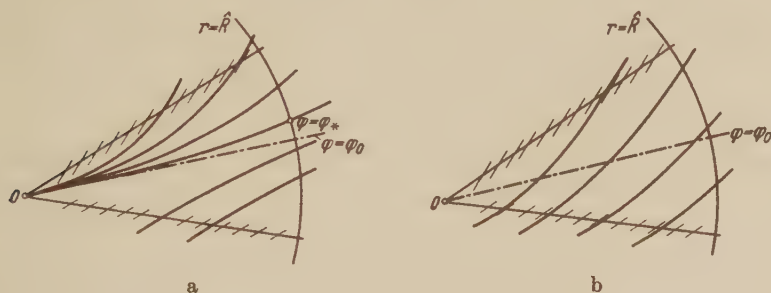


Fig. 4. Fall C.

§ 7.

Fortsetzung.

Wir betrachten zur Vorbereitung die folgende Hilfsdifferentialgleichung

$$(7) \quad r \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = R(\bar{\varphi} - \varphi_0)^k + S \frac{A(r)}{r^m}, \quad (k \text{ gerade}),$$

dabei sollen R, S nichtnegative Zahlen sein und $A(r)$ eine Funktion $= o(r^m)$, die wir noch festlegen werden und für deren Wahl der Wunsch wesentlich ist, eine Differentialgleichung zu erhalten, die sich leicht integrieren läßt. Für $S = 0$ hat (7) die Lösung

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 = \left[(k-1) R \log \frac{c}{r} \right]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Machen wir daher für den allgemeinen Fall den Ansatz

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 = z \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{1}{k-1}},$$

so wird aus (7):

$$(8) \quad r \cdot \frac{dz}{dr} \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{1}{k-1}} + \frac{z}{k-1} \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{k}{k-1}} \\ = R z^k \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{k}{k-1}} + S \frac{A(r)}{r^m}.$$

Wir beschränken uns auf das Gebiet $r < 1$. — Es sei nun

$$A(r) = r^m \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{k}{k-1}} \quad (= o(r^m)).$$

Dann heißt unsere Differentialgleichung (8):

$$r \frac{dz}{dr} \log \frac{1}{r} = R z^k - \frac{z}{k-1} + S \equiv N(z)$$

mit der Lösung

$$(9) \quad \Phi(z) \equiv \int \frac{dz}{N(z)} = -\log \left(\log \frac{1}{r} \right) + \text{const.}$$

Es kommt nun auf die Nullstellen des Polynoms $N(z)$ an. Da N'' durchweg positiv ist, so hat die entsprechende Kurve in einer z, N -Ebene keinen Wendepunkt. Ist S genügend groß, so hat $N(z)$ — da k gerade ist — keine reellen Nullstellen; wenn aber S einen gewissen Wert S_0 unterschreitet, so wird $N(z)$ reelle Nullstellen besitzen, und zwar genau zwei. Im Falle des Überganges, $S = S_0$, hat N eine doppelte Nullstelle; für diese gilt zugleich

$$R z^k - \frac{z}{k-1} + S_0 = 0 \quad \text{und} \quad k R z^{k-1} - \frac{1}{k-1} = 0.$$

Daher finden wir

$$S_0 = k^{-\frac{k}{k-1}} [R(k-1)]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Fall 1. $S < S_0$; $N(z)$ hat zwei reelle Nullstellen z_1, z_2 . $\Phi(z)$ ist zwischen z_1 und z_2 eine monoton abnehmende Funktion von z ; sie wird an den beiden Grenzen des Intervalles (z_1, z_2) unendlich, da die Integrale

$$\int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{N(z)}, \quad \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{N(z)}$$

divergent sind.

Fassen wir nun r und $\bar{\varphi} = \varphi_0 + z \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{1}{k-1}}$ als Polarkoordinaten auf und betrachten wir die Kurve $\Re$, die durch (9) geliefert wird, wenn wir der Integrationskonstanten irgendeinen Wert erteilen und die Größe z — eine Art Kurvenparameter — von z_1 bis z_2 wachsen lassen. $\Phi(z)$ nimmt dann monoton

von $+\infty$ bis $-\infty$ ab, und r nimmt von 1 bis 0 ab, wie man aus (9) sieht. Wenn insbesondere r gegen 0 geht, so nähert z sich jedenfalls einem endlichen Grenzwert z_2 ; daher geht

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 = z \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{1}{k-1}} \text{ gegen } 0.$$

Unsere Kurve $\mathfrak{R}$ läuft daher mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in den Nullpunkt hinein.

Fall 2. $S > S_0$; $N(z)$ hat keine reellen Nullstellen. Dann ist $\Phi(z)$ für $-\infty < z < +\infty$ eine stetige, monoton wachsende, beschränkte Funktion (das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{N(z)}$$

ist konvergent wegen $k \geq 2$). Wir können etwa so normieren:

$$\Phi(z) = \int_{+\infty}^z \frac{dz}{N(z)}.$$

Auf jeder der durch

$$\Phi(z) = -\log \left(\log \frac{1}{r} \right) + c$$

dargestellten Kurven $\mathfrak{R}_c$ ist also $\log \left(\log \frac{1}{r} \right)$ beschränkt; r kommt daher den Werten 0 und 1 nicht beliebig nahe. Auf einer solchen Kurve ist nach (7) $\bar{\varphi}$ eine monoton zunehmende Funktion von r ; und wenn der Kurvenparameter z dem Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ zustrebt, so strebt auch

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 = z \left(\log \frac{1}{r} \right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

demselben Grenzwert zu (weil $\log \frac{1}{r}$ zwischen endlichen, positiven Schranken bleibt). Wir brauchen diese Kurven $\mathfrak{R}_c$ nur für $|\bar{\varphi} - \varphi_0| \leq \delta$. Sie laufen von einem Randstrahl dieses Sektors zum anderen, nicht in den Nullpunkt hinein. Doch gibt es solche Kurvenbögen in beliebiger Nähe des Nullpunktes: wenn wir $c = \log \left(\log \frac{1}{r_*} \right)$ wählen, so ist auf $\mathfrak{R}_c$ überall $r < r_*$.

Den dritten noch möglichen Fall $S = S_0$ (N hat eine doppelte Nullstelle) brauchen wir im folgenden nicht.

§ 8.

Fortsetzung.

Die Vorbereitungen des § 7 sollen uns dazu dienen, das folgende Satzepaar über die Differentialgleichung (1) zu beweisen:

φ_0 sei, wie bisher, eine Nullstelle gerader Ordnung k der Funktion $F(\varphi)$. Wir nehmen ferner an, daß die Zahlen C und G_0 beide positiv seien.

Es bedeute $A(r)$ die in § 7 eingeführte Funktion

$$A(r) = r^m \left[\log \frac{1}{r} \right]^{-\frac{k}{k-1}} \quad (= o(r^m))$$

und D die Zahl

$$D = \left(\frac{G_0}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} [C \cdot (k-1)]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Wenn dann für die Funktion

$$f(r, \varphi) = \eta_1 \cdot \cos \varphi - \eta_2 \cdot \sin \varphi$$

in einem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$ für kleine r eine Abschätzung

$$(10) \quad \begin{array}{l} f(r, \varphi) \leq c_1 \cdot A(r) \\ \text{mit } 0 < c_1 < D \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} f(r, \varphi) \geq c_2 \cdot A(r) \\ \text{mit } c_2 > D \end{array}$$

gilt, so liegt der



des § 6 vor. Dann verhält sich also die Differentialgleichung (1) in diesem Sektor (von der Art C)

ebenso $\parallel$ nicht so

wie die „verkürzte“ Differentialgleichung (2).

Nun der Beweis, zunächst für die linke Hälfte des Satzes. Wir wollen also die links stehenden Voraussetzungen als erfüllt annehmen und wählen unser Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ gleich so klein, daß in ihm die Abschätzung (10) gilt. Es ist dann

$$(11) \quad r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{F + \frac{f}{r^m}}{G + \frac{g}{r^m}} < \frac{C(\varphi - \varphi_0)^k + c_1 \frac{A(r)}{r^m}}{G_0} \cdot (1 + \vartheta) \equiv \Psi^+(r, \varphi).$$

Dabei bedeutet ϑ eine positive Zahl; wir können sie beliebig klein machen, wenn wir nur das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ genügend einengen. Nach Voraussetzung ist nun

$$\frac{c_1}{G_0} < k^{-\frac{k}{k-1}} \left(\frac{C}{G_0} (k-1) \right)^{-\frac{1}{k-1}};$$

daher ist für kleine ϑ auch

$$\frac{c_1}{G_0} (1 + \vartheta) < k^{-\frac{k}{k-1}} \left[\frac{C}{G_0} (1 + \vartheta) \cdot (k-1) \right]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Für die Differentialgleichung

$$(12) \quad r \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \Psi^+(r, \bar{\varphi}),$$

eine Gleichung von der Form (7), mit

$$R = \frac{C}{G_0} (1 + \vartheta), \quad S = \frac{c_1}{G_0} (1 + \vartheta),$$

liegt deshalb nach § 7 der „Fall 1“ vor. Es gibt eine Integralkurve $\mathfrak{R}$ der Hilfs-Differentialgleichung (12), die mit der Tangente $y = x \operatorname{tg} \varphi_0$ in den Nullpunkt einläuft. Wir wollen, wenn nötig, $\hat{R}$ noch so weit verkleinern, daß für $r < \hat{R}$ $\mathfrak{R}$ beständig in dem Sektor $|\varphi - \varphi_0| < \delta$ bleibt.

Nun betrachten wir wieder die Integralkurven von (1), die in $\mathfrak{S}(\delta)$ eintreten. Insbesondere laufen über die Randstrecke $\varphi = \varphi_0 + \delta$ unendlich viele solche Integralkurven in $\mathfrak{S}(\delta)$ ein. Dies müssen nun lauter Kurven sein, die in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hineinlaufen. Denn sonst besteht nach § 6 nur noch die Möglichkeit, daß die Kurven das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ über die Randstrecke $\varphi_0 - \delta$ wieder verlassen (Fall β des § 6). Aber dazu müßten sie erst die Kurve $\mathfrak{R}$ überschreiten, die zwischen den beiden Randstrecken von $\mathfrak{S}(\delta)$ hindurchläuft. Und dies ist ausgeschlossen. Dann müßte nämlich in dem Schnittpunkt

$$r \frac{d\varphi}{dr} \geq r \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \Psi^+(r, \bar{\varphi}) = \Psi^+(r, \varphi)$$

sein. Nach (11) trifft das jedoch nicht zu.

Die betrachteten Integralkurven der Differentialgleichung (1) laufen also in dem Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt hinein. Es liegt demnach der Fall α des § 6 vor; wir können sagen: die Differentialgleichung (1) verhält sich in dem Sektor so wie die verkürzte Gleichung (2).

Sehr ähnlich verläuft der Beweis der rechten Hälfte des oben formulierten Satzes. Wir wollen also jetzt annehmen, daß die rechts stehenden Voraussetzungen (10) in einem Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ erfüllt seien. Dann ist

$$(13) \quad r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{F + \frac{f}{r^m}}{G + \frac{g}{r^m}} \\ > \frac{C(\varphi - \varphi_0)^k + c_2 \frac{A(r)}{r^m}}{G_0} \cdot (1 - \vartheta) \equiv \Psi^-(r, \varphi).$$

ϑ ist wieder eine positive Zahl, die wir beliebig klein machen können, wenn wir nur das Gebiet $\mathfrak{S}(\delta)$ nötigenfalls noch einengen. Nach Voraussetzung ist diesmal

$$\frac{c_2}{G_0} > k^{-\frac{k}{k-1}} \left[\frac{C}{G_0} \cdot (k-1) \right]^{-\frac{1}{k-1}}$$

und daher für kleine ϑ noch

$$\frac{c_2}{G_0} \cdot (1 - \vartheta) > k^{-\frac{k}{k-1}} \left[\frac{C}{G_0} \cdot (1 - \vartheta) \cdot (k-1) \right]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Daraus folgt, daß für die Differentialgleichung

$$(14) \quad r \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \Psi^-(r, \bar{\varphi}),$$

eine Gleichung der Form (7), mit

$$R = \frac{C}{G_0} (1 - \vartheta), \quad S = \frac{c_2}{G_0} (1 - \vartheta),$$

der „Fall 2“ des § 7 vorliegt.

Betrachten wir nun irgendeine Integralkurve $\mathfrak{C}$ der Gleichung (1), die einen Punkt r_*, φ_* in $\mathfrak{S}(\delta)$ besitzt. Nach § 7 gibt es sicher eine Integralkurve $\mathfrak{R}_c$ der Hilfsdifferentialgleichung (14), die ganz in dem Kreise $r < r_*$ verläuft.

Nun folgt sofort, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ nicht in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt laufen kann. Denn sie müßte dazu erst die Kurve $\mathfrak{R}_c$ überschreiten. Das ist jedoch ausgeschlossen. Denn in dem Schnittpunkt müßte

$$r \frac{d\varphi}{dr} \leq r \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \Psi^-(r, \bar{\varphi}) = \Psi^-(r, \varphi)$$

sein, im Widerspruch zu der Ungleichung (13).

Unter den Voraussetzungen der rechten Hälfte unseres oben formulierten Satzes gibt es also keine Integralkurve von (1), die in $\mathfrak{S}(\delta)$ in den singulären Punkt einliefe. Hier ist also der „Fall b“ des § 6 verwirklicht.

Damit sind die Behauptungen bewiesen. Ein Beispiel bietet die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + \eta_1}{x + \eta_2}.$$

Hier ist $F(\varphi) = \cos^2 \varphi$, mit doppelten Nullstellen bei $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$. Die verkürzte Differentialgleichung besitzt im Nullpunkt einen Knotenpunkt. Für die unverkürzte kann es bei geeigneter Wahl der $\eta_{1,2}$ auch ein Strudel-punkt sein (wenn nämlich an beiden Stellen $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ der „Fall b“ vorliegt). Diese Möglichkeit eines Strudelpunktes besteht immer dann, wenn *alle* reellen Nullstellen von $F(\varphi)$ von gerader Ordnung sind.

Vergleich mit anderen Untersuchungen: Bei O. Perron (a. a. O. S. 135) tritt im Falle linearer H_1, H_2 ($m = 1$) als hinreichende Bedingung dafür, daß Gleichung (1) sich ebenso verhält wie (2), diese auf:

$$|\eta_{1,2}| = 0 \quad (r^{1+\lambda}) \quad (\lambda > 0)$$

(zusammen mit weiteren Anforderungen, die an die $\eta_{1,2}$ gestellt werden). Diese Bedingung ist offensichtlich in der hier bewiesenen enthalten.

H. Forster stellt eine andere hinreichende Bedingung auf. Er verlangt, daß (in unserer Bezeichnungsweise) die Funktion $f(r, \varphi)$ in einem Sektor $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta$ einer Abschätzung

$$|f(r, \varphi)| \leq B(r) r^m$$

genügt, wobei das Integral

$$\int_0^{r_0} \frac{B(r) \cdot |\log r|}{r} dr$$

konvergiert. Auch diese Bedingung verlangt „im allgemeinen“ mehr als die hier bewiesene; denn erstens sind die mit unserer Abschätzungsfunktion $A(r)$ gebildeten Integrale

$$\int_0^{r_0} \frac{A(r) \cdot |\log r|}{r^{m+1}} dr$$

(die dem Forsterschen entsprechen) jedesmal divergent, und zweitens haben wir hier nur einseitige Abschätzungen gebraucht. Doch kann es natürlich auch vorkommen, daß unsere Bedingung nicht erfüllt ist, trotzdem aber die Forstersche. Die Anwendungsfelder der beiden Bedingungen überschneiden sich etwas.

§ 9.

Der Ausnahmefall.

Wir wollen nun noch den bisher ausgeschlossenen Fall betrachten, daß die Funktion $F(\varphi)$ identisch verschwindet. Das bedeutet also:

$$H_1 = y \cdot u(x, y), \quad H_2 = x \cdot u(x, y);$$

und da nach Voraussetzung H_1 und H_2 keinen reellen Linearfaktor gemeinsam haben, so verschwindet $u(x, y)$ für reelle x, y ($\neq 0, 0$) nicht. Wir können daher nötigenfalls im Zähler und Nenner der Differentialgleichung (1) durch $u(x, y)$ dividieren und erhalten eine Gleichung der speziellen Gestalt

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \eta_1(x, y)}{x + \eta_2(x, y)}$$

bzw. ein System

$$\frac{dy}{dt} = y + \eta_1(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = x + \eta_2(x, y),$$

wobei die Zusatzglieder $\eta_{1,2} = o(r)$ sind und wieder die allgemeinen Voraussetzungen des § 1 erfüllen.

Differentialgleichungen der Form (15) hat O. Perron (a. a. O) untersucht und G. Hoheisel hat sodann die Voraussetzungen beinahe auf das unbedingt erforderliche Mindestmaß eingeschränkt. Wir wollen hier auf andere Weise die Hoheiselschen Ergebnisse wiedergewinnen. Die hier verwendete Beweis-anordnung würde zwar gestatten, die Voraussetzungen noch etwas zu ver-ringern, aber um eine allzu schwerfällige Formulierung zu vermeiden, wollen wir ruhig bei den Hoheiselschen Voraussetzungen stehenbleiben.

Wir beweisen zunächst folgendes:

I. Für die Funktion $f(r, \varphi) = \eta_1 \cdot \cos \varphi - \eta_2 \cdot \sin \varphi$ gelte in einer gewissen Umgebung der singulären Stelle $(0, 0)$ eine Abschätzung

$$(16) \quad |f(r, \varphi)| \leq B(r),$$

dabei sei die Abschätzungsfunktion $B(r)$ eine positive, stetige Funktion von r und das Integral

$$\int_0^{r_0} \frac{B(r)}{r^2} dr$$

konvergent. Dann läuft jede Integralkurve der Differentialgleichung (15) mit bestimmter Tangente in den singulären Punkt $(0, 0)$ ein, und zwar in jeder Richtung mindestens eine solche Kurve.

Zum Beweise benutzen wir wieder Polarkoordinaten. Nach (4) ist jetzt $G(\varphi) = 1$; man kann daher in einer Umgebung $r < R_0$ der Stelle $(0, 0)$ r als Kurvenparameter benutzen und erhält die Differentialgleichung

$$(17) \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{f}{1 + \frac{g}{r}}.$$

Wir wollen R_0 so klein wählen, daß 1. für $r \leq R_0$

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{g}{r}} \right|$$

unter einer endlichen Schranke S bleibt und 2. für $r \leq R_0$ die Abschätzung (16) gilt.

Die Größe $\frac{d\varphi}{dr}$ ist in jedem Streifen $r_1 \leq r \leq r_2$, $-\infty < \varphi < +\infty$ ($r_2 \leq R_0$) stetig und beschränkt; die Integralkurven laufen von einem Rand

des Streifens zum anderen. Sei δ irgendeine positive Zahl: dann bleibt jede Integralkurve für $r \leq R_*(\delta)$ in einem Sektor vom Öffnungswinkel 2δ . Denn sei $R_* \leq R_0$ und überdies so klein, daß

$$\int_0^{R_*} \frac{B(r)}{r^2} dr \leq \frac{\delta}{S}$$

ist; und $r' < r'' \leq R_*$. Dann wird auf einer Integralkurve

$$|\varphi'' - \varphi'| = \left| \int_{r'}^{r''} \frac{d\varphi}{dr} dr \right| \leq S \int_{r'}^{r''} \frac{B(r)}{r^2} dr \leq S \frac{\delta}{S} = \delta.$$

Also bleibt die Kurve für $r \leq R_*$ gewiß in einem Sektor vom Öffnungswinkel 2δ . Da δ beliebig klein sein darf, folgt, daß jede Integralkurve mit einer bestimmten Tangente in den Punkt $(0, 0)$ einläuft.

Es bleibt noch zu zeigen, daß in *jeder* Richtung eine Integralkurve einläuft. Bekanntlich gilt der folgende Satz:

„Die Funktion $\Phi(\varrho, \varphi)$ sei in dem Streifen $0 \leq \varrho \leq a$, $-\infty < \varphi < +\infty$ stetig und beschränkt; dann geht durch jeden Punkt $\varrho = 0$, $\varphi = c$ mindestens eine Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \Phi(\varrho, \varphi).“$$

Dieser Satz läßt sich auf die Gleichung (17) nicht ohne weiteres anwenden, weil die rechts stehende Funktion für $r = 0$ nicht mehr stetig zu sein braucht. Wir wollen aber die r, φ -Koordinatenebene so „in der r -Richtung dehnen“, daß nachher der erwähnte Satz anwendbar ist. Wir können voraussetzen, daß

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(r, \varphi)| = o(B(r))$$

sei. (Wäre das nämlich nicht der Fall, so brauchten wir nur $B(r)$ zu ersetzen durch die Funktion

$$\bar{B}(r) = (1 - \delta) B(r) \left(\int_0^r \frac{B(u)}{u^2} du \right)^{-\delta}, \quad (0 < \delta < 1),$$

die alle nötigen Eigenschaften besitzt.) Nun sei

$$\int_0^r \frac{B(u)}{u^2} du = \varrho.$$

ϱ ist eine stetige, für $r > 0$ differenzierbare Funktion von r , und umgekehrt.

Wir benutzen jetzt ϱ an Stelle von r als unabhängige Veränderliche und erhalten die Differentialgleichung

$$(17') \quad \frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{f/B(r)}{1 + \frac{g}{r}} \equiv \bar{\Phi}(r, \varphi) \equiv \Phi(\varrho, \varphi).$$

Setzen wir noch $\Phi(0, \varphi) = 0$, so ist nun $\Phi(\varrho, \varphi)$ in dem Streifen $0 \leq \varrho \leq a$, $-\infty < \varphi < +\infty$ stetig. Infolgedessen ist der oben angeführte Satz anwendbar; es gibt mindestens eine Integralkurve durch jeden Punkt $\varrho = 0$, $\varphi = c$. Oder auf die x, y -Ebene übertragen: in jeder Richtung läuft mindestens eine Integralkurve der Differentialgleichung (15) in den singulären Punkt ein.

II. Daß die Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes nahe an das unbedingt erforderliche Maß herankommen, zeigt die folgende Bemerkung:

Für die Funktion $f(r, \varphi)$ gelte, im Gegensatz zu der Annahme (16), in einer Umgebung der singulären Stelle eine Abschätzung

$$(18) \quad f(r, \varphi) \geq C(r),$$

dabei sei $C(r)$ eine positive Funktion von r und das Integral

$$\int_0^{r_0} \frac{C(r)}{r^2} dr$$

divergent. Dann trifft die Behauptung des oben bewiesenen Satzes gewiß nicht zu; vielmehr ist der singuläre Punkt ein Strudelpunkt.

Beweis. Für $r \leq \hat{R}$ wird erstens die Abschätzung (18) gelten und zweitens

$$\frac{1}{1 + \frac{g}{r}} \geq \frac{1}{2}$$

bleiben. Ist nun $r' < r'' \leq \hat{R}$, so finden wir

$$\varphi'' - \varphi' = \int_{r'}^{r''} \frac{d\varphi}{dr} dr \geq \frac{1}{2} \cdot \int_{r'}^{\hat{R}} \frac{C(r)}{r^2} dr,$$

und für $r' \rightarrow 0$ geht das letzte Integral gegen $+\infty$. Daher sind die Integralkurven Spiralen, die den singulären Punkt unendlich oft umwinden.

III. Damit der singuläre Punkt der Differentialgleichung (15) von derselben Art sei wie derjenige der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

ist außer den in I. bewiesenen Eigenschaften noch erforderlich, daß in jeder Richtung *nur* eine Integralkurve einläuft.

Dies ist, wenn wir wieder zur ϱ, φ -Darstellung übergehen, bekanntlich dann gewährleistet, wenn die Funktion $\Phi(\varrho, \varphi)$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt:

$$|\Phi(\varrho, \varphi_1) - \Phi(\varrho, \varphi_2)| \leq C \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

In unserem Falle ist nach (17') — wenn die Argumente φ_1, φ_2 wieder durch Indizes gekennzeichnet werden —

$$\begin{aligned} & \Phi(\varrho, \varphi_1) - \Phi(\varrho, \varphi_2) \\ &= [B(r)]^{-1} \cdot \left(1 + \frac{g_1}{r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{g_2}{r}\right)^{-1} \left[(f_1 - f_2) \cdot \left(1 + \frac{g_2}{r}\right) - (g_1 - g_2) \cdot \frac{f_2}{r} \right]. \end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(\varrho, \varphi)$ wird also jedenfalls dann eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, wenn für die Differenzenquotienten von f und g Abschätzungen dieser Art gelten:

$$(19) \quad \begin{aligned} \left| \frac{f(r, \varphi_1) - f(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| &\leq C, B(r), \\ \left| \frac{g(r, \varphi_1) - g(r, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| &\leq C_g B(r). \end{aligned}$$

Wenn demnach außer den Voraussetzungen des Satzes I auch noch die Ungleichungen (19) erfüllt sind, so läuft in jeder Richtung *genau eine* Integralkurve der Gleichung (15) in den singulären Punkt ein; wir können dann behaupten, daß der singuläre Punkt dieser Gleichung von derselben Art ist wie derjenige der verkürzten Gleichung

$$(20) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Aus unseren Untersuchungen ergibt sich u. a. das folgende Resultat:

Für die Funktionen η_1, η_2 gelte in einer gewissen Umgebung der Stelle (0, 0) eine Abschätzung

$$|\eta_i| \leq B(r) \quad (= o(r))$$

und überdies sollen die Differenzenquotienten Ungleichungen dieser Art erfüllen:

$$\left| \frac{\eta_i(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1) - \eta_i(r \cos \varphi_2, r \sin \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| \leq C_i B(r),$$

dabei sei das Integral

$$\int_0^{r_0} \frac{B(r)}{r^2} dr$$

konvergent.

Unter diesen Umständen ist der singuläre Punkt der Differentialgleichung (15) von derselben Art wie derjenige der verkürzten Gleichung (20): die Integralkurven laufen mit bestimmter Tangente in den Punkt ein, und in jeder Richtung *genau eine*.

Denn unter unseren Voraussetzungen erfüllen die Funktionen f und g die Bedingungen (16) und (19).

Der letzte Satz enthält im wesentlichen das Hoheisel'sche Ergebnis. Unsere Beweisführung zeigt zugleich deutlich, in welcher Weise man die Voraussetzungen noch einschränken könnte. Übrigens brauchte man auch nicht zu verlangen, daß die oben benutzte Funktion $\Phi(\varrho, \varphi)$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Nach einem Satz von Nagumo würde es genügen, wenn nur eine Abschätzung

$$\left| \frac{\Phi(\varrho, \varphi_1) - \Phi(\varrho, \varphi_2)}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| \leq \frac{1}{\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

gilt.

§ 10.

Zusammenfassung.

Unsere Überlegungen bieten die Möglichkeit, die Natur des singulären Punktes einer Differentialgleichung (1) zu untersuchen. Wir haben zu diesem Zweck die Umgebung des Punktes in Sektoren eingeteilt und diese einzeln untersucht. Es kommt vor allem auf diejenigen Strahlen an, auf denen die Funktion $F(\varphi)$ verschwindet. Nur in einer schmalen Umgebung dieser Strahlen wird das Verhalten der Zusatzglieder η_1, η_2 mitbestimmend für die Art des singulären Punktes. Besonders entscheidenden Einfluß gewinnen die Zusatzglieder in der Nähe derjenigen Strahlen, die durch eine *Nullstelle gerader Ordnung* der Funktion $F(\varphi)$ bestimmt sind. Für diesen Fall konnten wir aber verhältnismäßig scharfe Kriterien aufstellen. Es bestehen für den Verlauf der Integralkurven in der Nähe eines solchen Strahles zwei Möglichkeiten (in § 6 als a und b bezeichnet), und wir haben gefunden: es gibt eine Funktion $A(r)$ und eine Zahl D , so daß

immer der Fall a vorliegt, | immer der Fall b vorliegt,

wenn die Funktion $f(r, \varphi) = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi$ in der Umgebung des betreffenden Strahles einer Abschätzung

$$\left. \begin{array}{l} f(r, \varphi) \leq c_1 \cdot A(r) \\ \text{mit } 0 < c_1 < D \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} f(r, \varphi) \geq c_2 \cdot A(r) \\ \text{mit } c_2 > D \end{array} \right.$$

genügt (§ 8).

Besondere Verhältnisse liegen vor, wenn die Funktion $F(\varphi)$ identisch verschwindet. Auch in diesem Falle konnten wir deutlich die Bedingungen überblicken, die für die Art des singulären Punktes bestimmend sind (§ 9, I und II).

(Eingegangen am 31. März 1938.)

Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome.

Von

J. Meixner.

1. Die Charlierschen Polynome¹⁾ $Q_n(x, a)$ werden durch Bildung der sukzessiven Differenzenquotienten aus der Poissonschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$(1) \quad \psi_0(x, a) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

gewonnen²⁾. Ist ψ_n rekursiv definiert durch

$$(2) \quad \psi_{n+1}(x, a) = \psi_n(x-1, a) - \psi_n(x, a),$$

wobei für $\psi_n(-1, a)$ Null zu setzen ist, so gilt

$$(3) \quad Q_n(x, a) \psi_0(x, a) = a^n \psi_n(x, a).$$

Die Polynome $Q_n(x, a)$ lassen sich in der Form darstellen

$$(4) \quad Q_n(x, a) = \sum_{v=0}^n \binom{x}{v} \binom{n}{v} v! (-a)^{n-v} = (-a)^{n-x} Q_x(n, a).$$

Ihre wichtigsten Eigenschaften sind:

I. Die Orthogonalität zur Poissonschen Verteilung

$$(5) \quad \sum_{x=0}^{\infty} Q_n(x, a) Q_m(x, a) \psi_0(x, a) = \delta_{nm} \cdot n! a^n,$$
$$(\delta_{nm} = 1 \text{ für } n = m, = 0 \text{ für } n \neq m).$$

II. Die Rekursionsformeln

$$(6) \quad Q_n(x+1, a) - Q_n(x, a) = \Delta Q_n(x, a) = n Q_{n-1}(x, a);$$

$$(7) \quad Q_{n+1}(x, a) = (x - n - a) Q_n(x, a) - a n Q_{n-1}(x, a).$$

III. Die Differenzengleichung

$$(8) \quad a Q_n(x+1, a) + (n - x - a) Q_n(x, a) + x Q_n(x-1, a) = 0.$$

(7) und (8) gehen mittels der Symmetriebeziehung (4) in x und n in einander über.

¹⁾ C. V. L. Charlier, Arkiv för Mat. Astron. o. Fysik 2, 1905/06, Nr. 20.

²⁾ x, y, ξ, n, m, v sollen im folgenden immer nichtnegative ganze Zahlen bedeuten.

IV. Die erzeugende Funktion

$$(9) \quad (1+t)^x e^{-at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x, a)}{n!} t^n.$$

Die angegebenen Beziehungen (1) bis (9) sind Verallgemeinerungen entsprechender Beziehungen für die Hermiteschen Polynome. Man kommt auf die letzteren zurück, indem man $x = a + X \sqrt{a}/k$ setzt und den Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ macht. k ist die Streuung der aus (1) so entstehenden Gaußschen Verteilung³⁾.

2. Als „erzeugende Funktion“ bezeichnet man gelegentlich auch die folgende (zunächst formale⁴⁾) Potenzreihe in s

$$(10) \quad K(x, y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, a) Q_n(y, a) \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{s}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, a) q_n(y, a) s^n.$$

Die $q_n(x, a)$ sind normierte Orthogonalpolynome.

Die erzeugende Funktion der Form (10) ist im Falle der Hermiteschen, Laguerreschen, Legendreschen, Gegenbauerschen und Jacobischen Orthogonalpolynome als geschlossener Ausdruck bekannt⁵⁾. Für die Charlierschen Polynome scheint diese Aufsummierung noch nicht durchgeführt zu sein.

Im folgenden wird die Summe (10) und im Zusammenhang damit die Greensche Funktion zur Differenzengleichung (8) als weitere „erzeugende Funktion“ der Charlierschen Polynome berechnet.

3. Statt der Potenzreihe (10) kann man ohne wesentliche Erschwerung auch die allgemeinere Reihe

$$(11) \quad K(x, y; a, b; \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, a) Q_n(y, b) \cdot \frac{\sigma^n}{n!}$$

aufsummieren. Wegen (4) ist dies

$$(12) \quad K(x, y; a, b; \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_x(n, a) Q_y(n, b) \frac{\sigma^n}{n!} (-a)^{n-x} (-b)^{n-y}.$$

³⁾ Die Charlierschen Polynome und ein Teil ihrer oben angegebenen Eigenschaften sind im Zusammenhang mit den Hermiteschen, Laguerreschen und anderen orthogonalen Polynomsystemen in einer anderen Arbeit des Verf., Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934), S. 6, dargestellt.

⁴⁾ Die Reihe (10) ist übrigens sogar für alle s absolut konvergent; das folgt schon aus der rohen Abschätzung für $x = 0, 1, 2, \dots$: $|Q_n(x, a)| \leq (x+a)^n$.

⁵⁾ Die einfachsten Berechnungsmethoden für sie sind bei G. N. Watson, Journ. Lond. Math. Soc. 8 (1933), S. 189, 194, 289; 9 (1934), S. 22, zusammengestellt.

Multipliziert man diese Reihe mit $\frac{t^x}{x!} \frac{\tau^y}{y!}$ und summiert über alle x, y von 0 bis ∞ , so entsteht

$$(13) \quad \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{t^x \tau^y}{x! y!} K(x, y; a, b; \sigma) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab\sigma)^n}{n!} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{Q_x(n, a)}{x!} \left(-\frac{t}{a}\right)^x \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \frac{Q_y(n, b)}{y!} \left(-\frac{\tau}{b}\right)^y.$$

Die rechte Seite läßt sich wegen (9) zusammenfassen zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab\sigma)^n}{n!} \left(1 - \frac{t}{a}\right)^n e^t \left(1 - \frac{\tau}{b}\right)^n e^{\tau} = e^{t + \tau + \sigma(a-t)(b-\tau)}.$$

Diese Exponentialfunktion entwickelt man nun wieder nach Potenzen von t und τ :

$$e^{\sigma ab} \cdot e^{\tau(1-\sigma a)} \cdot e^{t(1-\sigma b + \sigma \tau)} = e^{\sigma ab} \cdot e^{\tau(1-\sigma a)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t^x}{x!} (1 - \sigma b + \sigma \tau)^x.$$

Die Entwicklung nach Potenzen von τ geschieht mit Hilfe von (9). Die gesuchte Reihenentwicklung wird dann

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{t^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\tau^y}{y!} \cdot e^{\sigma ab} (1 - \sigma b)^{x-y} \sigma^y Q_y\left(x, -\frac{(1-\sigma a)(1-\sigma b)}{\sigma}\right).$$

Durch Vergleich mit (13) entsteht also⁶⁾

$$(14) \quad K(x, y; a, b; \sigma) = e^{\sigma ab} (1 - \sigma b)^{x-y} \sigma^y Q_y\left(x, -\frac{(1-\sigma a)(1-\sigma b)}{\sigma}\right) \\ = e^{\sigma ab} (1 - \sigma a)^{y-x} \sigma^x Q_x\left(y, -\frac{(1-\sigma a)(1-\sigma b)}{\sigma}\right).$$

Insbesondere folgt aus (10) und (11)

$$(15) \quad K(x, y, s) = K\left(x, y; a, a; \frac{s}{a}\right) = e^{as} (1-s)^{y-x} \left(\frac{s}{a}\right)^x Q_x\left(y, -\frac{(1-s)^2}{s} a\right).$$

$K(x, y, s)$ ist also eine ganze transzendente Funktion in s für $x, y = 0, 1, 2, \dots$. Für $s = 1$ hat sie den Wert

$$(16) \quad K(x, y, 1) = \frac{e^a x!}{a^x} \delta_{xy}.$$

4. Als Greensche Funktion zur Differenzengleichung (8) führt man die Funktion

$$(17) \quad G(x, \xi) = G(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x, a) Q_n(\xi, a)}{p-n} \frac{a^{-n}}{n!}, \quad p \neq 0, 1, 2, \dots$$

⁶⁾ Der Spezialfall $\sigma = \frac{1}{b}$ von (14) wurde bereits von G. Doetsch, Math. Ann.

109 (1933), S. 257 Formel (C) mit einer unnötigen Einschränkung des Konvergenzbereichs angegeben. Setzt man außerdem $x = 0$ in (14), so ergibt sich die Gleichung (9), die mit der erzeugenden Funktion (C₀) von Doetsch übereinstimmt.

ein. Auch sie kann man als eine erzeugende Funktion der Polynome $Q_n(x, a)$ bezeichnen. (17) genügt wegen (8), (10) und (16) der Differenzengleichung

$$(18a) \quad aG(x+1, \xi) + (p-x-a)G(x, \xi) + xG(x-1, \xi) = K(x, \xi, 1) \\ = \delta_{x\xi} \cdot e^a \xi! a^{-\xi} \quad \text{für } x \geq 1,$$

$$(18b) \quad aG(1, \xi) + (p-a)G(0, \xi) = \delta_{0\xi} \cdot e^a \xi! a^{-\xi}.$$

Um einen geschlossenen Ausdruck für $G(x, \xi)$ zu erhalten, geht man zweckmäßig so vor, daß man die Reihe (17) erst für $\xi = 0$ aufsummiert. Wegen (4) ist

$$(19) \quad G(x, 0) = G(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x, a) \cdot (-1)^n}{(p-n)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{x}{v} \frac{(-1)^n}{p-n} \cdot \frac{(-a)^{n-v}}{(n-v)!} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \sum_{v=0}^{\infty} \binom{x}{v} \frac{(-1)^v}{p-m-v} \\ = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{x!}{(-p+m)(-p+m+1) \dots (-p+m+x)} \\ = - \frac{x!}{(-p)(-p+1) \dots (-p+x)} F(-p, x+1-p, a) \\ = - \frac{x! \Gamma(-p)}{\Gamma(-p+x+1)} F(-p, x+1-p, a).$$

Man braucht nun nur mehr eine Lösung von (18a) und (18b) zu suchen, die für $x = 0$ den Wert $G(0, \xi)$ aus (19) hat. Sie ist eindeutig bestimmt, weil sich dann aus (18b) $G(1, \xi)$, aus (18a) sukzessive $G(2, \xi)$, $G(3, \xi)$, ... eindeutig berechnen lassen. Die Funktion

$$(20) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} -\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(\xi) & \text{für } x \geq \xi, \\ -\Phi_2(x) \cdot \Phi_1(\xi) & \text{für } x \leq \xi, \end{cases}$$

wo

$$(21) \quad \Phi_1(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-p)} \cdot F(-p, x+1-p, a),$$

$$(22) \quad \Phi_2(x) = \Gamma(x-p) \cdot a^{-x} \cdot F(-x, p+1-x, a),$$

genügt (18a), (18b) und (19), wie man leicht nachrechnet, ist also die gesuchte Greensche Funktion⁷⁾.

5. Die Beschränkung auf ganzzahlige nichtnegative x, y, ξ (vgl. Anm. 2)) ist nicht immer notwendig. Die Darstellung (4) definiert $Q_n(x, a)$ für alle

⁷⁾ $F(\alpha, \gamma, z)$ ist die konfluente (oder entartete) hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Um nachzuprüfen, daß (20) die gesuchte Lösung von (18) ist, benutzt man zweckmäßig die in der Arbeit des Verf., Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 677 in Gleichung (34) angegebenen Rekursionsformeln für die konfluenten hypergeometrischen Reihen.

(auch komplexe) x und daraus folgt, daß auch die Gleichungen (6) bis (9) für alle x gelten.

Die Reihen (11) und (17) konvergieren jedoch nicht für alle x, y bzw. x, ξ . Um ihr Verhalten zu untersuchen, benutzt man die asymptotischen Abschätzungen für große n :

$$\begin{aligned} (23) \quad Q_n(x, a) &= \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} F(-n, x-n+1, a) \\ &= \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} e^a F(x+1, x-n+1, -a) \\ &= x(x-1) \dots (x-n+1) \cdot e^a \cdot \left(1 + a \cdot \frac{x+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad \text{für } x \neq 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (24) \quad Q_n(x, a) &= n(n-1) \dots (n-x+1) (-a)^{n-x} \left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad \text{für } x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Es ergibt sich Konvergenz der Potenzreihe (11) in σ , falls x oder y oder x und y einen der Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen. Der Radius des Konvergenzkreises ist in den drei Fällen gleich $\frac{1}{a}$ bzw. $\frac{1}{b}$ bzw. ∞ . Die Summe der Reihe ist durch eine der beiden Formen von (14) gegeben. Schreibt man (14) in der Form

$$\begin{aligned} (25) \quad K(x, y; a, b; \sigma) &= e^{\sigma ab} (1 - \sigma b)^x (1 - \sigma a)^y \left[1 + \frac{x \cdot y}{1!} \frac{\sigma}{(1 - \sigma a)(1 - \sigma b)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x(x-1) \cdot y(y-1)}{2!} \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma a)^2 (1 - \sigma b)^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

so hat man eine Darstellung der erzeugenden Funktion (11), die auch gilt, wenn weder x noch $y = 0, 1, 2, \dots$; die unendliche Reihe in (25) konvergiert zwar nicht, sie läßt sich aber in eine formale Potenzreihe nach steigenden Potenzen von σ entwickeln, deren Koeffizienten Polynome in x, y sind, die mit $\frac{1}{n!} Q_n(x, a) Q_n(y, b)$ übereinstimmen.

Die Reihe (17) konvergiert außer für $x, \xi = 0, 1, 2, \dots$, auch wenn x bzw. $\xi = 0, 1, 2, \dots$ und $\Re \xi > x - 1$ bzw. $\Re \xi > \xi - 1$; ihre Summe ist im letzten Fall $-\Phi_1(\xi) \Phi_2(x)$ bzw. $-\Phi_1(x) \Phi_2(\xi)$. In allen übrigen Fällen divergiert sie (Beweis mit Hilfe von (23) und (24) durch Anwendung des Konvergenzkriteriums von Weierstraß⁸⁾).

⁸⁾ K. Weierstraß, Journ. f. d. reine und angewandte Math. 51 (1856), S. 29.

On Bloch's theorem.

Von

A. J. Macintyre in Aberdeen.

1. The special case of Bloch's theorem

There exists a positive constant $\mathfrak{B}$ such that if $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ is regular for $|z| < 1$, then the Riemann surface of the inverse function $z = f^{-1}(w)$ contains a circle of radius arbitrarily near $\mathfrak{B}$,

has been proved by a variety of methods, some quite simple¹). Bloch's original method gave considerably more information than this but was extremely complicated. It depended on the theory of the comparison of two power series used by Wiman in the case of integral functions²). We propose to show that with little fundamental alteration the proof is considerably simplified if we replace the comparison of coefficients by some simple considerations relating to the growth of the maximum modulus of analytic functions. As a result of this simplification a number of generalisations can easily be obtained. The form of Bloch's theorem we prove is

To any given k with $0 < k < 1$ corresponds a β with $0 < \beta < 1$ such that if $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ is regular for $|z| < 1$ then a domain D can be found in $\beta < |z| < 1$ which is represented conformally by $w = f(z)$ on the cut annulus $kM(r) < |w| < k^{-1}M(r)$, $|\arg w| < \pi$. $M(r)$ is the maximum modulus of $f(z)$ on a circle $|z| = r$ passing through D and so $M(r) > \beta$.

2. The idea behind Wiman's method is that near a point z at which $f(z)$ attains its maximum modulus $M(r)$ for $|z| = r$, the usual behaviour of $f(z)$ is something like z^N where N is a constant. This is equivalent to saying that

$$(1) \quad \varphi(\tau) = \frac{f(ze^\tau)}{f(z)} e^{-N\tau}$$

¹) A. Bloch, (a) C. R. 178 (1924), pp. 2051—2053; (b) Annales de Toulouse (3) 17 (1925), pp. 1—22; (c) „Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité“ (1926), pp. 31—32. G. Valiron, (d) C. R. 183 (1926), pp. 728—730; (e) C. R. 183 (1926), pp. 1256—1258; (f) C. R. 186 (1928), pp. 1815—1817; (g) Rendiconti di Palermo 54 (1930); (h) Mathematica 4 (1930), pp. 81—105; (i) „Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées“ (1937), Ch. 6. E. Landau, (k) S.-B. preuß. Akad. (1926), S. 467—474; (l) S.-B. preuß. Akad. (1928), S. 339—344; (m) Math. Zeitschr. 42, 30 (1929), S. 608—634; L. Ahlfors and H. Grunsky; (n) Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 671—673; L. Ahlfors, (o) Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), pp. 359—364.

²) This method is used in (a), (b), (c), (d), (e), (f), (h), (i). For integral functions see A. J. Macintyre, Quart. J. of Math. (Oxford) 9 (1938), pp. 81—88.

is practically constant if z is so chosen that $|f(z)| = M(r)$, $|z| = r$. To make this as likely as possible we choose

$$(2) \quad N = zf'(z)/f(z)$$

so that

$$(3) \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Since $f(z)$ has its maximum modulus on $|z| = r$, we have

$$(4) \quad R \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = R \left\{ i r e^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = 0, \quad z = re^{i\theta}.$$

Thus N is real and therefore lies between the left and right derivatives $d \log M(r)/d \log r$ which exist, are positive, and of which the second is the greater (unless they are equal), since $\log M(r)$ is a convex function of $\log r^2$.

Now suppose that for $|\tau| < \sigma$ we had

$$(5) \quad |\varphi(\tau)| \leq M(>1).$$

then

$$(6) \quad \zeta(\tau) = \frac{\varphi(\tau) - 1}{\varphi(\tau) - M^2}$$

satisfies

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \quad |\zeta(\tau)| \leq 1/M, \quad |\zeta(\tau)/\tau^2| \leq 1/M\sigma^2.$$

Hence for $|\tau| < \theta\sigma$ we have

$$(7) \quad |\zeta(\tau)| \leq \theta^2/M.$$

This means that $w = \varphi(\tau)$ is confined to the circle

$$(8) \quad M|w - 1| \leq \theta^2|w - M^2|$$

which meets the real axis in the points

$$(9) \quad w_1 = \frac{M(1 - M\theta^2)}{M - \theta^2}, \quad w_2 = \frac{M(1 + M\theta^2)}{M + \theta^2}$$

as ends of a diameter. If $\theta^2 < M^{-1}$ this circle does not contain the origin, its centre is distant less than unity from the origin, and so, if $\omega(\tau)$ is the value of $\log \varphi(\tau)$ vanishing with τ

$$(10) \quad |\omega(\tau)| \leq -\log w_1 = \log \frac{M - \theta^2}{M(1 - M\theta^2)} = A \text{ (say).}$$

But

$$(11) \quad g(\tau) = \log \frac{f(ze^\tau)}{f(z)} = N\tau + \omega(\tau)$$

³) Hadamard's three circles theorem. Bieberbach „Lehrbuch der Funktionen-theorie“ II (1927), S. 128.

and hence, by Rouché's theorem, $g(\tau)$ will take in $|\tau| < \theta\sigma$ every value w once and once only provided

$$(12) \quad |w| < N\theta\sigma - A.$$

This circle of values for w will include the rectangle

$$(13) \quad \log k < R(w) < \log(1/k), \quad |I(w)| < 2\pi$$

if

$$(14) \quad N\theta\sigma \geq A + \sqrt{(\log k)^2 + 4\pi^2}.$$

This result is equivalent to the theorem if we can find a β such that (5) and (14) can certainly be satisfied by a z with $|z| > \beta$.

3. The matter is thus reduced entirely to a question of the behaviour of $M(r)$ and the proof of the theorem is completed by the Lemma: If $\alpha (> 0)$ and $\lambda (0 < \lambda < 1)$ are given constants and if $\mu(t)$ is defined and continuous for $t < 0$ and satisfies (i) $\mu(t)$ is convex and increasing (ii) $\mu(t) - t$ is convex and increasing, then there exist values $t (< 0)$, $\sigma (> 0)$, $\sigma' (> 0)$ with

$$(15) \quad -[2 + 1/(1 - \lambda)]\alpha \leq t - \sigma', \quad t + \sigma < 0$$

such that

$$(16) \quad \mu(t + \sigma) = \mu(t) + \alpha, \quad \mu(t) = \mu(t - \sigma') + \alpha, \quad \lambda\sigma' \leq \sigma \leq \sigma'.$$

It is clear that $\log M(e^t) = \mu(t)$ satisfies the conditions of the lemma, and forming $\varphi(\tau)$ as in (1) with $r = |z| = e^t$ with the value of t given in the lemma, we have, with $R(\tau) = u$ ($t + u > 0$)

$$(17) \quad \log |\varphi(\tau)| \leq \mu(t + u) - \mu(t) - Nu.$$

The right hand side of this inequality represents the height of the curve

$$(18) \quad y = \mu(x)$$

at the point $x = t + u$ above the 'tangent'

$$(19) \quad y = \mu(t) + N(x - t)$$

which 'touches' the curve at $x = t$. Since the curve is convex this height is positive whatever the sign of u , and increases with $|u|$. So, if $-\sigma' < R(\tau) < \sigma$, and *a fortiori* if $|\tau| < \sigma$

$$(20) \quad \log |\varphi(\tau)| \leq \alpha - N\sigma (u > 0), \quad \log |\varphi(\tau)| \leq N\sigma' - \alpha (u < 0).$$

But

$$(21) \quad \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\mu(t + \sigma) - \mu(t)}{\sigma} \geq N \geq \frac{\mu(t) - \mu(t - \sigma')}{\sigma'} = \frac{\alpha}{\sigma'},$$

so that $\alpha - N\sigma < \alpha(1 - \lambda)$ and $N\sigma' - \alpha < \alpha(1 - \lambda)/\lambda$. Thus we may take these values of z , σ , and N and have

$$(22) \quad M = \exp \left\{ \frac{\alpha(1 - \lambda)}{\lambda} \right\}.$$

It only remains to choose the parameters to satisfy (14). For example take $\lambda = \alpha/(\alpha + 1)$ so that $M = e$, and then with $\theta = \frac{1}{2}$ we shall have $A < 2$ and (14) will be satisfied if

$$(23) \quad \frac{1}{2} N\sigma (\geq \frac{1}{2} \alpha \lambda = \frac{1}{2} \alpha^2/[\alpha + 1]) \geq 2 + \sqrt{\{(\log k)^2 + 4\pi^2\}}.$$

For this it will be sufficient to take

$$(24) \quad \alpha > 3 \sqrt{\{(\log k)^2 + 4\pi^2\}} - 3$$

so that β in the theorem can be $\exp\{-\alpha(\alpha + 3)\}$ or say $\exp\{-9[(\log k)^2 + 4\pi^2]\}$.

4. To prove the lemma we proceed as follows. Define the sequence

$$(25) \quad -\gamma = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

by the condition

$$(26) \quad \mu(t_{n+1}) = \mu(t_n) + \alpha$$

From (i) and (ii)

$$(27) \quad \frac{\mu(t_{n+1}) - \mu(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \geq \frac{\mu(t_n) - \mu(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \geq 1$$

so that

$$(28) \quad t_{n+1} - t_n \leq t_n - t_{n-1} \leq \alpha$$

and the sequence proceeds at least as far as t_n if $\gamma > n\alpha$. Let us denote by t the first value of t_n such that

$$(29) \quad t_{n+1} - t_n > \lambda(t_n - t_{n-1})$$

where λ is fixed and $0 < \lambda < 1$. Such a value exists if γ is large enough, for otherwise the total length of the intervals $t_{n+1} - t_n$ is at most

$$(30) \quad (t_1 - t_0)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \frac{t_1 - t_0}{1 - \lambda} \leq \frac{\alpha}{1 - \lambda}$$

which leads to a contradiction if

$$(31) \quad \gamma > (2 + 1/[1 - \lambda])\alpha$$

We take this value of t and with $\sigma = t_{n+1} - t_n$, $\sigma' = t_n - t_{n-1}$ the lemma is proved.

5. Some complements, important in their applications, have been given by Valiron⁴) and they are quite easy deductions from our method provided

⁴) Valiron, (i) Theorem 12.

we can ensure that the value of σ given in the lemma is not too small. Still defining the sequence t_n by (26) it is clear that the sum of the lengths of those intervals (t_n, t_{n+1}) for which $t_{n+1} - t_n < \lambda(t_n - t_{n-1})$ is at most $\alpha/(1 - \lambda)$ and that the sum of the lengths of those intervals for which $t_{n+1} - t_n$

$< [\gamma + \mu(t_n)]^{-1-\delta}$ ($\delta > 0$ fixed) is at most $\sum_1^\infty (n\alpha)^{-1-\delta} = K(\delta) \alpha^{-1-\delta}$.

Hence by taking a smaller value of $\beta (= e^{-\gamma})$ we can be sure that the value of σ given by the lemma can be taken to satisfy $\sigma > [\gamma + \mu(t_n)]^{-1-\delta}$. Now with $r = e^t$, $\mu(t) = \log M(r)$ it follows that $|f(z)| \leq e^\alpha M(r)$ for $|z| \leq re^\sigma$. Any point in $|z| < re^{\frac{1}{2}\sigma}$ is thus the centre of a circle of radius $r(e^\sigma - e^{\frac{1}{2}\sigma})$ in which $|f(z)| < e^\alpha M(r)$ and hence by Cauchy's inequalities

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(z)| &\leq \frac{p! e^\alpha M(r)}{r^p (e^\sigma - e^{\sigma/2})^p} \leq \frac{p! e^\alpha M(r)}{r^p} \left(\frac{2}{\sigma}\right)^p \\ (32) \quad &\leq \frac{p! e^\alpha M(r)}{r^p} \{2[\gamma + \log M(r)]^{1+\delta}\}^p \quad [\alpha = \alpha(k, \delta), \gamma = \gamma(k, \delta)] \end{aligned}$$

We may thus suppose that this inequality (somewhat more precise than that given by Valiron) is satisfied throughout the domain D of the theorem.

Many other forms of Bloch's theorem have been given⁵). Here we may remark that in the first place we have made no use of the fact that $f(z)$ is regular for $|z| < \beta$ but only that $d \log M(r)/d \log r \geq 1$, so that our theorem extends in a natural way to functions regular in an annulus. We also clearly have the theorem

If $w = f(z) = z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots$ is regular for $|z| < 1$ then a domain D can be found in $\beta < |z| < 1$ ($\beta = \beta(k, m) > 0$) which is represented conformally on the multiform cut annulus $kM(r) < |w| < k^{-1}M(r)$, $|\arg w| < m\pi$. $M(r)$ is the maximum modulus of $f(z)$ on a circle $|z| = r$ passing through D .

⁵) See in particular (b), (c), (g), (h), (l).

Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich *).

Von

W. Mangler in Göttingen.

Die topologischen Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ auf sich zerfallen bekanntlich in *Isotopieklassen*. Zwei Abbildungen gehören zu derselben Isotopieklasse, wenn sie sich nur durch eine isotope Deformation¹⁾ der Fläche voneinander unterscheiden. Die Isotopieklassen von $\mathfrak{F}$ bilden eine Gruppe.

Jede topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirkt einen bis auf innere Automorphismen bestimmten Automorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ ²⁾, eine sogenannte *Automorphismenfamilie*. Mit anderen Worten läßt sich eine Automorphismenfamilie als eine Restklasse der gesamten Automorphismengruppe nach der Untergruppe der inneren Automorphismen ansprechen. Die Automorphismenfamilie, die von einer bestimmten topologischen Selbstabbildung erzeugt wird, ändert sich nicht, wenn man die Abbildung isotop (sogar nicht, wenn man sie homotop) deformiert³⁾. Eine ganze Isotopieklasse erzeugt also ein und dieselbe Automorphismenfamilie, insbesondere die Klasse der Identität die Familie der inneren Automorphismen. Da überdies das Produkt zweier Abbildungen das Produkt der Automorphismenfamilien erzeugt, liegt eine homomorphe Abbildung der Gruppe der Isotopieklassen in die Gruppe der Automorphismenfamilien vor. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu beweisen, daß *diese homomorphe Abbildung bei jeder geschlossenen Fläche mit Ausnahme der Kugel sogar eine isomorphe Abbildung auf die Gruppe der Automorphismenfamilien ist*.

Dazu ist zweierlei zu zeigen: Der Kern des Homomorphismus, also die Gesamtheit der Isotopieklassen, die sich in die Familie der inneren Automorphismen abbilden, besteht aus der Isotopieklasse der Identität allein, was wir in dem folgenden Satze formulieren:

*) Die vorliegende Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Halle als Dissertation (D 3) angenommen. Herrn H. Brandt, Herrn W. Threlfall und Herrn H. Seifert danke ich für ihre Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit.

¹⁾ Vgl. H. Seifert u. W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, S. 113, 114. Leipzig und Berlin 1934. (Im folgenden abgekürzt mit S.-T.)

²⁾ S.-T., S. 156.

³⁾ S.-T., S. 176 und J. Nielsen, Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen, Acta Litt. Sci. Szeged 7 (1935), S. 200.

Satz 1. Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen, von der Kugel verschiedenen Fläche, die einen inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe bewirkt, ist eine isotope Deformation.

Und ferner

Satz 2. Jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche kann durch eine topologische Selbstabbildung der Fläche bewirkt werden (§ 3).

Da jede topologische Selbstabbildung einer geschlossenen Fläche, die einen inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe bewirkt, jede geschlossene Kurve in eine homotope überführt, so folgt Satz 1 aus dem schärferen

Satz 1' (Hauptsatz). Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen, von der Kugel verschiedenen Fläche, die jede Kurve in eine homotope überführt, ist eine isotope Deformation (§ 2). Beim Beweise benutzen wir sogar nur die Tatsache, daß $N + 2$ geeignete Rückkehrschnitte in homotope übergehen ($N = -e + k - f$ ist die Eulersche Charakteristik).

Da eine homotope Deformation von ganz $\mathfrak{F}$ jede geschlossene Kurve in eine homotope überführt, so folgt hieraus insbesondere der

Satz 3. Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen Fläche, die sich durch eine homotope Deformation bewirken läßt, läßt sich auch durch eine isotope Deformation bewirken.

Satz 1 findet sich für orientierbare Flächen bei R. Baer⁴⁾, für orientierbare und nichtorientierbare bei Brödel⁵⁾ ausgesprochen. Satz 2 findet sich bei J. Nielsen⁶⁾. Der hier angegebene Beweis von Satz 2 geht auf eine Mitteilung von H. Seifert zurück. — Was homotope Deformationen anlangt, vergleiche man H. Hopf (wird später zitiert).

Satz 1' beweisen wir im folgenden für Flächen der Charakteristik $N > 0$. Das Beweisverfahren läßt sich auch auf Flächen der Charakteristik $N = 0$ (orientierbare und nichtorientierbare Ringfläche) und $N = -1$ (projektive Ebene) übertragen. Dagegen mußten wir in Satz 1' die Kugelfläche ausschließen, da es auf ihr zwei Isotopieklassen topologischer Selbstabbildungen (repräsentiert durch Identität und Diametralpunktvertauschung) gibt, während die Fundamentalgruppe, also auch die Gruppe der Automorphismenfamilien, aus dem Einselement allein besteht.

⁴⁾ R. Baer, Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, Journ. f. Math. 159 (1928), S. 101.

⁵⁾ W. Brödel, Über die Deformationsklassen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akademie Leipzig 87 (1935), S. 85.

⁶⁾ J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Mathematica 50 (1927), S. 189; Satz 11, S. 266.

§ 1.

Hilfssatz.

Auf einer geschlossenen orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ von konstanter negativer Krümmung sei ein System Ω von endlich vielen geschlossenen, doppelpunktfreien, mit einer bestimmten Orientierung versehenen Geodätischen von folgender Beschaffenheit gegeben: Es gibt eine Kurve x in Ω , die höchstens eine der übrigen Kurven, sagen wir die Kurve y , in genau einem Punkte durchsetzt; die von x und y verschiedenen Kurven von Ω , $z_1, \dots, z_s$, sind punktfremd zu x ; wir lassen zu, daß die Kurve y fehlt, x also keine der übrigen Kurven trifft, sowie daß $s = 0$ ist.

Ferner sei eine topologische Selbstabbildung T der Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben, die die von x verschiedenen Kurven von Ω punktweise fest läßt und x in eine homotope Kurve überführt. Dann gibt es eine isotope Deformation D von $\mathfrak{F}$ derart, daß die topologische Selbstabbildung DT (erst T , dann D ausüben!) alle Kurven von Ω punktweise fest läßt.

Beweis:

1. Die Kurve $x' = T(x)$ durchsetzt y einmal, und zwar in demselben Punkt wie x , da y punktweise fest bleibt. x' ist ferner punktfremd zu $z_1, \dots, z_s$, da T topologisch ist, die Kurven $z_1, \dots, z_s$ punktfremd zu x sind und punktweise fest bleiben. Alle auf die Kurven y oder $z_1, \dots, z_s$ bezüglichen Behauptungen fallen natürlich fort, wenn diese Kurven fehlen.

2. Die universelle Überlagerungsfläche $\widehat{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ ist die *hyperbolische Ebene*, die wir uns durch das Poincarésche (konforme) Modell, das Innere des Einheitskreises der euklidischen Ebene, darstellen. Hyperbolische Geraden sind alsdann Orthogonalkreise des Einheitskreises. Die Punkte der Einheitskreislinie sind die in hyperbolischer Maßbestimmung unendlich fernen oder uneigentlichen Punkte der hyperbolischen Ebene. *Decktransformationen* von $\widehat{\mathfrak{F}}$ sind solche hyperbolisch starren Transformationen, die äquivalente, d. h. über demselben Grundpunkte von $\mathfrak{F}$ gelegene Punkte von $\widehat{\mathfrak{F}}$, in äquivalente überführen. Es sind Translationen (*Gleitungen*), oder, falls $\mathfrak{F}$ nichtorientierbar ist, auch *Gleitspiegelungen* längs einer hyperbolischen Geraden.

Jede geschlossene Kurve des Systems Ω wird von unendlich vielen hyperbolischen Geraden in $\widehat{\mathfrak{F}}$ überlagert, da die Kurven Geodätische sind; wir bezeichnen diese Geraden als x -, y - oder z -Geraden. $g(x)$ sei eine bestimmte, ein für allemal fest gewählte x -Gerade. Sei ferner $g(x')$ diejenige x' überlagernde Kurve, die nach denselben beiden uneigentlichen Punkten führt wie $g(x)$; sie existiert, weil x' homotop x ist. Die Decktransformationen, die $g(x)$ in sich verschieben — Deckgleitungen oder Deckgleitspiegelungen,

wobei die letzteren nur vorkommen, wenn x einufrig ist —, führen dann auch $g(x')$ in sich über und umgekehrt⁷⁾.

3. Ist die y -Kurve in $\mathfrak{F}$ vorhanden, so wird $g(x)$ von unendlich vielen y -Geraden durchsetzt, z. B. von $g(y)$, $g_z(y)$ und $g_\lambda(y)$ (Fig. 1). Jede dieser

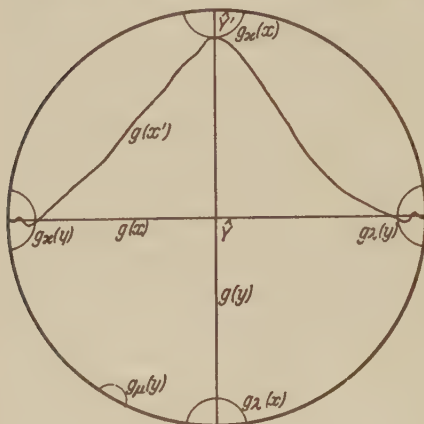


Fig. 1.

y -Geraden muß auch von $g(x')$ in genau einem Punkte durchsetzt werden, nämlich in mindestens einem Punkte, da $g(x')$ dieselben beiden uneigentlichen Punkte auf dem Einheitskreise hat wie $g(x)$; durchsetzte $g(x')$ eine dieser y -Geraden aber in mehr als einem Punkte, so wären diese Schnittpunkte wegen 1. äquivalent, d. h. zwei von ihnen müßten sich einerseits durch eine Decktransformation, die die uneigentlichen Punkte dieser y -Geraden fest läßt, ineinander überführen lassen, andererseits durch eine

Decktransformation, die $g(x')$ und (wegen 2.) $g(x)$ in sich überführt, was nicht geht. Weil $g(x)$ und $g(x')$ dieselben uneigentlichen Punkte haben, kann eine y -Gerade, die $g(x)$ nicht trifft, z. B. $g_\mu(y)$, auch von $g(x')$ nicht getroffen werden.

Wir betrachten nun eine bestimmte dieser $g(x)$ durchsetzenden y -Geraden, etwa $g(y)$. Sie werde von $g(x)$ in einem Punkte $\hat{Y}$ und von $g(x')$ in einem Punkte $\hat{Y}'$ geschnitten, der wegen 1. zu $\hat{Y}$ äquivalent ist.

⁷⁾ Daß es eine x' überlagernde Kurve $g(x')$ gibt, die dieselben unendlich fernen Punkte hat wie $g(x)$, folgt so: Bei der homotopen Deformation von x in x' , die vorhanden ist, weil x und x' nach Voraussetzung homotop sind, beschreibt der Anfangspunkt A von x einen Weg u nach dem Bildpunkte A' auf x' . Den Punkt A überlagern auf $g(x)$ der Reihe nach die Punkte

$$\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$$

Von diesen Punkten gehen die u überlagernden Kurven

$$\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$$

aus, deren Endpunkte die Punkte

$$\dots, A'_{-2}, A'_{-1}, A'_0, A'_1, A'_2, \dots$$

sind. Die in A'_i beginnende Überlagerung von x' führt dann nach A'_{i+1} , weil der geschlossene Weg $u x'^{-1} u^{-1} x$ von $\mathfrak{F}$ nullhomotop in $\mathfrak{F}$ ist und daher von lauter geschlossenen Wegen in $\mathfrak{F}$ überlagert wird. Die Gesamtheit der Bögen $A'_i A'_{i+1}$, deren jeder x' vollständig überlagert, macht die Kurve $g(x')$ aus. Da $g(x')$ bei den Decktransformationen von $g(x)$ ebenfalls in sich übergeht, so hat die Kurve $g(x')$ dieselben unendlich fernen Punkte auf dem Einheitskreise wie die hyperbolische Gerade $g(x)$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: erster Fall, die Geodätische y von $\mathfrak{F}$ wird von einer der Geodätischen $z_1, \dots, z_s$ durchsetzt, oder zweiter Fall, y ist punktfremd zu $z_1, \dots, z_s$. Im ersten Falle beweisen wir, daß $\hat{Y}' = \hat{Y}$ ist. Wäre nämlich $\hat{Y}' \neq \hat{Y}$, so würde es auf der Strecke $\hat{Y}\hat{Y}'$ einen Punkt geben, der über einem Schnittpunkte von y mit einer der Geodätischen $z_1, \dots, z_s$ liegt, denn die Strecke $\hat{Y}\hat{Y}'$ überlagert mindestens einmal vollständig die Geodätische y . Es würde also die Strecke $\hat{Y}\hat{Y}'$ von einer z -Geraden getroffen. Diese z -Gerade müßte dann aber auch die Kurve $g(x')$ treffen, was der Tatsache widerspricht, daß x' punktfremd zu $z_1, \dots, z_s$ ist (vgl. 1).

Tritt dagegen der zweite Fall ein, ist also y punktfremd zu allen Geodätischen $z_1, \dots, z_s$, so kann $\hat{Y} \neq \hat{Y}'$ sein. In diesem Falle können wir aber auf $\mathfrak{F}$ eine isotope Deformation δ_1 erklären, die außerhalb eines beliebig schmalen Streifens längs y (Kreisringes oder Möbiusbandes, je nachdem y zweifrig oder einfrig ist) die Identität ist, während y in sich um ein passendes Vielfaches seiner Länge verschoben wird. Die Punkte des Streifens werden dabei wie die Teilchen einer zähen Flüssigkeit bewegt, die an den Rändern des Streifens und an y festhaftet. Nach $\hat{\mathfrak{F}}$ drückt sich diese Deformation in eine isotope Deformation durch, die $g(y)$ und alle dazu äquivalenten Geraden in sich um ein Vielfaches der Länge von y verschiebt. Offenbar kann man es durch passende Wahl des Vielfachen einrichten, daß $\hat{Y}'$ in $\hat{Y}$ deformiert wird. Die topologische Selbstabbildung $\delta_1 T$ (erst T , dann $\delta_1!$) hat noch die im Hilfssatz von T geforderten Eigenschaften: sie läßt $y, z_1, \dots, z_s$ punktweise fest und führt x in eine homotope Kurve über, die wir wieder mit x' bezeichnen.

4. Fehlt im Kurvensystem Ω die Kurve y , so ist die Deformation δ_1 überflüssig; wir nehmen dann δ_1 als identische Abbildung an.

5. Es kann nun sein, daß $x' = \delta_1 T(x)$ unendlich viele Punkte mit x gemeinsam hat, ohne ganz auf x zu liegen. In diesem Falle lassen wir eine isotope Deformation δ_2 folgen, bei der $y, z_1, \dots, z_s$ punktweise fest bleiben, während die Kurve $\delta_2 \delta_1 T(x)$ nur endlich viele Punkte, und zwar Schnittpunkte und keine Berührungspunkte mit x gemein hat⁸⁾. Wir bezeichnen

⁸⁾ x sei eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf der mit konstanter negativer Krümmung ausgestatteten Fläche $\mathfrak{F}$ von der Eulerschen Charakteristik $N > 0$, $x' = T(x)$ ihr Bild bei einer topologischen Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$. x' liege nicht vollständig auf x darauf. Diese Voraussetzung können wir machen, da der Hilfssatz trivial würde, wenn x' ganz auf x läge; denn alsdann könnte man durch eine auf einen beliebig schmalen Streifen um x beschränkte isotope Deformation x punktweise festmachen. Wir führen, falls x' unendlich viele Punkte mit x gemein hat, durch eine isotope Deformation δ von $\mathfrak{F}$, die außerhalb eines beliebig schmalen Streifens um x'

$\delta_2 \delta_1 T(x)$ wieder mit x' . Offenbar hat $g(x')$ auch jetzt noch die Eigenschaft, die etwa vorhandenen, $g(x)$ schneidenden y -Geraden in denselben Punkten zu treffen wie $g(x)$.

6. Wir bezeichnen die von $g(x)$ verschiedenen x -Geraden mit $g_1(x), g_2(x), \dots$. Die Gerade $g_i(x)$ zerlegt die hyperbolische Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine $g(x)$ enthält; das andere sei mit $\mathfrak{A}_i$ bezeichnet.

die Identität ist, x' in eine Kurve $\partial(x')$ über, die nur endlich viele Schnittpunkte mit x hat.

Es sei P' ein nicht auf x liegender Punkt von x' . Wir umgeben x' mit einem beliebig schmalen Streifen $\mathfrak{S}'$ — Kreisring oder Möbiusband, je nachdem x' (und x) zweifrig oder einfrig ist — und ziehen in ihm einen Querschnitt q' durch P' , der x' nur in P' trifft. Daß es einen solchen Streifen und Querschnitt gibt, erkennt man daraus, daß man jedenfalls um die geschlossene Geodätische x einen Streifen $\mathfrak{S}$ und durch den Originalpunkt P einen Querschnitt q von $\mathfrak{S}$ legen kann, der x nur in P trifft; man braucht dann nur $\mathfrak{S}' = T(\mathfrak{S})$, $q' = T(q)$ zu wählen.

Schneidet man $\mathfrak{S}'$ längs q' auf, so entsteht ein „Rechteck“ $\bar{\mathfrak{S}}$ mit den äquivalenten Gegenseiten $\bar{q}_1$ und $\bar{q}_2$, auf denen die dem Punkte P' entsprechenden Punkte $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ liegen. $\bar{\mathfrak{S}}$ ist dabei ebenso wie $\mathfrak{S}'$ mit der Metrik der Fläche $\mathfrak{F}$ ausgestattet. Es hat also einen Sinn, in $\bar{\mathfrak{S}}$ von geodätischen Bögen und Polygonen zu sprechen.

Wir verbinden nun in $\bar{\mathfrak{S}}$ die Punkte $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ durch ein doppelpunktfreies geodätisches Polygon $\bar{\mathfrak{P}}$, das bis auf seine Randpunkte $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ ganz im Inneren von $\bar{\mathfrak{S}}$ verläuft und das unter Umständen unendlich viele Seiten hat. Diese sollen sich indessen höchstens in den Punkten $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ häufen. Ihm entspricht in $\mathfrak{S}'$ ein geschlossenes geodätisches Polygon $\mathfrak{P}'$. Da sich die Seiten von $\mathfrak{P}'$ höchstens im Punkte P' häufen und P' nicht auf x liegt, so haben nur endlich viele Seiten von $\mathfrak{P}'$ Punkte mit x gemein, und man kann annehmen, daß jede dieser Seiten x nur in endlich vielen Punkten trifft, da man sonst nur die Ecken von $\mathfrak{P}'$ ein wenig zu verschieben brauchte.

Wir konstruieren nun eine isotope Deformation von $\mathfrak{F}$, die außerhalb $\mathfrak{S}'$ die Identität ist, während sie $\mathfrak{S}'$ so deformiert, daß x' in $\mathfrak{P}'$ übergeht. Man braucht zu dem Zwecke nur $\bar{\mathfrak{S}}$ topologisch so auf sich abzubilden, daß der Rand punktweise fest bleibt, während die x' entsprechende Verbindungslinie von $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ in $\bar{\mathfrak{P}}$ übergeht. Diese topologische Abbildung läßt sich nach dem Tietzeschen Deformationssatze (vgl. Fußnote ¹¹) durch eine isotope Deformation bewirken.

Diese isotope Deformation findet zur Beseitigung unendlich vieler Schnittpunkte dann Anwendung, wenn im Kurvensystem Ω die Kurve y nicht vorkommt. Wenn dagegen x von einer bei T punktweise festen Geodätischen y in einem Punkte P geschnitten wird, so müssen wir etwas anders vorgehen. Es geht dann auch x' durch P ($= T(P) = P'$) hindurch. Wir umgeben wieder x mit einem schmalen Streifen $\mathfrak{S}$ und betrachten in diesem als Querlinie q ein Stück von y . q ist dann zugleich Querlinie in dem Bildstreifen $\mathfrak{S}'$ um x' . Durch P legen wir einen kurzen, ganz im Inneren von $\mathfrak{S}'$ verlaufenden geodätischen Bogen AB und verbinden A mit B durch ein geodätisches Polygon von endlich vielen Seiten, das im Inneren von $\mathfrak{S}'$ verläuft und q nicht trifft und das zusammen mit dem Bogen AB ein doppelpunktfreies geschlossenes geodätisches Polygon $\mathfrak{P}'$ ausmacht. Wir können $\mathfrak{P}'$ offenbar so wählen, daß es nur endlich viele Schnittpunkte mit x gemein hat. Danach können wir wie zuvor den Tietzeschen Deformationssatz anwenden.

Es kann sein, daß $g(x')$ mit $\mathfrak{A}_j$ Punkte, also endlich viele Bögen gemein hat. Es gibt dann sicher auch ein $\mathfrak{A}_j$, in das $g(x')$ gerade noch hineinragt, d. h. ein $\mathfrak{A}_j$, das einen Bogen mit $g(x')$ gemein hat, während alle $\mathfrak{A}_i$, die in $\mathfrak{A}_j$ enthalten sind, punktfremd zu $g(x')$ sind. Von den endlich vielen Bögen, die den Durchschnitt von diesem $\mathfrak{A}_j$ mit $g(x')$ ausmachen, nehmen wir den ersten bei positiver Durchlaufung von $g(x')$. Er heiße $\hat{w}'$, sein Anfangspunkt $\hat{P}$, sein Endpunkt $\hat{Q}$. Auf $g_j(x)$ begrenzen $\hat{P}$ und $\hat{Q}$ die Strecke $\hat{w}$. $\hat{w}$ und $\hat{w}'$ bilden zusammen den Rand eines Elementarflächenstückes $\hat{\mathfrak{E}}$.

Wir behaupten, daß $\hat{\mathfrak{E}}$ keine äquivalenten Punkte enthält. Angenommen, $\hat{\mathfrak{E}}$ enthielte zwei äquivalente Punkte. Dann führen wir durch eine Decktransformation den einen in den anderen über. $\hat{\mathfrak{E}}$ kann hierbei nicht auf einen echten Teilbereich von sich abgebildet werden, da es sonst innerhalb $\hat{\mathfrak{E}}$ einen Häufungspunkt äquivalenter Punkte gäbe. Daher muß der Rand des Bildes $\hat{\mathfrak{E}}_1$ den Rand von $\hat{\mathfrak{E}}$ treffen. Es muß also auf dem Rande von $\hat{\mathfrak{E}}$ mindestens ein Paar äquivalenter Punkte geben. Nun kann ein innerer Punkt von $\hat{w}'$ nicht äquivalent einem Punkte von $\hat{w}$ sein, da kein innerer Punkt von $\hat{w}'$ auf einer x -Geraden liegt. Ein innerer Punkt von $\hat{w}'$ kann aber auch nicht äquivalent einem anderen inneren Punkte von $\hat{w}'$ sein, da alsdann die Decktransformation, die den einen in den anderen überführt, $g(x')$ auf sich abbilden würde und damit $\hat{P}$ (oder $\hat{Q}$) in einen inneren Punkt von $\hat{w}'$, was aus demselben Grunde unmöglich ist wie soeben. — Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, daß zwei Punkte von $\hat{w}$ äquivalent sind. Angenommen, mindestens einer von ihnen sei ein innerer Punkt von $\hat{w}$. Die Decktransformation F , die den einen in den anderen überführt, verschiebt dann $g_j(x)$ in sich. Wenn nun F eine Gleitung (Transformation mit Erhaltung der Orientierung) wäre, also $\mathfrak{A}_j$ auf sich abbildete, so müßte $\hat{w}'$ von seinem Bilde in einem Punkte $\hat{G}$ getroffen werden. Das ist nicht möglich, weil dann ein innerer Punkt von $\hat{w}'$, nämlich $\hat{G}$ dem Punkte $F^{-1}(\hat{G})$ von $\hat{w}'$ äquivalent wäre, was bereits ausgeschlossen wurde. Ist dagegen F eine Gleitspiegelung, so kann man annehmen, daß $F(\hat{P})$ ein innerer Punkt von $\hat{w}$ ist — anderenfalls brauchte man nur F^{-1} statt F zu betrachten. Dann würde F den vor $\hat{P}$ gelegenen (unendlichen) Teilbogen von $g(x')$ in $\mathfrak{A}_j$ abbilden, und zwar würde dieser Teilbogen von einem uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{A}_j$ nach $F(\hat{P})$ führen, müßte also $\hat{w}'$ treffen, was der Doppelpunktfreiheit von x' widerspricht.

Bleibt der Fall auszuschalten, daß die Randpunkte $\hat{P}$ und $\hat{Q}$ äquivalent sind. In diesem Falle würde die Decktransformation, die $\hat{P}$ in $\hat{Q}$ überführt, zugleich $g_j(x)$ und $g(x')$ in sich transformieren; sie hätte also sowohl die

beiden uneigentlichen Punkte von $g_j(x)$ wie die von $g(x')$, die zugleich die von $g(x)$ sind, zu Fixpunkten, was unmöglich ist.

Also enthält $\mathfrak{E}$ keine äquivalenten Punkte und drückt sich daher in der Grundfläche $\mathfrak{F}$ in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$ mit den beiden Randbögen w und w' durch. Überdies ist $\mathfrak{E}$ punktfremd zu den Kurven $z_1, \dots, z_s$, weil diese punktfremd zu x und x' , also zu w und w' sind; und es ist $\mathfrak{E}$ punktfremd zu y , weil in $\mathfrak{F}$ eine y -Gerade nicht $\mathfrak{E}$ treffen kann. Eine solche müßte nämlich w' treffen, was nicht der Fall sein kann, weil wir bereits erreicht haben, daß die einzigen Schnittpunkte von $g(x')$ mit y -Geraden auf $g(x)$, also jedenfalls nicht in $\mathfrak{A}$, oder auf $g_j(x)$ liegen.

Wir können folglich in $\mathfrak{F}$ w' über w hinwegziehen, und zwar durch eine isotope Deformation, die auf eine beliebig kleine Umgebung von $\mathfrak{E}$ beschränkt bleibt, bei der also die Geodätischen $y, z_1, \dots, z_s$ punktweise festgelassen werden. Damit verschwinden alle Schnittpunkte von $g(x')$ mit dem Teilbogen $\widehat{w}$ von $g_j(x)$, also mindestens die beiden Schnittpunkte $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ (und ihre äquivalenten), während keine neuen Schnittpunkte hinzutreten.

Das Verfahren läßt sich solange fortsetzen, bis alle Schnittpunkte von $g(x')$ mit den x -Geraden $g_1(x), g_2(x), \dots$ beseitigt sind.

7. Es kann nun sein, daß nach Ausführung dieser Deformation $g(x')$ noch Punkte mit $g(x)$ gemein hat. Das ist sicher dann der Fall, wenn y -Geraden vorhanden sind oder wenn x einufrig ist. Sei $\widehat{P}$ einer dieser gemeinsamen Punkte und $\widehat{Q}$ der nächstfolgende auf $g(x')$. Einen solchen gibt es, weil $g(x)$ und $g(x')$, wenn sie einen Punkt gemein haben, auch alle dazu äquivalenten auf $g(x)$ gelegenen Punkte gemein haben. Bezeichnen wir den Bogen von $g(x')$ zwischen $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ wieder mit $\widehat{w}'$ und den von $g(x)$ zwischen denselben Punkten mit $\widehat{w}$, so bilden $\widehat{w}$ und $\widehat{w}'$ zusammen den Rand eines Elementarflächenstückes $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$ bezeichne die von $g(x)$ abgeschnittene Hälfte der hyperbolischen Ebene, die $\widehat{w}'$ enthält.

Wenn nun $\widehat{w}$ in seinem Inneren zwei äquivalente Punkte enthält, so gibt es im Inneren von $\widehat{w}$ einen Schnittpunkt mit $g(x')$. Denn durch die Decktransformation, die den einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ in den anderen verschiebt, muß entweder $\widehat{P}$ oder $\widehat{Q}$ in einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ übergehen; die Kurve $g(x')$, die von dieser Decktransformation ebenfalls auf sich abgebildet wird, muß also durch einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ in $\mathfrak{A}$ eintreten, und da sie $\widehat{w}'$ nicht treffen kann, muß sie auch durch einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ das Gebiet $\mathfrak{A}$ wieder verlassen. Also gibt es dann einen in $\mathfrak{A}$ verlaufenden Teilbogen von $g(x')$, der auf $g(x)$ eine kürzere Strecke abschneidet als $\widehat{w}'$. Liegen im Inneren dieser kürzeren Strecke von $g(x)$, die wir wieder mit $\widehat{w}$ bezeichnen, noch äquivalente Punkte, so können wir das neue $\widehat{w}$ durch ein

noch kürzeres ersetzen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangen wir, da die äquivalenten Punkte auf $g(x)$ einen festen kleinsten Abstand, nämlich die Länge von x haben, zu einem Bogen $\widehat{w}'$, der in $\mathfrak{U}$ liegt und auf $g(x)$ eine Strecke $\widehat{w}$ ohne innere äquivalente Punkte ausschneidet. $\widehat{w}$ und $\widehat{w}'$ begrenzen zusammen ein (abgeschlossenes) Elementarflächenstück $\widehat{\mathfrak{E}}$. Durch dieselben Schlüsse wie beim Schnitt von $g(x')$ mit $g_j(x)$ kann man zeigen, daß $\widehat{\mathfrak{E}}$ alsdann keine äquivalenten Punkte enthält, ausgenommen etwa die Punkte $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$. In jedem Falle drückt sich das Elementarflächenstück $\widehat{\mathfrak{E}}$ in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$ (unter Umständen mit identischen Ecken P und Q) nach $\mathfrak{F}$ durch, und man kann über dieses hinweg w' isotop in w deformieren.

8. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens kann man ganz x' auf x isotop deformieren und danach durch eine auf einen beliebig schmalen Streifen um x beschränkte letzte isotope Deformation x punktweise fest machen. Damit ist die im Hilfssatze behauptete isotope Deformation D als Produkt einer endlichen Anzahl isotoper Deformationen konstruiert.

9. Es bleibt nur noch der Fall zu erledigen, daß $g(x')$ punktfremd zu $g(x)$ ist, der übrigens nur eintreten kann, wenn die y -Kurve fehlt und x zweifrig ist. Diesen Fall führen wir auf den vorigen zurück durch eine passende isotope Deformation von $\mathfrak{F}$, etwa wie folgt. Sei $\widehat{X}$ ein Punkt auf der Geraden $g(x)$. Wir ziehen durch $\widehat{X}$ die zu $\dot{g}(x)$ senkrechte Gerade. Sie schneidet $g(x')$, da sie die hyperbolische Ebene in zwei Teile zerlegt, die beide Punkte von $g(x')$, nämlich die beiden uneigentlichen Punkte von $g(x)$ enthalten. Wir nehmen den zum Lotfußpunkte nächsten Schnittpunkt $\widehat{X}'$ mit $g(x')$. Das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ enthält keine äquivalenten Punkte⁹⁾. Folglich ist auch eine ganze Umgebung des Lotes frei von äquivalenten Punkten. Daher

⁹⁾ Daß das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ keine äquivalenten Punkte enthält, folgt so: Nach Voraussetzung haben $g(x)$ und $g(x')$ keinen eigentlichen Punkt der hyperbolischen Ebene gemein. Die beiden Kurven begrenzen also ein topologisches Zweieck, dessen zwei Ecken die beiden ihnen gemeinsamen uneigentlichen Punkte sind. Eine Decktransformation, die von zwei äquivalenten Punkten des Zweiecks den einen in den anderen überführt, läßt das Zweieck in eines übergehen, dessen Rand den Rand des ursprünglichen treffen muß. Es muß also bereits auf dem Rande ein Paar hinsichtlich dieser Decktransformation äquivalenter Punkte geben. Da nun ein Punkt von $g(x)$ nach Voraussetzung nicht äquivalent einem Punkte von $g(x')$ ist, so muß das Paar äquivalenter Punkte auf $g(x)$ oder auch auf $g(x')$ liegen. Eine Decktransformation, die einen Punkt von $g(x)$ in einen äquivalenten von $g(x)$ (oder einen von $g(x')$ in einen äquivalenten von $g(x')$) übergehen läßt, ist aber eine hyperbolische Decktranslation — der Fall der Einfrigkeit von x , in welchem es sich um eine Gleitspiegelung handeln würde, scheidet beim Fehlen von Schnittpunkten zwischen $g(x)$ und $g(x')$ aus. Eine solche Decktranslation verschiebt aber $g(x)$ in sich. Das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ geht dabei in ein anderes Lot von $g(x)$ über, es liegen also auf ihm keine äquivalenten Punkte.

kann man den Grundpunkt X' von $\widehat{X}$ längs der Grundkurve des Lotes durch eine isotope Deformation von $\mathfrak{F}$ in den Punkt X und sogar darüber hinaus ziehen. Die isotope Deformation kann man offenbar so leiten, daß dabei genau zwei Schnittpunkte von x' mit x entstehen. Außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung des Lotes XX' ist die Deformation die Identität. Sie berührt daher die etwa vorhandenen z -Kurven nicht. Denn keine z -Kurve kann das Lot XX' schneiden, da ihr in $\widehat{\mathfrak{F}}$ eine z -Gerade entspräche, die das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ träge. Eine solche müßte aber $g(x')$ durchsetzen, im Widerspruch zu 1. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Wir ziehen auf der orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ von der positiven Charakteristik N $N + 2$ Rückkehrschnitte

(R) $a_1, \dots, a_{N+2}$

von der folgenden Beschaffenheit:

I. Zwei aufeinanderfolgende Rückkehrschnitte der Folge (R) durchsetzen einander in genau einem Punkte,

II. zwei nicht aufeinanderfolgende Rückkehrschnitte sind punktfremd,

III. $\mathfrak{F}$ geht nach Aufschneiden längs der Rückkehrschnitte in ein Polygon $\mathfrak{P}$, nämlich ein $(4N + 4)$ -Eck über¹⁰). Die Fig. 2 bis 4 zeigen die Lage der Rückkehrschnitte an einigen Beispielen; es ist $N = 2(h - 1)$ bzw. $N = k - 2$, wenn h die Henkelzahl der orientierbaren, k die Kreuzhaubenzahl der nichtorientierbaren Fläche ist¹¹). Die $N + 2$ Rückkehrschnitte sind stark ausgezogen. — Daß ein Rückkehrschnitt doppelpunktfrei ist, liegt übrigens schon in seiner Definition.

Wir realisieren $\mathfrak{P}$ durch ein regelmäßiges $(4N + 4)$ -Eck der hyperbolischen Ebene mit lauter rechten Winkeln. Das ist möglich wegen $N > 0$. Durch paarweises Identifizieren äquivalenter Seiten schließt sich $\mathfrak{P}$ zur Fläche $\mathfrak{F}$. Da hierbei die Ecken von $\mathfrak{P}$ zu je vieren äquivalent werden, so schließen sich je vier Zipfel des Polygons zu einem Vollwinkel zusammen. Die entstehende Fläche $\mathfrak{F}$ ist daher mit überall konstanter negativer Krümmung ausgestattet. Die Fig. 5 zeigt das Polygon $\mathfrak{P}$ für die orientierbare Fläche der Charakteristik $N = 2$ (Henkelzahl $h = 2$).

¹⁰) Das entstehende Zellsystem hat $e = \alpha^0 = N + 1$ Ecken, $k = \alpha^1 = 2N + 2$ Kanten, $f = \alpha^2 = 1$ Flächenstücke. Es ist regelmäßig, da mit jeder Ecke $\alpha^0 = 4$, mit dem Flächenstücke $\alpha^2 = 4N + 4$ Kanten inzident sind. In der Aufzählung regelmäßiger Zellsysteme bei W. Threlfall, Gruppenbilder [Abh. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. 41, Nr. 6 (1932)], ist es Nr. 7 der Tabelle von S. 46.

¹¹) In Fig. 3 und 4 sind, soweit möglich, je 2 Kreuzhauben in 1 Henkel verwandelt (vgl. S.-T. S. 139), so daß höchstens 1 Kreuzhaube bzw. 1 nichtorientierbarer Henkel vorkommt.

Es sei nun eine topologische Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$ gegeben, bei der $a_1, \dots, a_{N+2}$ in homotope Kurven übergehen. Wir setzen dann $a_1 = x$ und

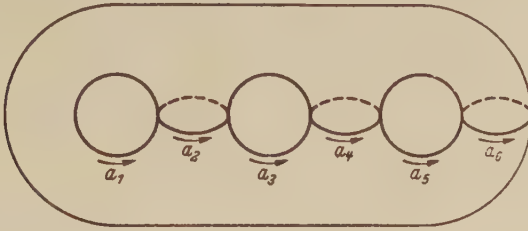


Fig. 2. $N = 4; h = 3$ (3 orientierbare Henkel).

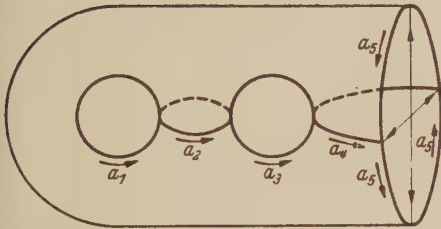


Fig. 3. $N = 3; k = 5$ (2 orientierbare Henkel, 1 Kreuzhaube).

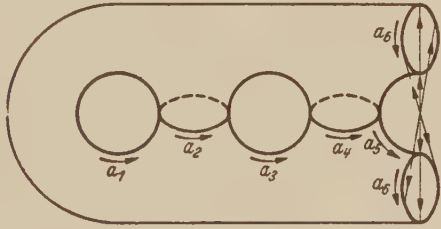


Fig. 4. $N = 4; k = 6$ (2 orientierbare, 1 nichtorientierbarer Henkel oder Kleinscher Schlauch).

wenden den Hilfssatz an; die Kurven $y, z_1, \dots, z_s$ fehlen in diesem Falle. Es gibt danach eine isotope Deformation D_1 , deren Produktabbildung mit T , $D_1 T$ (erst T , dann D_1 ausüben!) den Rückkehrschnitt a_1 punktweise fest läßt. Nunmehr setzen wir $a_2 = x$, $a_1 = y$. Nach dem Hilfssatze, der auf die Abbildung $D_1 T$ angewendet wird, gibt es eine isotope Deformation D_2 derart, daß $D_2 D_1 T$ die Rückkehrschnitte a_1 und a_2 punktweise fest läßt. Hat man die Deformationen $D_1, D_2, \dots, D_i$ bereits so konstruiert, daß die topologische Selbstabbildung $D_i \dots D_2 D_1 T$ die Rückkehrschnitte $a_1, \dots, a_i$ punktweise fest läßt ($2 \leq i \leq N + 1$), so setzen wir $a_{i+1} = x$, $a_i = y$, $a_1 = z_1, \dots$, $a_{i-1} = z_{i-1}$ ($i - 1 = s$) und erhalten durch Anwendung des Hilfssatzes auf die topologische Selbstabbildung $D_i \dots D_2 D_1 T$ eine isotope Deformation

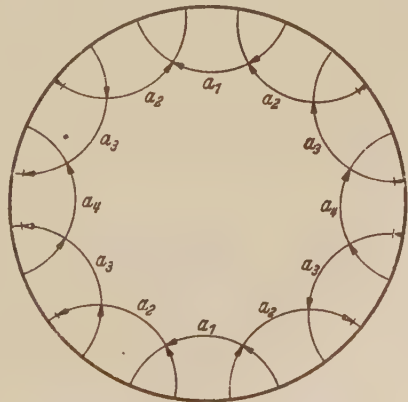


Fig. 5. $N = 2, h = 2$ (2 orientierbare Henkel).

auf die topologische Selbstabbildung $D_i \dots D_2 D_1 T$ eine isotope Deformation

D_{i+1} derart, daß $D_{i+1}D_i \dots D_2D_1T$ die Rückkehrschnitte $a_1, \dots, a_{i+1}$ punktweise fest läßt. Schließlich ergibt sich eine alle Rückkehrschnitte $a_1, \dots, a_{N+2}$ punktweise festlassende topologische Selbstabbildung $D_{N+2} \dots D_1T$ von $\mathfrak{F}$. Diese Abbildung bildet das Polygon $\mathfrak{P}$ topologisch auf sich ab bei punktweise festem Rande. Nach dem Tietzeschen Deformationssatze¹²⁾ ist diese Abbildung eine isotope Deformation D . Somit ist

$$T = D_1^{-1} \dots D_{N+2}^{-1} D$$

eine isotope Deformation, was zu beweisen war.

§ 3.

Beweis von Satz 2.

Wir beweisen jetzt Satz 2, wonach jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ durch eine topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirkt werden kann¹³⁾.

Daß jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe sich durch eine stetige, nicht notwendig eindeutige Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirken läßt, ist leicht zu beweisen¹⁴⁾. Andererseits läßt sich eine stetige Selbstabbildung einer Fläche $\mathfrak{F}$ der Charakteristik $N > 0$ nach H. Kneser¹⁵⁾ durch homotope Deformation von $\mathfrak{F}$ entweder in eine topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ deformieren oder in eine Abbildung, bei der ein Gebiet überhaupt frei bleibt.

Zum Beweise von Satz 2 für Flächen der Charakteristik $N > 0$ brauchen wir demnach nur zu zeigen: Die Annahme, daß ein Automorphismus $\mathfrak{I}(\mathfrak{G})$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ durch eine solche stetige Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$ bewirkt wird, bei der ein Gebiet von $\mathfrak{F}$ überhaupt frei bleibt, führt zu einem Widerspruche¹⁶⁾.

Zu diesem Zwecke denken wir uns $\mathfrak{F}$ zum Poincaréschen Fundamentalpolygone aufgeschnitten; es hat bekanntlich $e = 1$ Ecken, $k = N + 2$ Kanten, $f = 1$ Flächenstücke. Wir deformieren die stetige Abbildung zu-

¹²⁾ Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich bei J. W. Alexander, On the deformation of an n -cell, Proc. Nat. Academy of Sciences 9 (1923), S. 406.

¹³⁾ Vgl. auch H. Seifert, Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen, Abh. Math. Sem. Hansische Univ. 12 (1937), S. 29.

¹⁴⁾ H. Hopf, Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen, Journ. f. Math. 165 (1931), S. 225.

¹⁵⁾ H. Kneser, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, Math. Annalen 103 (1930), S. 347.

¹⁶⁾ Diese Aussage ist in dem allgemeineren Satze von H. Hopf¹⁴⁾ (l. c. Satz VIb) enthalten: Wird durch die Selbstabbildung T der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ die Homologiegruppe der Dimension 1 isomorph auf sich abgebildet, so ist der Abbildungsgrad von T nicht Null.

nächst homotop so, daß die einzige Ecke Fixpunkt wird. Diese Deformation kann man offenbar auf ein so kleines Gebiet beschränken, daß auch die deformierte Abbildung noch ein Gebiet von $\mathfrak{F}$ von Bildpunkten frei läßt. Wir deformieren jetzt die neue stetige Abbildung weiter homotop in eine Abbildung $T'(\mathfrak{F})$, indem wir (in der aufgeschnittenen Fläche) von einem inneren Punkte dieses freien Gebietes aus alle Bildpunkte auf den Kantenkomplex des Fundamentalpolygons projizieren: $T'(\mathfrak{F})$ führt dann die Kanten

$$(1) \quad a_1, \dots, a_{N+2}$$

des Fundamentalpolygons in gewisse stetige Bilder

$$(1') \quad a'_1, \dots, a'_{N+2}$$

über, die auf dem ursprünglichen Kantenkomplex liegen. Die Kurven (1) sowohl wie (1') sind geschlossene Wege (stetige Bilder der Kreislinie); Anfangs- und Endpunkt von allen ist die feste Ecke des Fundamentalpolygons.

Ist $R(a_1, \dots, a_{N+2}) = 1$, wofür wir abkürzend auch schreiben $R(a_r) = 1$, die Relation der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$, so besteht, da durch stetige Abbildung die Relation nicht zerstört wird, zwischen den Bildwegen die Relation $R(a'_1, \dots, a'_{N+2}) = 1$. Nun ist a'_r ein gewisses Produkt $p_r(a_u)$ in den Erzeugenden (1) von $\mathfrak{G}$. Da die Fundamentalgruppe des Kantenkomplexes die freie Gruppe in den $N+2$ Erzeugenden (1) ist¹⁷⁾, muß $R(p_1, \dots, p_{N+2}) = 1$ identisch in den Erzeugenden (1) gelten.

Wir haben also den folgenden gruppentheoretischen Sachverhalt: In der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Erzeugenden (1) und der Relation $R(a_r) = 1$ ist ein Automorphismus $a_r \rightarrow a'_r = p_r(a_u)$ gegeben, für den die Identität $R(p_r(a_u)) = 1$ gilt. Daraus folgern wir nun den Widerspruch, daß $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe, also nicht die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{F}$ ist.

Um das zu zeigen, betrachten wir die freie Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der $N+2$ Erzeugenden A_r und die Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}^*$, die von den Elementen $A'_r = p_r(A_u)$ erzeugt wird. Durch $A_r \rightarrow a_r$ ist eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ gegeben. Damit wird zugleich eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ gegeben durch die Zuordnung $A'_r = p_r(A_u) \rightarrow a'_r = p_r(a_u)$. Es sei nun $w(A'_r)$ ein Element von $\mathfrak{U}$, das bei diesem Homomorphismus in das Einselement von $\mathfrak{G}$ übergeht: $w(A'_r) \rightarrow w(a'_r) = 1$. Da zwischen den a'_r die eine Relation $R(a'_r) = 1$ besteht, so läßt sich $w(a'_r)$ durch triviale Umformungen in ein Produkt von Transformaten von $R(a'_r)$ und $R(a'_r)^{-1}$ überführen. Ebenso läßt sich $w(A'_r)$ in ein solches Produkt überführen, das mit $W(A'_r)$ bezeichnet sei. Da nun $R(A'_r) = R(p_r(A_u))$ identisch $= 1$ ist, so ist $R(A'_r)$ und damit auch $W(A'_r)$ und schließlich $w(A'_r)$ das Einselement

¹⁷⁾ S.-T., S. 169, 170.

von $\mathcal{U}$. Es geht also nur das Einselement von $\mathcal{U}$ in das Einselement von $\mathcal{G}$ über. Die Gruppen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{G}$ sind somit isomorph. $\mathcal{U}$ ist aber als Untergruppe einer freien Gruppe selbst eine freie Gruppe.

Damit ist der Widerspruch hergestellt und Satz 2 für Flächen der Charakteristik $N > 0$ bewiesen.

Bei Flächen der Charakteristik $N = 0$ kennt man alle Automorphismen der Fundamentalgruppe und kann zu jedem eine topologische Selbstabbildung angeben, die ihn erzeugt. Im Falle der orientierbaren Ringfläche werden die Automorphismen durch die ganzzahligen unimodularen Substitutionen der beiden Erzeugenden der Fundamentalgruppe gegeben, die die freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden ist, die zugehörigen topologischen Selbstabbildungen durch die entsprechenden Gitterabbildungen der über die euklidische Ebene ausgebreiteten universellen Überlagerungsfläche. — Für die nichtorientierbare Ringfläche lassen sich die Automorphismen der Fundamentalgruppe und die zugehörigen topologischen Selbstabbildungen ebenfalls angeben¹⁸⁾. — Für Kugel und projektive Ebene ist der Satz 2 trivial.

¹⁸⁾ J. Nielsen, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen, Math. Annalen 82 (1921), S. 83.

(Eingegangen am 5. April 1938.)

Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. III.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Dritter Teil:

Ergänzungen.

Kürzlich habe ich in dieser Zeitschrift¹⁾ eine an die transformierbaren automorphen Funktionen anknüpfende Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen gegeben. Die engeren Voraussetzungen waren die, daß die Koeffizienten der quadratischen Form einem Zahlkörper angehören, der nur Hauptideale besitzt, und die reproduzierende Gruppe der Formen in der Ebene diskontinuierlich ist. Von dem Klassenzahlsatz (Teil II, 5) erwähnte ich bereits in der Einleitung von Teil I, daß dieser auf den Fall eines beliebigen Zahlkörpers ausgedehnt werden kann. Aber auch andere Sätze lassen diese Verallgemeinerung zu. Im folgenden wird für den Satz 13 über die Grundformen und für den Satz 12 über den hyperbolischen Inhalt des Fundamentalbereichs der reproduzierenden Gruppe, ferner für den Satz 21 über die Transformationskorrespondenzen die allgemeine Formulierung gegeben. Die Begründung erfolgt in der Weise, daß allenthalben Elementartransformationen, die nur verwendbar sind, wenn im Zahlkörper die Teilbarkeit der natürlichen Zahlen gilt, durch allgemeinere Transformationen ersetzt werden.

1. Die Grundformen.

Sei $f(x_1, x_2, x_3)$ eine ternäre quadratische Form, deren Koeffizienten ganze Zahlen aus einem beliebigen algebraischen Zahlkörper K_λ vom Grade λ und der Klassenzahl h sind. Alsdann hat man anzunehmen, daß die Koeffizienten einen größten gemeinsamen Idealteiler $\mathfrak{t}$ aus K_λ besitzen, der als der Teiler von f zu bezeichnen ist. Ist $\mathfrak{t}'$ ein zu $\mathfrak{t}$ äquivalentes Ideal, so gibt es eine rationale Zahl r aus K_λ , so daß $\mathfrak{t}' = r\mathfrak{t}$ ist, und $f' = rf$ ist eine Form mit dem Teiler $\mathfrak{t}'$. Eine Invariante bezüglich dieser Operation ist das Ideal

$$(1) \quad \mathfrak{d} = (D) : \mathfrak{t}^3 \quad \left(D = -\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| \right).$$

¹⁾ Math. Zeitschr. 43 (1937), S. 161—204 und 321—352 als Teil I und II zitiert.

Die Ideale (D) und t bleiben auch invariant, wenn die Form einer linearen Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten aus K_λ unterworfen wird, deren Determinante eine Einheit ε aus K_λ ist. Daher ist $\mathfrak{d}$ eine Invariante aller dieser Operationen. Zu beachten ist, daß durch diese Operationen die Zahl D in jedes εD übergeführt werden kann, so daß durch die Zahlen εD keine Einteilung der Formensysteme mit der Invariante $\mathfrak{d}$ gegeben wird. Das Ideal $\mathfrak{d}$ sei als Diskriminantenideal von f bezeichnet.

Nach diesen Vorbereitungen kann die Verallgemeinerung des Satzes über die Grundformen so formuliert werden:

Satz 25. *Aus jeder Form f mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ läßt sich, wenn die Klassenzahl h von K_λ nicht durch 3 teilbar ist, durch eine lineare Transformation mit Koeffizienten aus K_λ eine Form f' ableiten, deren Diskriminantenideal $\mathfrak{d}'$ jeden Primidealteiler nur einfach enthält und ein Teiler von $\mathfrak{d}$ ist.*

Bei $h = 1$ kann man folgendermaßen verfahren: f wird als primitive Form angenommen und q sei ein Primteiler von D , der in D mehrfach aufgeht.

Fall I. Durch unimodulare Transformation läßt sich erreichen, daß die Koeffizienten von $x_1 x_3$, $x_2 x_3$, x_3^2 in f durch q^2 teilbar sind. Die Elementartransformation

$$(2) \quad x_1 = q x'_1, \quad x_2 = q x'_2, \quad x_3 = x'_3$$

scheidet q^2 als Faktor aus der Form und D reduziert sich auf $D : q^2$.

Fall II. Wenn Fall I nicht eintritt, lassen sich sämtliche Koeffizienten bis auf den von x_1^2 durch q teilbar machen. Die Elementartransformation

$$(3) \quad x_1 = q x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3$$

scheidet q aus der Form und D reduziert sich auf $D : q$.

Im Falle $h > 1$ tritt an die Stelle von q ein Primidealteiler $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{d}$, der in $\mathfrak{d}$ mehrfach aufgeht. Zuzufolge der Voraussetzung $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus K_λ , dessen dritte Potenz mit $\mathfrak{q}$ äquivalent ist. Im Falle I tritt an Stelle von (2) eine allgemeine Substitution

$$(4) \quad x_i = \alpha_i x'_1 + \beta_i x'_2 + \gamma_i x'_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

mit der Determinante Δ derart, daß $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch $\mathfrak{q} \mathfrak{a}^{h-2}$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ durch $\mathfrak{a}^{h-2}$ teilbar sind. Da $\mathfrak{a}^{3h-6} \mathfrak{q}^2$ ein Hauptideal ist, kann $(\Delta) = \mathfrak{a}^{3h-6} \mathfrak{q}^2$ gesetzt werden. Alsdann hat f' den Teiler $t' = t \mathfrak{a}^{3h-4} \mathfrak{q}^2$ und $\mathfrak{d}$ reduziert sich auf $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} : \mathfrak{q}^2$. Im Falle II ist an Stelle von (3) eine entsprechende Substitution anzusetzen, und Satz 25 ist bewiesen.

Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ läßt sich das Verfahren nur auf die Ideale $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{a}^3$ anwenden. Ein Ideal, das in $\mathfrak{d}$ mehrfach aufgeht, läßt sich aber dadurch aus $\mathfrak{d}$ zweifach oder einfach entfernen, daß in das Diskriminantenideal

ein fremdes Ideal einfach hineingenommen wird. Sei wiederum q ein Primideal, das in $\mathfrak{d}$ mehrfach aufgeht. Für den Fall I bestimme man ein nicht in $\mathfrak{d}$ aufgehendes Primideal $q_0 \sim q^{-1}$ und wähle f so, daß der Koeffizient von x_3^2 durch q_0 teilbar ist. Alsdann suche man eine Substitution nach (4), in der $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch $q_0 q$ teilbar sind und setze $(\Delta) = (q_0 q)^2$. Im Falle II bestimme man ein nicht in $\mathfrak{d}$ aufgehendes Primideal $q_0 \sim q^{-2}$, wähle f so, daß der Koeffizient von x_3^2 durch q_0 teilbar ist, und mache $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch $q_0 q^2$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch $q_0 q$, ferner $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ durch q teilbar und setze $(\Delta) = q_0^2 q^4$. Durch Zusammenlegen dieser Operationen in eine läßt sich ferner erreichen, daß nur ein einzelnes Primideal q_0 in $\mathfrak{d}$ einfach hineingenommen wird.

Eine Form f , deren Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ jeden Teiler nur einmal enthält, wird als Grundform bezeichnet²⁾. Hat die Grundform f den Teiler t , so hat die Adjungierte F den Teiler t^2 . Unter den Zahlen, die F darstellt, gibt es Zahlen A derart, daß $(A) : t^2$ prim zu $2\mathfrak{d}$ ist und jeden Primteiler nur einmal enthält. Alsdann stellt f eine binäre Form (n_0, n_1, n_2) mit der Diskriminante A und dem Teiler t dar. Um den Anschluß an die Bilinearformen Φ zu gewinnen, setze man nach I, (121)

$$(5) \quad f = n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + x_3 (x_2 b_1 - x_1 b_2) + c_0 x_3^2.$$

Die Aufstellung der Elemente der Gruppe Γ von f hängt nach I, (112), (122) von der Auflösung der diophantischen Gleichung

$$(6) \quad (\alpha + \delta)^2 - F(t_2, u_1, u_2) = 4$$

ab. Eine von dem willkürlichen Teiler t^2 unabhängige Gesamtheit von Lösungen wird erhalten, wenn t_2, u_1, u_2 dem Ideal t^{-1} entnommen werden, also im allgemeinen nicht mehr ganze Zahlen sind. Da die Zahl $\omega = \frac{1}{2}(n_0 + \sqrt{A})$ den Teiler t hat, werden die Zahlen in I, (110)

$$(7) \quad t = t_1 + \omega t_2, \quad n_0 u = n_0 u_1 + \omega u_2$$

ganze algebraische Zahlen aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, wenn t_1 eine ganze Zahl aus K_λ bleibt. Wir setzen nunmehr

$$(8) \quad (n_0, \omega) = t j_0.$$

Alsdann bedeutet, wie in I, (39), j_0 ein Ideal aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, das keinen Ideal-

²⁾ Zu den von H. Brandt, Jahresbericht d. D. M. V. 47 (1937), S. 149, definierten Stammformen gelangt man, wenn durch weitere Reduktionen sämtliche „Spalter“ aus der Diskriminante entfernt werden. In Anbetracht, daß erst durch die reproduzierenden Gruppen der Grundformen die Gruppen sämtlicher transformierbarer automorpher Funktionen als Kongruenzuntergruppen dargestellt werden können, ist es jedoch für diese Untersuchung zweckmäßig, bei den Grundformen zu verbleiben.

teiler aus K_λ enthält, und $n_0 u$ in (7) gehört diesem Ideal an. Die Formel für die Substitutionen von Γ lautet nach I, (124)

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -c_0 n_0 \bar{u} - \bar{b}(t - \bar{i}) : \sqrt{A} \\ u & \bar{i} - (\bar{b}u - \bar{b}\bar{u}) : \sqrt{A} \end{pmatrix} \quad (b = n_0 b_1 + \omega b_2),$$

wobei

$$(10) \quad t\bar{t} + c_0 n_0 u\bar{u} + (bt\bar{u} - \bar{b}\bar{t}u) : \sqrt{A} = 1$$

ist. Da b durch $t^2 j_0$ und c_0 durch t teilbar ist, werden α und δ ganze Zahlen aus $K_\lambda (\sqrt{A})$ und β eine Zahl aus $t j_0$, während $\gamma = u$ dem Ideal $(t j_0)^{-1}$ angehört.

2. Die Bilinearformen.

Bei den Bilinearformen

$$(11) \quad \Phi = ax\bar{x} + cy\bar{y} + (bx\bar{y} - \bar{b}x\bar{y}) : \sqrt{A}$$

hat man wie in (10) anzunehmen, daß b durch $t^2 j_0$ und c durch $t n_0 = t^2 j_0 \bar{j}_0$ teilbar ist. Der größte gemeinsame Idealteiler aus K_λ von $a, b : t^2 j_0, c : t^2 j_0 \bar{j}_0$ ist als Teiler von Φ zu bezeichnen. Sei dieser s , so ist a durch s , b durch $st^2 j_0$, $\bar{b}$ durch $st^2 \bar{j}_0$, c durch $st^2 j_0 \bar{j}_0$ teilbar. Wie zuvor läßt sich ein Diskriminantenideal

$$(12) \quad \mathfrak{d} = (Dn_0) : s^2 t^4 j_0 \bar{j}_0 \quad (Dn_0 = b\bar{b} + acA)$$

definieren. Es seien A, t, s prim zu $2\mathfrak{d}$, ferner soll $(A) : t^2$ keinen Teiler mehrfach enthalten, indessen wird für $\mathfrak{d}$ diese Beschränkung aufgehoben. Die Formen Φ werden durch binäre Substitutionen nach I, Abschnitt 2 transformiert, bei denen α und δ ganze Zahlen aus $K_\lambda (\sqrt{A})$, β eine Zahl aus $t j_0$ und γ eine Zahl aus $(t j_0)^{-1}$. Es ist aber nicht zweckmäßig, die Gruppe der unimodularen Substitutionen durch solche zu erweitern, deren Determinante eine Einheit aus $K_\lambda (\sqrt{A})$ ist. Gegenüber diesen Substitutionen ist die Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A nach I, (57) nicht mehr invariant. Zudem ergibt sich bei Einführung der Bedingungen für Diskontinuität der reproduzierenden Gruppe in der Ebene, daß, je nachdem A positiv oder negativ ist, zu einem System von Grundeinheiten aus K_λ nur eine oder keine Einheit aus $K_\lambda (\sqrt{A})$ hinzutritt³⁾. Daher werde das zu untersuchende Formensystem, wie in Teil I, durch die Zahl D , die binäre Form (n_0, n_1, n_2) und die Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A , ferner durch die Teiler s und t charakterisiert. Beim Übergang zu einer äquivalenten binären Form (n'_0, n'_1, n'_2)

³⁾ Für den Fall $(A) : t^2 = 1$ wird $K_\lambda (\sqrt{A})$ ein unverzweigter Relativkörper, da A quadratischer Rest von 4 ist. $A = 1$ betrifft die Modulfunktion und scheidet aus.

besteht $j'_0 = r j_0$, wobei r eine rationale Zahl aus $K_\lambda (\sqrt{A})$ mit der Relativnorm $n'_0 : n_0$ ist. Die Form Φ in (11) ist alsdann durch

$$(13) \quad x = x', \quad y = \bar{r} y'$$

zu transformieren und man erhält $b' = r b$, $c' = c n'_0 : n_0$.

Eine ganze Zahl m aus K_λ läßt sich durch Φ nur darstellen, wenn diese den Teiler s hat. Von den darstellenden Zahlen $x = \alpha$, $y = \gamma$ ist α eine ganze Zahl aus $K_\lambda (\sqrt{A})$ und γ eine Zahl aus dem Ideal $(t_1 j_0)^{-1}$. Nunmehr ist auch der Fall der uneigentlichen Darstellungen in Betracht zu ziehen, bei welchen (α) und $(\gamma) t_1 j_0$ einen gemeinsamen Idealteiler aus K_λ besitzen. Aber auch dieser Fall läßt sich mit Hilfe der erweiterten Theorie der Darstellung einer Zahl durch die Form Φ nach I. Abschn. 3 behandeln. Der größte gemeinsame Teiler von (α) und $(\gamma) t_1 j_0$ sei $r j$, indem r der größte Teiler aus K_λ bedeutet. Sei m prim zu $\mathfrak{d}$. Als dann beträgt die Anzahl der Darstellungs-klassen der Zahl m

$$(14) \quad N \left(\frac{m}{s r^2} \right) \cdot \Pi \left(1 + \frac{1}{N(q)} \right),$$

wobei das Produkt auf sämtliche voneinander verschiedenen Primidealteiler von $(m) : s r^2$ sich bezieht.

Wie in I. Abschn. 5 läßt sich die Formel für die reproduzierende Gruppe der Formen Φ_a , bei denen $(b) : t_2^2 j_0$ durch a teilbar ist⁴⁾, allgemein aufstellen, und zwar ist in die Formel I, (105) für u eine Zahl aus $(s t_1 j_0)^{-1}$ einzusetzen. Vermittels der Substitution $\zeta = \zeta' : a$ nach I, (123) läßt sich die Isomorphie dieser Gruppe mit der Gruppe I' nur bei $s = 1$ nachweisen. Aber die Isomorphie zweier demselben s angehöriger Gruppen ist auf diesem Wege noch nachweisbar. Der allgemeine Beweis ist der Theorie der ternären Formen zu entnehmen und wird durch eine Transformation der Gruppe mittels F nach I. Abschn. 6 vorbereitet. Wir schreiben ausführlich

$$(15) \quad F = A t_2^2 - 2 t_2 (b \bar{u} + b u) + (b \bar{u} - b u)^2 A^{-1} - 4 a c u u.$$

Da a , $(b) : t_2^2 j_0$, $(c) : t_2^2 j_0 \bar{j}_0$ den Teiler s haben, wird F die Adjungierte einer Form f mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d} s^2$. Damit F genau den Teiler t^2 besitzt, sei s prim zu A . Für u_1 und u_2 sind Zahlen aus $(s t)^{-1}$ zu setzen, während t_2 eine Zahl aus t^{-1} bleibt. Dennoch wird F eine ganze Zahl. Bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ läßt sich wie in (4) eine Substitution

$$(16) \quad \begin{aligned} t_2 &= \alpha_0 t'_2 + \beta_0 u'_1 + \gamma_0 u'_2, \\ u_i &= \alpha_i t'_2 + \beta_i u'_1 + \gamma_i u'_2 \end{aligned} \quad (i = 1, 2)$$

mit der Determinante A ansetzen, in der α_0 , β_0 , γ_0 durch $s a^{h-1}$ und α_i , β_i , γ_i

⁴⁾ Für diese Formen ist $\mathfrak{d}$ durch $a : s$ teilbar und zufolge der Voraussetzung über s wird a prim zu $s \mathfrak{d} : a$.

durch a^{h-1} teilbar sind, und $(\Delta) = s a^{3h-3}$ ist, wobei $a^3 \sim s$ besteht. Als dann hat F' den Teiler $t'^2 = (ts a^{h-1})^2$ und t'_2, u'_1, u'_2 gehören dem Ideal t'^{-1} an. Wenn andererseits für t'_2, u'_1, u'_2 Zahlen aus t'^{-1} gesetzt werden, erhält man aus (16) für u_1 und u_2 Zahlen aus $(st)^{-1}$ und für t_2 eine Zahl aus t^{-1} . Die Transformation ergibt eine Form F' , die einer Form f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ adjungiert ist und zu $2\mathfrak{d}$ prime Zahlen A darstellt. Es folgt der

Satz 26. Die reproduzierende Gruppe einer Form Φ_a mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ ist bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ der Gruppe Γ einer ternären Form f mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$, deren Adjungierte F zu $2\mathfrak{d}$ prime Zahlen A darstellt, isomorph.

Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ ist die Transformation nur ausführbar, wenn $s \sim a^3$ ist. Indessen wird auch dieser Fall bei Zusammensetzung mit einer anderen Operation zugänglich.

Der Beweis des Klassenzahlsatzes 10 verläuft in derselben Weise. Infolge der allgemeineren Voraussetzung über $\mathfrak{d}$ ist zu I, Abschn. 10 einiges nachzutragen. Von zwei Formen $\Phi(a, b, c)$ und $\Phi(a', b', c')$ desselben Formensystems ist nachzuweisen, daß sie binäre Formen vom gleichen Geschlecht enthalten. Es darf vorausgesetzt werden, daß s der größte Teiler von a und a' ist und aa' total positiv und prim zu $\mathfrak{d}$. Nach I, (179), (180) geht man zu Formen

$$(17) \quad \Phi(a, b'', m_0 n_0 a'), \quad \Phi(a', b'', m_0 n_0 a')$$

über und durch die Substitution nach I, (181)

$$(18) \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \xi, \quad y_1 = v_1 \eta, \quad y_2 = v_2 \eta,$$

in der v_1 und v_2 Zahlen aus t^{-1} sind, zu binären Formen in ξ und η vom Teiler s und derselben Determinante

$$(19) \quad d = (v_1 b_2'' - v_2 b_1'')^2 - 4aa'm_0(n_0 v_1^2 + n_1 v_1 v_2 + n_2 v_2^2).$$

Wenn die Formen (17) so gewählt werden, daß $b'' : j_0$ prim zu $2\mathfrak{d}$ ist, so läßt sich zeigen, daß (19) in v_1 und v_2 eine binäre Form vom Teiler $(st)^2$ wird. Da s, t und der gemeinsame Teiler von b_1'' und b_2'' prim zu 2 sind, ist der Teiler von (19) jedenfalls prim zu zwei und daher als der größte gemeinsame Teiler derjenigen Unterdeterminanten von

$$(20) \quad \begin{vmatrix} 2n_0 & n_1 & -b_2'' \\ n_1 & 2n_2 & b_1'' \\ -b_2'' & b_1'' & 2aa'm_0 \end{vmatrix} = -2D$$

gegeben, die den Koeffizienten $2aa'm_0$ enthalten. Es werde angenommen, daß diese Unterdeterminanten durch ps^2t^2 teilbar seien, wenn p ein Primideal aus K_1 bedeutet. Die Ideale s und t seien so gewählt, daß p in diesen nicht aufgeht. Wenn $aa'm_0$ durch p teilbar ist, so geht p auch in b_1'' und b_2''

auf. Alsdann würde p auch in $\mathfrak{d}$ aufgehen entgegen der Annahme, daß $b'' : j_0$ prim zu $\mathfrak{d}$ ist, und es bleibt nur der Fall übrig, daß sämtliche Unterdeterminanten von (20) durch p teilbar sind. Dies widerspricht der Annahme, daß A prim zu $\mathfrak{d}$ ist, und die Form (19) hat den Teiler $s^2 t^2$. Es gibt sodann Zahlenwerte v_1 und v_2 aus t^{-1} , die $(d) : s^2$ zu einem Primideal machen, und es folgt, daß zwei Formen desselben Formensystems binäre Formen vom gleichen Geschlecht enthalten. Daraus ergibt sich in derselben Weise wie in I, Abschn. 10 der Satz, daß jedes Geschlecht des Formensystems nur eine Klasse äquivalenter Formen hat. Die Geschlechter sind durch die Vorzeichen der zu Φ konjugierten definiten Formen gegeben und ihre Anzahl beträgt $2^{\lambda-1}$ bei Diskontinuität der reproduzierenden Gruppe in der Ebene.

Bei der Berechnung des hyperbolischen Inhalts des Fundamentalbereiches der Gruppe gibt die Dirichletsche Methode den Ansatz

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{h \cdot 2^{\lambda-1}} \sum \frac{N(s_i)^s}{N(\Phi_i)^s} = 2^{\lambda} \prod_{r=0}^{\infty} \frac{N(q)^{r+1} - 1}{N(q)^{rs} (N(q) - 1)}.$$

Bei der ersten Summation auf der linken Seite sind auch uneigentliche Darstellungen der zu $\mathfrak{d}$ primen Zahlen durch Φ zu berücksichtigen. Die zweite Summation bezieht sich auf die Geschlechter eines Formensystems und innerhalb jeden Geschlechtes auf ein System von Teilern s_i von Φ_i , welches sämtliche h Klassen von K_{λ} repräsentiert. In der Gleichung

$$(22) \quad (D) = \mathfrak{d} s^2 t^3$$

kann man $\mathfrak{d}$ vorgeben und bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ zu einem gegebenen System der s_i Ideale t_i aufstellen. Es besteht aber auch die Möglichkeit der Verallgemeinerung, verschiedene Ideale für $\mathfrak{d}$ zu verwenden, die nur der Bedingung zu genügen haben, daß jedes $\mathfrak{d}_i$ dieselben voneinander verschiedenen Primideale q enthält. Unter den Kongruenzwurzeln $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A ist eine beliebige herauszugreifen, aber auch für A sind verschiedene Werte zulässig, wenn nur der Charakter der A_i bezüglich der Primteiler der $\mathfrak{d}_i$ derselbe bleibt.

Auf der rechten Seite in (21) ergibt sich sodann eine Produktzerlegung nach den verschiedenen Primidealen von K_{λ} , die nicht in den $\mathfrak{d}_i$ aufgehen. Das Summationsglied ergibt sich aus der Berücksichtigung der uneigentlichen Darstellungen durch Summation von

$$(23) \quad \psi(q^r) + \psi(q^{r-2}) + \psi(q^{r-4}) + \dots = \frac{N(q)^{r+1} - 1}{N(q) - 1},$$

wobei $\psi(q^0) = 1$ gesetzt ist. Die Ausführung der Summation auf der rechten Seite in (21) ergibt

$$(24) \quad \left(\frac{N(q)}{1 - N(q)^{1-s}} - \frac{1}{1 - N(q)^{-s}} \right) \frac{1}{N(q) - 1} = \frac{1}{(1 - N(q)^{1-s})(1 - N(q)^{-s})}$$

und dies führt auf I, (192) zurück. Im übrigen verläuft die Berechnung in derselben Weise und führt auf die Gleichung

$$(25) \quad \sum_{i=1}^{h \cdot 2^{\lambda}-1} \frac{I_i}{N(\mathfrak{d}_i)} = 4\pi h k \cdot \prod \left[1 + \left(\frac{A}{q} \right) \frac{1}{N(q)} \right],$$

in der I_i den hyperbolischen Inhalt der reproduzierenden Gruppe von Φ_i und k die rationale Zahl von I, (187) bedeutet, ferner q jeden der voneinander verschiedenen Primteiler der $\mathfrak{d}_i$ durchläuft. Daß die Summanden auf der linken Seite in (25) sämtlich einander gleich sind, folgt aus dem nächsten Abschnitt über die ternären Formen. Auf diesem Wege findet man

$$(26) \quad I = \frac{4\pi}{2^{\lambda}-1} k N(\mathfrak{d}) \prod \left[1 + \left(\frac{A}{q} \right) \frac{1}{N(q)} \right].$$

3. Die ternären Formen.

Die ternäre Form f habe den Teiler t . Das Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ von f enthalte zunächst auch Teiler, die mehrfach aufgehen. Die Voraussetzungen über A seien dieselben wie bisher. Die reduzierte Gestalt der zugehörigen Gruppe Γ ist nach II, (16), (18) durch die Transformationen

$$(27) \quad \begin{pmatrix} t_* & -D n_0 \bar{u} \\ u & -\bar{t}_* \end{pmatrix}$$

mit der Determinante A gegeben, wobei

$$(28) \quad t_* = \sqrt{A} t - \bar{b} u$$

ist. Da t eine ganze Zahl aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ ist und u eine Zahl aus $(tj_0)^{-1}$, ergibt sich aus (28), daß t_* eine Zahl aus $\mathfrak{t}$ ist.

Die Gruppe Γ ist verschiedener Erweiterungen fähig derart, daß Γ bezüglich der erweiterten Gruppe einen endlichen Index hat. Sei $\mathfrak{s}$ ein Ideal aus K_λ , das in $\mathfrak{d}$ zweifach aufgeht, so kann man den Zahlbereich von u auf das Ideal $(\mathfrak{s}tj_0)^{-1}$ erweitern. Diese Erweiterung liefert bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ die Gruppe Γ' einer Form f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} : \mathfrak{s}^2$, deren Adjungierte F' zu 2 $\mathfrak{d}'$ prime Zahlen A' darstellt. Der Beweis wird in derselben Weise geführt wie bei den reproduzierenden Gruppen der Formen Φ_a . Die zu Γ gehörige Form F wird so ausgewählt, daß $b : t^2 j_0$ durch $\mathfrak{s}$ teilbar ist. Alsdann wird $c_0 : t$ durch $\mathfrak{s}^2$ teilbar, und durch eine Transformation (16) gelangt man zu Formen F' und f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d} : \mathfrak{s}^2$.

Wichtiger ist die Erweiterung durch ein Ideal $\mathfrak{j}$ aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, das zu $\bar{\mathfrak{j}}$ prim ist und dessen Relativnorm m in $\mathfrak{d}$ aufgeht. Wird der Zahlbereich von u auf $(tj_0 \bar{\mathfrak{j}})^{-1}$ erweitert, so liefert die erweiterte Gruppe bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$

wiederum die Gruppe Γ' einer Form f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} : m$, deren Adjungierte F' zu $2\mathfrak{d}'$ prime Zahlen A' darstellt. Bei $m = (m)$ ergibt sich aus der Elementartransformation von II, (34) der Beweis. Der allgemeine Beweis wird wiederum durch Transformation der Gruppe mittels F geführt. Die Zahl ω in (7) kann durch $t_0 j$ teilbar angenommen werden und die Form f so gewählt werden, daß die Koeffizienten n_2 und b_1 durch tm teilbar sind. Da A prim zu m ist, wird auch der Koeffizient c_0 in der Form (5) durch tm teilbar, und $f(0, x_2, x_3)$ stellt eine binäre Form mit dem Teiler tm dar. Die Bedingung, daß u aus $(t_0 \bar{j})^{-1}$ ist, wird zufolge der Annahme über ω erfüllt, wenn u_1 in t^{-1} und u_2 in $(tm)^{-1}$ liegt, und F erweist sich als ganze Zahl. In der auszuübenden Transformation nach (16) setzt man $m \sim \alpha^3$, $(A) = m^2 \alpha^{3h-6}$ und macht $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ als auch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch $m\alpha^{h-2}$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch α^{h-3} teilbar. Die Transformation ergibt eine Form F' , die einer Form f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} : m$ adjungiert ist und zu $2\mathfrak{d}'$ prime Zahlen darstellt.

Wesentlich ist nun, daß Γ in bezug auf Γ' eine Transformationsgruppe $\Gamma'_{(m)}$ darstellt, wenn m prim zu $\mathfrak{d} : m$ ist. Diese Eigenschaft der Gruppe folgt unmittelbar, wenn j mit $\bar{j}$ vertauscht wird. Indem der Zahlbereich von u auf $(t_0 \bar{j})^{-1}$ erweitert wird, erhält man eine zweite Gruppe Γ'' , der eine Form f'' von demselben Geschlecht wie f' zugeordnet ist. Die Gruppen Γ' und Γ'' haben dieselbe Untergruppe Γ . Da j und $\bar{j}$ prim zueinander sind, gibt es eine Gruppe, in der sowohl Γ' als auch Γ'' Untergruppe von endlichem Index ist, nur wenn der Zahlbereich von u auf $(t_0 \bar{j} j)^{-1} = (t_0 m)^{-1}$ erweitert werden kann, also $\mathfrak{d} : m$ durch m teilbar ist. Sei $m = m_1 \cdot m_2$ eine Zerlegung in zwei zueinander prime Ideale, so gilt dasselbe auch für jede durch die Teiler m_1 gegebene Teilerweiterung. Wenn aber $\mathfrak{d} : m$ als prim zu m vorausgesetzt wird, gibt es derartige Erweiterungen nicht, und es besteht unter den Γ' und Γ'' zugeordneten automorphen Funktionen eine algebraische Transformationskorrespondenz, die für das Ideal m charakteristisch ist. Die Betrachtung in Teil II, S. 328 ist unvollständig und wird erst in Abschn. 8 auf anderem Wege ergänzt. Der Satz 14 läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 27. Die Gruppe Γ einer Form f mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}' m$, deren Adjungierte F zu $2\mathfrak{d}$ prime A darstellt, läßt sich, wenn $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ und m prim zu $\mathfrak{d}'$ ist, ferner A quadratischer Rest von $4m$ ist, als Transformationsgruppe $\Gamma'_{(m)}$ einer Gruppe Γ' auffassen, die einer Form f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}'$ derselben Art angehört.

Vorausgreifend sei bemerkt, daß unter den hyperbolischen Inhalten I, I', I'' der Fundamentalbereiche der Gruppen $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ die Relation

$$(29) \quad I = \psi(m) I' = \psi(m) I''$$

entsprechend II, (95) besteht.

Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ lassen sich, wenn m der dritten Potenz eines Ideals aus K_λ nicht äquivalent ist, durch die vorgenommene Erweiterung Gruppen Γ' definieren, die keiner Form F' bzw. f' angehören. Der Gruppe Γ' ist sodann das Ideal $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} : m$ zuzuordnen. Unter Einschränkungen ist die Gruppe auch noch vermittle F transformierbar. Wenn ω durch t_{j0j} teilbar angenommen wird und F wie oben bestimmt wird, leistet jede ternäre unimodulare ganzzahlige Substitution (16) von der Beschaffenheit

$$(30) \quad \gamma_0, \gamma_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

diesen Dienst. Denn jedes Zahlensystem t_2, u_1, u_2 , bei dem t_2 und u_1 dem Ideal t^{-1} und u_2 dem Ideal $(tm)^{-1}$ angehört, wird in ein Zahlensystem t'_2, u'_1, u'_2 derselben Art übergeführt und umgekehrt.

Im folgenden sei f eine Grundform, so daß in $\mathfrak{d}$ jeder Primteiler nur einmal aufgeht. Bei den Erweiterungen von Γ , die durch die vollständige reproduzierende Gruppe von f gegeben ist (II, Abschn. 3), hat $t_* : t$ in Formel (27) einen Teiler $\mathfrak{d}_\tau$ von $\mathfrak{d}$. Zudem haben $t_* : t$ und ut_{j_0} einen gemeinsamen Idealteiler aus K_λ . Sei dieser r und Ad die Determinante der Substitution, alsdann besteht

$$(31) \quad \mathfrak{d}_\tau r^2 = (d).$$

Auch sind die Fälle zu berücksichtigen, in denen $\mathfrak{d}_\tau = 1$ und d eine Einheit aus K_λ oder $(d) = r^2$ ist. Nur diejenigen Zahlen d , deren $\lambda - 1$ konjugierte Werte sämtlich positiv sind, liefern Erweiterungen. Bei Ermittlung der Gruppe Γ_σ der Grundfunktion ist für d eine total positive Zahl erforderlich.

Die in II, Abschn. 4 eingeführten „transformierenden Substitutionen“ sind allgemein durch ternäre unimodulare Substitutionen gegeben, in denen die Koeffizienten und die Unterdeterminanten dasselbe Ideal m^{-1} aus K_λ definieren. Zur Ausführung der in Abschnitt 4 gegebenen Zerlegungen ist jedoch erforderlich, daß m ein Hauptideal ist. Dennoch verläuft der Beweis des Klassenzahlsatzes in derselben Weise wie in II, Abschn. 5, da dieser im wesentlichen auf der Anwendung des Satzes vom Hauptgeschlecht beruht. So ist m_0 in Satz 18 (II, S. 333) eine Zahl aus t und v_1 und v_2 in der Transformation (71) Zahlen aus t^{-1} , so daß die binäre Form φ in (72) den Teiler eins hat. Durch Wahl von v_1 und v_2 erhält φ das Hauptgeschlecht und stellt Primzahlquadrate aus K_λ dar. Desgleichen ist C^2 in (78) eine Klasse vom Hauptgeschlecht und dem Teiler eins. Man erhält den

Satz 28. Die Klassenzahl eines Geschlechtes von Grundformen mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}$ beträgt 2^g , wenn g die kleinste Anzahl von Primidealen $\mathfrak{q}$ bedeutet, mit denen $\mathfrak{d}$ multipliziert werden muß, um zu einem Ideal $\mathfrak{d}'$ zu gelangen mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Ideal m aus K_λ gibt es einen Teiler $\mathfrak{d}_\tau$

von $\mathfrak{d}'$ und ein Ideal $\mathfrak{r}$ aus K_λ derart, daß $\mathfrak{d}'_i \mathfrak{r}^2 \mathfrak{m}$ ein Hauptideal aus einer Zahl ist, deren $\lambda - 1$ konjugierte Werte sämtlich positiv sind.

Der Satz 20 über die Kongruenzgruppen behält seine Gültigkeit und die Behauptung (29) ist eine Folge dieses Satzes. Nunmehr läßt sich die Verallgemeinerung des Satzes 12 beweisen.

Satz 29. Der hyperbolische Inhalt des Fundamentalbereiches der Gruppe Γ einer Grundform f mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_\mu$ ist gegeben durch

$$(32) \quad I = \frac{4\pi}{2^{\lambda-1}} k \prod_{i=1}^{\mu} \left[N(\mathfrak{q}_i) + \left(\frac{A}{\mathfrak{q}_i} \right) \right],$$

wenn die Zahl A das Geschlecht von f definiert.

Anknüpfend an das Ergebnis (25) des vorigen Abschnittes über den hyperbolischen Inhalt bestimme man die $\mathfrak{d}_i$ der Formen Φ_i so, daß die Φ_i durch Formen Φ_a vertreten werden können. Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ kommt hinzu, daß $s_i^2 \mathfrak{d}_i \sim \mathfrak{t}_i^{-3}$ erfüllbar sein muß. Dazu geht man etwa so vor. Zunächst wird ein $\mathfrak{d}'$ nach Satz 28 bestimmt. Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ sei $\mathfrak{d}'$ im besonderen so gewählt, daß $\mathfrak{d}' \sim \mathfrak{t}'^{-3}$ erfüllbar ist. Nach Satz 28 hat jedes Geschlecht einer Grundform f' mit dem Diskriminantenideal $\mathfrak{d}'$ die Klassenzahl eins. Bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ bestimme man die $\mathfrak{d}_i$ in der Weise, daß $\mathfrak{d}_i$ durch $\mathfrak{d}'$ teilbar ist und sämtliche $\mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}'$ prim zu $\mathfrak{d}'$ sind und dieselben voneinander verschiedenen Primideale enthalten, ferner $s_i \mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}' \sim 1$ ist. Alsdann ist jedes Φ_i durch eine Form Φ_a vertreten. Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ ist die letzte Bedingung zu verallgemeinern, damit auch die Nebenbedingung $s_i^2 \mathfrak{d}_i \sim \mathfrak{t}_i^{-3}$ oder $s_i^2 \mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}' \sim \alpha_i^3$ ($\alpha_i \sim \mathfrak{t}' : \mathfrak{t}_i$) erfüllt werden kann. Deshalb besitze $\mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}'$ einen Teiler $\mathfrak{d}_\tau$ derart, daß $\mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}' \mathfrak{d}_\tau$ prim zu $\mathfrak{d}_\tau$ und $s_i \mathfrak{d}_\tau \sim 1$ ist. Nunmehr suche man eine Zahl A , die bezüglich der Primideale von $\mathfrak{d}$ die Charaktere von f liefert und bezüglich der übrigen Primideale den Charakter $+1$ hat. Für diesen Fall läßt sich die Gleichung (25) in die Gestalt setzen

$$(33) \quad \sum_{i=1}^{h \cdot 2^{\lambda-1}} \frac{I_i}{\psi(\mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}') } = 4\pi h k \prod_{i=1}^{\mu+q} \left[N(\mathfrak{q}_i) + \left(\frac{A}{\mathfrak{q}_i} \right) \right],$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite über sämtliche Primideale von $\mathfrak{d}'$ zu erstrecken ist. Bei $h \not\equiv 0 \pmod{3}$ nimmt man nach Satz 26 eine Transformation der reproduzierenden Gruppe von Φ_i auf eine Gruppe Γ' vor und nach Satz 27 eine Erweiterung für $\mathfrak{m} = \mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}'$. Alsdann ergibt sich aus (29)

$$(34) \quad I_i = \psi(\mathfrak{d}_i : \mathfrak{d}') I',$$

wenn I' der hyperbolische Inhalt des Fundamentalbereiches der Gruppe Γ' einer Grundform f' ist, deren Diskriminantenideal und Geschlecht durch $\mathfrak{d}'$

bzw. A gegeben ist. Da das Geschlecht nur eine Klasse von Formen hat, sind sämtliche Summanden auf der linken Seite in (33) einander gleich. Bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ sind ersichtlich die beiden Operationen in einer Transformation (16) zu vereinigen. Das Resultat (32) ergibt sich durch nochmalige Gruppenerweiterung nach Satz 27 für $m = d' : d$ und Anwendung der Beziehung (29). Auch für die Gruppen Γ , die bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ keiner Form f angehören, läßt sich vermöge (29) der hyperbolische Inhalt bestimmen. Der Satz über die Transformationskorrespondenzen werde sogleich in einer independenten Weise formuliert.

Satz 30. Die automorphe Funktion einer Gruppe Γ mit einem zugeordneten Ideal d besitzt für jedes nicht in d aufgehende Primideal q eine Transformationskorrespondenz vom Index $\psi(q)$. Für den Fall, daß in d jeder Primteiler nur einmal aufgeht, sind die Transformationen der Funktion in sich durch diejenigen Primideale q gegeben, für die ein Teiler d_τ von d und ein Ideal r vorhanden sind derart, daß $d_\tau r^2 q$ ein durch eine total positive Zahl definiertes Hauptideal ist, und die Transformationskorrespondenz ist symmetrisch in den Variablensystemen.

Auch der Beweis läßt sich independent führen. Die Gruppe Γ sei in der reduzierten Gestalt (27) gegeben. Falls $A \equiv 0 \pmod{q}$ oder Nichtrest von 4 q ist, werde Γ so transformiert, daß $A \not\equiv 0 \pmod{q}$ und quadratischer Rest von 4 q ist. Auch wenn bei $h \equiv 0 \pmod{3}$ die Gruppe Γ keiner Form f angehört, ist dies nach (30) ausführbar. Innerhalb $K_\lambda(\sqrt{A})$ werde q in $j\bar{j}$ zerpalten. Die Einschränkung von u auf das Ideal $\bar{j} : t\bar{j}_0$ definiert eine Transformationsgruppe $\Gamma_{(q)}$, da q in d nicht aufgeht. Das Ideal j_0 läßt sich vermittle (13) durch ein äquivalentes ersetzen, das durch j teilbar ist. Alsdann ist n_0 durch q teilbar und der Gruppe $\Gamma_{(q)}$ ist das Ideal dq zuzuordnen. Nunmehr läßt sich durch Erweiterung des Zahlbereiches von u auf $(t\bar{j}_0j : \bar{j})^{-1}$ die Gruppe $\Gamma_{(q)}$ zu einer Gruppe Γ' erweitern, zu der $\Gamma_{(q)}$ gleichfalls Transformationsgruppe ist, und es besteht unter den zu Γ und Γ' gehörigen automorphen Funktionen eine algebraische Transformationskorrespondenz vom Index $\psi(q)$. Diese ist in den Variablensystemen symmetrisch oder geht bei Vertauschung der Variablensysteme in die konjugiert-komplexe Gleichung über, wenn $\Gamma_{(q)}$ nach (31) in höherem Grade erweiterungsfähig ist als Γ und Γ' . Daraus ergibt sich die zweite Behauptung des Satzes 30. Daß nur in diesen Fällen Isomorphie unter den Gruppen Γ und Γ' stattfindet, folgt weiterhin aus dem Klassenzahlsatz 28.

Schlußbemerkung. Die Resultate lassen sich auch auf die automorphen Funktionen von mehreren Variablen mit binären Substitutionen ausdehnen. Ein besonderes Interesse kommt den automorphen Funktionen von zwei Variablen zu. C. L. Siegel hat den hyperbolischen Inhalt des Funda-

mentalbereiches der Gruppe der Modulfunktionen von mehreren Variablen mit binären Substitutionen bestimmt⁵⁾. Der zweite Beweis bedient sich weder der quadratischen Formen noch der Eigenschaften der Einheiten des Zahlkörpers und das Herausfallen des Regulators R aus der Formel für den hyperbolischen Inhalt wird unmittelbar verständlich. Der Beweis macht Gebrauch von den Untergruppen mit parabolischen Substitutionen und ist daher auf den allgemeineren Fall nicht übertragbar.

⁵⁾ C. L. Siegel, The volume of the fundamental domain for some infinite groups. Transactions of the American Math. Soc. 39 (1936), S. 209.

(Eingegangen am 16. Mai 1938.)

Eine Bemerkung zur Ahlfors'schen Theorie der Überlagerungsflächen.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer berühmten, in den Acta¹⁾ veröffentlichten Abhandlung, hat Ahlfors die wichtigsten Sätze der Werteverteilungslehre durch rein topologische Methoden begründet und weitgehend ergänzt.

Er hat dabei einige der wichtigsten Nevanlinnaschen Sätze auf Gebiete übertragen, und stellte zum Schluß die Frage auf, inwieweit durch Grenzübergang gewisse „Gebietssätze“ in „Punktsätze“ der Nevanlinnaschen Theorie übergehen.

2. Es soll hier gezeigt werden, daß dies im parabolischen Falle und unter der Voraussetzung von regulärer Ausschöpfung möglich ist.

Daß dabei ein Restglied zu groß ausfällt, liegt in prinzipiellen Schwierigkeiten der Ahlfors'schen Methode, die dem Kenner der Theorie bekannt sind. Immerhin ist interessant zu sehen²⁾, daß die wichtigsten Sätze der klassischen Nevanlinnaschen Theorie aus den Ahlfors'schen Gebietssätzen durch Grenzübergang erhalten werden können.

Das Entscheidende in der vorliegenden Note liegt in der zwischen der charakteristischen Funktion $T(r)$ und dem integrierten Ahlfors'schen

Restglied $\int_{r_0}^r \frac{L(t)}{t} dt$ bestehenden Ungleichung (5. 2), die ich durch eine Vertiefung eines Ahlfors'schen Verfahrens beweise.

3. Wir betrachten eine Riemannsche Fläche³⁾ F , die wir als konforme Abbildung des Kreises $|z| < R$, oder der punktierten Ebene ($R = \infty$), durch die meromorphe Funktion $f(z)$ auffassen. Mit F_r bezeichnen wir diejenige „Näherungsfläche“ von F , welche als Abbildung des Kreises $|z| \leq r < R$ durch $f(z)$ aufgefaßt werden kann.

¹⁾ Zur Theorie der Überlagerungsflächen, Acta Math. 65 (1935).

²⁾ Ahlfors (l. c., S. 194) und Nevanlinna (Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1937, S. 341) bemerken, daß es nicht möglich sein würde, aus den Ahlfors'schen Ungleichungen die Nevanlinnaschen zu erhalten, da das mögliche Vorhandensein von Ausnahmeintervallen eine Integration verhindern würde. Hier wird gezeigt, daß man diese Schwierigkeit umgehen kann.

³⁾ Alle Überlegungen bestehen natürlich auch für alle Flächen vom parabolischen Typus, die eine quasikonforme Metrik besitzen.

Wir setzen⁴⁾

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| < r} \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2} d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ das Euklidische Flächenelement der z -Ebene bedeutet, und

$$T(r) = \int_0^r \frac{S(t)}{t} dt.$$

$T(r)$ wird als die charakteristische Funktion in sphärischer Normalform bezeichnet. Wir wissen übrigens⁵⁾, daß $T(r)$ sich von der üblichen charakteristischen Funktion der klassischen Theorie um ein $O(1)$ unterscheidet.

Die Länge $L(r)$ des Randes des sphärischen Bildes (auf der Riemannschen Kugel vom Durchmesser Eins) von F_r ist hier

$$L(r) = r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)} d\varphi.$$

Außer $S(r)$, $T(r)$ und $L(r)$ führen wir folgende Begriffe ein:

Es sei D zuerst ein Gebiet der Riemannschen Kugel. Mit $n(r, D)$ bezeichnen wir die gesamte Anzahl der über D gelegenen Inseln der Näherungsfläche F_r . Ferner bezeichnen wir mit $m(r, D)$ die durch den Inhalt von D dividierte Anzahl der über D liegenden Zungen von F_r . Außer diesen beiden Größen brauchen wir die Größe $-p(r, D)$, welche die Summe der Charakteristiken der über D liegenden Inseln von F_r ⁶⁾ darstellen soll.

Bedeutet dann $n_1(r, D)$ die Summe der Verzweigungsordnungen der über D gelegenen Inseln von F_r , so gilt

$$p(r, D) = n(r, D) - n_1(r, D).$$

Wir betrachten nun q ($q \geq 3$) punktfremde, einfach zusammenhängende Gebiete D_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Dann lautet die fundamentale Ungleichung von Ahlfors

$$(3.1) \quad \sum_1^q n(r, D_i) - \sum_1^q n_1(r, D_i) \geq (q-2)S(r) - O(L(r)),$$

oder

$$(3.2) \quad \sum_1^q n(r, D_i) - \sum_1^q n_1(r, D_i) \geq (q-2)S(r) - O(S(r)^{\frac{1}{2} + \epsilon})$$

⁴⁾ Alle Begriffe und Sätze dieser Nummern stammen von Ahlfors.

⁵⁾ Nevanlinna, I. c., S. 167.

⁶⁾ Ahlfors, I. c., S. 179.

für jedes $\varepsilon > 0$. Die Ungleichung (3. 2) gilt übrigens mit Ausnahme von Intervallen Δ_r , die so beschaffen sind, daß das Integral

$$\int_{\Delta_r} d \log r$$

konvergent ist.

Daß man dieser Ungleichung eine „integrierte“ Form gegenüberstellen kann, wird in folgender Nummer bewiesen.

4. Ein Hilfssatz. Kehren wir zu der Definition von 3. zurück!

Aus

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| < r} \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2} d\sigma$$

und

$$L(r) = r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2} d\varphi$$

folgt unter Heranziehung der Schwarzschen Ungleichung

$$(4.1) \quad L^2(r) \leq 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)^2} d\varphi = 2\pi r S'(r).$$

Wir setzen jetzt

$$A(r) = \int_{r_0}^r \frac{L(t)}{t} dt$$

mit festem $r_0 > 0$.

Aus (4. 1) folgt

$$\frac{L(r)}{r} \leq \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{S'(r)}{r}},$$

also durch Integration

$$A(r) \leq \sqrt{2\pi} \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{S'(t)}{t}} dt.$$

Nun ist unter nochmaliger Heranziehung der Schwarzschen Ungleichung

$$A^2(r) \leq 2\pi \left(\int_{r_0}^r \sqrt{\frac{S'(t)}{t}} dt \right)^2 \leq 2\pi \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \int_{r_0}^r (t T'(t))' dt,$$

da $S'(r) = (r T')'$ ist.

Es wird also

$$(4.2) \quad A^2(r) \leq K r \log r T'(r),$$

wobei k nur von r_0 abhängt.

5. Es sei nun $f(z)$ in der ganzen Ebene meromorph, und es sei E die in $r \geq a \geq 0$ liegende Menge (die offenbar aus Intervallen Δ_r zusammengesetzt ist), wo die Ungleichung

$$(5.1) \quad A(r) \geq \sqrt{T(r)} \log T(r)$$

gilt. a kann dabei so gewählt werden, daß $T(a) > 1$ wird.

Durch Kombination von (4.2) und (5.1) erhält man nun

$$\int_E \frac{dr}{r \log r} \leq K \int_E \frac{dT}{T \log^2 T} \leq K \int_a^\infty \frac{dT}{T \log^2 T} = \frac{K}{\log T(a)}.$$

Daraus folgt, daß das über E erstreckte Integral $\int_E d \log \log r$ konvergieren muß.

Für die komplementäre Menge gilt

$$(5.2) \quad A(r) \leq \sqrt{T(r)} \log T(r).$$

6. Wir sind jetzt imstande, aus (3.1) durch Integration einen der klassischen Theorie durchaus entsprechenden Satz zu gewinnen.

Setzen wir nämlich, wie in der Nevanlinnaschen Theorie,

$$N(r, D) = \int_{r_0}^r \frac{n(t, D)}{t} dt$$

mit festem $r_0 > 0$, so erhalten wir aus (3.1) und (5.2) durch Multiplikation mit $\frac{dr}{r}$ und Integration von $r = r_0$ bis $r = r$

$$(6.1) \quad \sum_1^q N(r, D_i) - \sum_1^q N_1(r, D_i) \geq (q-2) T(r) - O(\sqrt{T} \log T^7),$$

welche die gesuchte Ungleichung ist. Dabei gilt (6.1) für alle Punkte r , die der Menge E nicht angehören.

Aus dieser Ungleichung folgt ferner, da man weiß, daß (3.1) auch dann gilt, wenn die D_i durch die Punkte a_i ersetzt werden, der Nevanlinnasche Hauptsatz mit schlechterem Restglied⁸⁾.

7) Es wird $N_1(r_1 D) = \int_{r_0}^r \frac{n_1(t, D)}{t} dt$ gesetzt.

8) Bekanntlich ist die bestmögliche Abschätzung dieses Restgliedes ein $O(\log r T(r))$.

7. Eine Anwendung der Ungleichung (3.1), ist noch die Ahlforssche Defektrelation⁹⁾, die im Falle von regulärer Ausschöpfung durch die Ungleichung

$$\sum_1^q \delta_A(D_i) + \sum_1^q \vartheta_A(D_i) \leq 2$$

gegeben wird. Dabei sind $\delta_A(D)$ und $\vartheta_A(D)$ die Defekte und Verzweigungsindizes

$$\delta_A(D) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, D)}{S(r)}, \quad \vartheta_A(D) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r, D)}{S(r)}.$$

Definiert man entsprechend $\delta_N(D)$ und $\vartheta_N(D)$ durch

$$\delta_N(D) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, D)}{T(r)}, \quad \vartheta_N(D) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, D)}{T(r)},$$

so erhält man wieder (7.1), doch hier geht diese Relation für $D_i \rightarrow a_i$ in die bekannte klassische Nevanlinnasche Defektrelation¹⁰⁾

$$\sum_1^q \delta_N(a_i) + \sum_1^q \vartheta_N(a_i) \leq 2$$

über.

Schließlich möchte ich noch eins erwähnen. Nimmt die Funktion $f(z)$ nur endlich viele Werte $a_1, a_2, \dots, a_q$ mehrfach an, und gehören auch die asymptotischen Werte der Funktion zu diesen Werten, so gilt nach Ahlfors (l. c., S. 190)

$$\sum_1^q n(r, a_i) - \sum_1^q n_1(r, a_i) = (q-2)S(r) + O(L(r)),$$

falls $L(r)$ gegen Unendlich strebt.

Daraus erhalten wir die asymptotische Gleichung

$$\sum_1^q N(r, a_i) - \sum_1^q N_1(r, a_i) - (q-2)T(r) = O(\sqrt{T(r)} \log T(r)),$$

die mit Ausnahme der Intervalle Δ_r gilt. Dabei ist $\int_{\Delta_r} d \log \log r$ konvergent.

⁹⁾ S. 181.

¹⁰⁾ Nevanlinna, l. c. S. 265.

Eine Verallgemeinerung des Picard-Borelschen Satzes.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1.

Bekanntlich sind wichtige Anwendungen des zweiten Hauptsatzes der Nevanlinnaschen Theorie der meromorphen Funktionen der Picard-Borelsche Satz einerseits und die Defektrelationen andererseits. Ahlfors¹⁾ gelang es mit Hilfe seiner berühmten Theorie der berandeten Überlagerungsflächen, die klassischen Defektrelationen auf „Gebiete“ zu übertragen. Damit gab er unter anderem einen Anstoß der Theorie in der Richtung des Blochschen Kontinuitätsprinzips, indem er verschiedene „Verzweigungspunktsätze“ für Gebiete bewies.

Ich habe²⁾ in einer Arbeit in dieser Zeitschrift gezeigt, daß im Grenzfalle, wo die Gebiete zu Punkten ausarten, die Ahlforsschen Sätze für Riemannsche Flächen vom parabolischen Typus (bis auf die Größenordnung des Restgliedes) in die klassischen Sätze der Nevanlinnaschen Theorie übergehen.

In der vorliegenden Arbeit gebe ich eine Verallgemeinerung des Borelschen Satzes, indem ich dort statt von der Dichte der über einem Punkt a liegenden inneren Punkte der Riemannschen Fläche nur von der Dichte der über einem festen Gebiet D liegenden Inseln spreche.

Das Neue beim Beweise besteht in einer geeigneten Abschätzung des integrierten Restgliedes in den Ahlforsschen Hauptrelationen nach oben.

2. Die Ahlforsschen Hauptsätze.

Es sei F eine über die w -Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche, auf welche eine meromorphe Funktion $w = w(z)$ den endlichen oder unendlichen Kreis $|z| < R$ ($R \leq \infty$) konform abbildet. F_r sei der Teil von F , der durch $z = z(w)$ auf den Kreis $|z| \leq r < R$ abgebildet wird³⁾. Wir führen die Metrik der Riemannschen Kugel ein, und setzen

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| \leq r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\sigma_z, \quad L(r) = \int_{|z| = r} \frac{|w'|}{(1 + |w|^2)} |dz|$$

¹⁾ Acta 65 (1935). Vgl. auch das letzte Kapitel in: Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*. Jul. Springer, 1937.

²⁾ Math. Zeitschr. 44 (1938), S. 568—572.

³⁾ Nevanlinna, l. c., S. 338.

und

$$S(r) = \frac{dT(r)}{d \log r}.$$

$S(r)$, $L(r)$ sind entsprechend der sphärische Inhalt und die Länge des Randes von F_r und $T(r)$ die Charakteristik des Wachstums von $w(z)$ ⁴⁾.

Nun sei D ein beliebiges Teilgebiet der Riemannschen Kugel. Durch $n(r, D)$ bezeichnen wir im folgenden die gesamte Anzahl der über D liegenden Inseln von F_r und durch $n_1(r, D)$ die Summe der Verzweigungsordnungen aller über D liegenden verschiedenen einfach zusammenhängenden Gebiete der Riemannschen Kugel. Wir betrachten jetzt ein System $D_1, D_2, \dots, D_q$ ($q \geq 3$) punktfremder einfach zusammenhängender Gebiete der Riemannschen Kugel.

Unter diesen Voraussetzungen lauten die beiden fundamentalen Ahlforschen Relationen

$$(I) \quad n(r, D) \leq S(r) + O(L(r))$$

und

$$(II) \quad \sum_{i=1}^q n(r, D_i) - \sum_{i=1}^q n_1(r, D_i) \geq (q-2)S(r) - O(L(r)).$$

3. Der verallgemeinerte Picard-Borelsche Satz.

Wir nehmen jetzt an, $w(z)$ sei eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion von der Ordnung $\varrho > 0$. Es existiert also eine positive Zahl $\varrho > 0$,

so daß für alle $k > \varrho$ das Integral $\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{k+1}} dr$ konvergiert, während dies für $k < \varrho$ divergiert. Aus der Definition von $T(r)$ folgt nun, daß die Ordnung von $T(r)$ gleich der Ordnung von $S(r)$ ist.

Denn es ist

$$(3.1) \quad \int_{r_0}^r \frac{S(t)}{t^{k+1}} dt = \int_{r_0}^r \frac{dT}{t^k} = \frac{T(r)}{r^k} - \frac{T(r_0)}{r_0^k} + k \int_{r_0}^r \frac{T(t)}{t^{k+1}} dt,$$

woraus die Behauptung durch bekannte Schlüsse unmittelbar folgt.

Aus dieser Formel folgt sogar, daß beide Integrale $\int_{r_0}^r \frac{S(t)}{t^{k+1}} dt$ und $\int_{r_0}^r \frac{T(t)}{t^{k+1}} dt$ gleichzeitig konvergent oder divergent sind, eine Tatsache, die am Schluß von 3. gebraucht wird.

⁴⁾ Ahlfors, l. c., S. 189.

⁵⁾ Die Relation lautet genau $m(r, D) + n(r, D) = S + O(L)$, wobei $m(r, D)$ gleich dem durch den sphärischen Inhalt $I_0(D)$ von D dividierten Gesamtinhalt der über D befindlichen Zungen von F_r ist.

Wir wählen nun in (II) $q = 3$ und vernachlässigen dabei die Summe $\sum_1^q n_1(r, D)$. Durch Zusammenfassung von (I) und (II) erhalten wir die Doppelungleichung

$$(3.2) \quad n(r, D) - O(L(r)) \leq S(r) \leq \sum_{i=1}^3 n(r, D_i) + O(L(r)).$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\frac{dr}{r^{k+1}}$ und Integration von $r = r_0$ bis $r = r$ unter Berücksichtigung von (4.1)

$$\int_{r_0}^r \frac{n(t, D)}{t^{k+1}} dt - O(A_k(r)) \leq \int_{r_0}^r \frac{S(t)}{t^{k+1}} dt \leq \sum_{i=1}^3 \int_{r_0}^r \frac{n(t, D_i)}{t^{k+1}} dt + O(A_k(r)).$$

Dabei ist

$$A_k(r) = \int_{r_0}^r \frac{L(t)}{t^{k+1}} dt.$$

Wir beweisen jetzt:

Falls

$$I_k(r) = \int_{r_0}^r \frac{S(t)}{t^{k+1}} dt$$

konvergiert, so ist $A_k(r)$ konvergent. Divergiert dagegen $I_k(r)$, so gilt

$$A_k(r) = O(I_k(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0),$$

mit Ausnahme von Intervallen Δ_r , die so beschaffen sind, daß

$$\int_{\Delta_r} d \log r$$

konvergent ausfällt.

In der Tat folgt aus der Definition in 2. wegen der Schwarzschen Ungleichung

$$(3.3) \quad L^2(r) \leq 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\varphi \leq 2\pi r S'(r),$$

also

$$L(r) \leq \sqrt{2\pi r S'(r)}.$$

Daraus folgt zuerst

$$\int_{r_0}^r \frac{L(t)}{t^{k+1}} dt = A_k(r) \leq \sqrt{2\pi} \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{t S'(t)}}{t^{k+1}} dt,$$

und unter nochmaliger Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$A_k^2(r) \leq 2\pi \int_{r_0}^r \frac{dt}{t^{k+1}} \int_{r_0}^t \frac{S'}{t^k} dt.$$

Nun ist mit

$$I_k = \int_{r_0}^r \frac{S}{t^{k+1}} dt$$

$$S' = (r^{k+1} I_k)' = r^{k+1} I_k'' + (k+1) r^k I_k',$$

d. h.

$$A_k^2(r) \leq \frac{2\pi}{k r_0^k} \int_{r_0}^r (r I_k'' + (k+1) I_k') dt,$$

oder wegen

$$r I_k'' + (k+1) I_k' = (r I_k')' + k I_k',$$

$$A_k^2 \leq \frac{2\pi}{k r_0^k} \left\{ k I_k + \frac{S}{r^k} \right\}.$$

Konvergiert nun $I_k(r)$, so strebt $\frac{S}{r^k} \rightarrow 0$ wegen der Monotonität von S .

Divergiert I_k , so strebt wegen

$$\left(k I_k + \frac{S}{r^k} \right)' = \frac{S'}{r^k} \geq 0$$

$k I_k + r I_k'$ monoton gegen Unendlich.

Es seien jetzt Δ_k die Intervalle, wo

$$k I_k + r I_k' \geq k I_k + I_k^{1+\varepsilon}$$

ist, oder

$$r I_k' \geq I_k^{1+\varepsilon}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\int_r \frac{dr}{r} \leq \int_r \frac{d I_k}{I_k^{1+\varepsilon}} \leq \int_r^\infty \frac{d I_k}{I_k^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

In der komplementären Menge gilt also

$$A_k^2 \leq \frac{2\pi}{k r_0^k} \{ k I_k + r I_k' \} \leq \text{const } I_k^{1+\varepsilon},$$

d. h.

$$A_k(r) = O(I_k(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

was unseren Satz vollständig beweist.

Wir erhalten also die Doppelungleichung

$$\int_{r_0}^r \frac{n(t, D)}{t^{k+1}} dt - O\left(I_k^{\frac{1}{2} + \varepsilon}(r)\right) \leq I_k(r) \leq \sum_{i=1}^3 \int_{r_0}^r \frac{n(t, D_i)}{t^{k+1}} dt + O\left(I_k^{\frac{1}{2} + \varepsilon}(r)\right),$$

welche außerhalb der Ausnahmeintervalle Δ_r gilt.

Mit Hilfe dieser Ungleichung ist leicht zu beweisen, daß die Integrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(t)}{t^{k+1}} dt \quad \text{und} \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{n(r, D_i)}{t^{k+1}} dt \quad (i = 1, 2, 3)$$

im allgemeinen von derselben Ordnung sind. Präziser aufgefaßt, lautet der gewonnene Satz folgendermaßen:

Satz von Picard-Borel. Wenn $w = w(z)$ eine in der ganzen Ebene nicht konstante meromorphe Funktion von endlicher Ordnung > 0 ist, so gibt es höchstens zwei Gebiete D , für welche die Anzahl der über D liegenden Inseln von niedrigerer Ordnung (Klasse) ist als die Ordnung der Charakteristik $T(r)$.

Der Satz gilt auch, wenn einige (oder alle) Gebiete durch Punkte ersetzt werden, doch muß man in diesem Falle (da (I) nicht unbedingt zu gelten braucht) statt der linken Seite der obigen Doppelungleichung eine bekannte Abschätzung der Nevalinnaschen Theorie benutzen.

4.

Der Satz gilt unverändert auch für Funktionen, die nur im Einheitskreise meromorph und von endlicher Ordnung sind, dabei wird die Dichte wie im klassischen Fall definiert und der Beweis verläuft ähnlich wie im parabolischen Falle.

Wir erinnern zuerst kurz an die Begriffe der Ordnung einer in $|z| < 1$ meromorphen Funktion, und an einen wichtigen Hilfssatz.

Eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion heißt bekanntlich⁶⁾ von der endlichen Ordnung $\varrho > 0$, wenn ϱ der Grenzexponent des Integrals

$$\int_0^1 T(r) (1-r)^{k-1} dr$$

ist, d. h. wenn dieses Integral für $\varrho < k$ konvergiert, während es für $\varrho > k$ divergiert.

Für das Spätere ist folgender Satz von Wichtigkeit:

Die Integrale

$$\int_0^1 T(r) (1-r)^{k-1} dr \quad \text{und} \quad \int_0^1 S(r) (1-r)^k dr$$

konvergieren oder divergieren gleichzeitig.

Der Beweis folgt aus der Identität

$$k T_k(r) = k \int_{r_0}^r T(1-t)^{k-1} dt = -T(r)(1-r)^k + T_0(r_0)(1-r_0)^k \\ + \int_{r_0}^r \frac{S}{t} (1-t)^k dt$$

durch wohlbekannte Schlüsse⁶⁾.

6.

Kehren wir nun zu 2. zurück und integrieren die Doppelungleichung von $r = r_0$ bis $r = r$ nach vorheriger Multiplikation mit $(1-r)^k$.

Wir erhalten

$$\int_{r_0}^r n(t, D)(1-t)^k dt - O(B_k) \leq \int_{r_0}^r S(t)(1-t)^k dt \\ \leq \sum_{i=1}^3 \int_{r_0}^r n(t, D_i)(1-t)^k dt + O(B_k),$$

wobei

$$B_k = B_k(r) = \int_{r_0}^r L(t)(1-t)^k dt$$

ist.

Jetzt gilt der Satz:

Wenn $I_k = \int_{r_0}^r S(1-t)^k dt$ konvergiert so ist $B_k = O(1)$. Divergiert dieses Integral, so gilt außerhalb von Ausnahmeintervallen Δ_r mit

$$\int_{\Delta} \frac{dr}{(1-r)} = O(1),$$

$$B_k = O\left(I_k^{\frac{1}{2} + \epsilon}\right).$$

Der Beweis kann wie früher erbracht werden. Zuerst ist wegen der Schwarzschen Ungleichung und (3.3)

$$B_k^2 \leq 2\pi \int_{r_0}^r (1-t)^{k-1} dt \int_{r_0}^r (1-t)^{k+1} \left\{ \frac{I'_k}{(1-t)^k} \right\}' dt,$$

⁶⁾ Nevanlinna, l. c., S. 252.

d. h.

$$B_k^2 \leq C \cdot \int_{r_0}^r (1-t)^{k+1} \left\{ \frac{I'_k}{(1-t)^k} \right\}' dt,$$

wobei C eine bestimmte Konstante ist. Durch eine einfache Rechnung erhält man ferner

$$B_k^2 \leq C \left\{ \int_{r_0}^r ((1-t)I''_k + kI'_k) dt \right\} = C \{(1-r)I'_k + (k+1)I_k\}.$$

Ist nun I_k konvergent, so ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)I'_k = 0,$$

es ist also tatsächlich $B_k(r)$ ein $O(1)$.

Divergiert dagegen I_k , so bezeichnen wir mit Δ_r die Intervalle bis r , wo

$$(1-r)I'_k + (1+k)I_k > I_k^{1+\varepsilon} + (1+k)I_k \quad (\varepsilon > 0)$$

gilt.

Durch Integration folgt daraus

$$\int_{\Delta_r} \frac{dr}{(1-r)} \leq \int_{\Delta_r} \frac{dI_k}{I_k^{1+\varepsilon}} < +\infty,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Nimmt man jetzt Rücksicht darauf, daß mit $\int_0^1 T(1-r)^{k-1} dr$

$\int_0^1 S(1-r)^k dr$ zugleich konvergiert oder divergiert, so erhält man folgenden Satz:

Falls die meromorphe Funktion $w(z)$ im Einheitskreise von der endlichen Ordnung $\varrho > 0$ ist, so gibt es höchstens zwei Gebiete D , so daß das Integral

$$\int_0^1 n(r, D) (1-r)^k dr$$

für $k > \varrho$ divergiert.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß unsere Überlegungen auch auf Funktionen von unendlicher Ordnung anwendbar sind, sobald man ihre Charakteristik mit Funktionen, die ein regelmäßiges Wachstum aufweisen, vergleichen kann. Doch gestalten sich dabei die Rechnungen komplizierter und werden bei Gelegenheit an anderer Stelle durchgeführt werden.

(Eingegangen am 6. Juli 1938.)

Oktaven, Engelscher Komplex, Trialitätsprinzip.

Herrn A. Buhl zum 60. Geburtstag.

Von

E. A. Weiss in Bonn.

Unter den regulären quadratischen Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Räume sind diejenigen ausgezeichnet, deren Dimension als Punktort mit der Dimension als Ort ihrer linearen Räume höchster Dimensionenzahl übereinstimmt. Auf der regulären $\mathfrak{M}_{n-1}^2$ des $\mathfrak{R}_n$ gibt es bekanntlich für $n = 2p$:
 $\infty^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ lineare Räume höchster Dimensionenzahl $\mathfrak{R}_{p-1}$, für $n = 2p - 1$:
 $\infty^{\frac{1}{2}p(p-1)}$ lineare Räume höchster Dimensionenzahl $\mathfrak{R}_{p-1}$. Um die durch die angegebene Eigenschaft ausgezeichneten quadratischen Mannigfaltigkeiten zu finden, hat man daher die beiden quadratischen Gleichungen

$$p^2 - 3p + 2 = 0, \quad p^2 - 5p + 4 = 0$$

zu lösen. Den Lösungen $p = 1$, $p = 2$ der ersten und $p = 1$, $p = 4$ der zweiten Gleichung entsprechen in Räumen gerader Dimensionenzahl der Kegelschnitt der Ebene und die $\mathfrak{M}_3^2$ des $\mathfrak{R}_4$, in Räumen ungerader Dimensionenzahl das Punktpaar der Geraden und die $\mathfrak{M}_6^2$ des $\mathfrak{R}_7$. Schalten wir die trivialen Fälle des Punktpaares und des Kegelschnitts aus, so bleibt die $\mathfrak{M}_3^2$, die eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von Geraden enthält und die $\mathfrak{M}_6^2$, die zwei verschiedene Scharen von je ∞^6 Räumen $\mathfrak{R}_3$ trägt. Zwischen beiden Mannigfaltigkeiten besteht insofern ein grundlegender Unterschied, als die dreidimensionale Mannigfaltigkeit der Geraden von $\mathfrak{M}_3^2$ ein lineares (quaternäres) Gebiet bildet, während die Räume $\mathfrak{R}_3^I$ oder $\mathfrak{R}_3^{II}$ von $\mathfrak{M}_6^2$ jedesmal eine reguläre sechsdimensionale quadratische Mannigfaltigkeit darstellen. Daher ist eine Abbildung der Geraden von $\mathfrak{M}_3^2$ auf die Punkte von $\mathfrak{M}_3^2$ stets mit einer Singularität behaftet, die durch die Projektion der $\mathfrak{M}_3^2$ auf einen linearen Raum entsteht, während die Mannigfaltigkeit der Räume $\mathfrak{R}_3^I$ oder $\mathfrak{R}_3^{II}$ von $\mathfrak{M}_6^2$ auf die Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_6^2$ singularitätenfrei abgebildet werden kann.

Die Abbildung der Geraden von $\mathfrak{M}_3^2$ auf die Punkte von $\mathfrak{M}_3^2$ kommt auf die Abbildung des regulären linearen Komplexes auf den Punktraum hinaus und ist Gegenstand der Lieschen Geraden-Kugel-Transformation. Die Möglichkeit, die $\mathfrak{R}_3^I$ (und $\mathfrak{R}_3^{II}$) von $\mathfrak{M}_6^2$ singularitätenfrei auf die Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ abzubilden, führt zum Trialitätsprinzip. Von diesem handelt die vorliegende Arbeit.

Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie kann bekanntlich abstrakt begründet werden. Einen konkreten, anschaulich faßbaren Sinn erhält es aber erst dadurch, daß die Korrelationen, insbesondere die involutorischen Dualitäten — Polarität und Nullsystem — es gestatten, zu jedem Gebilde ein bestimmtes duales zu konstruieren. So steht auch neben der abstrakten Begründung des Trialitätsprinzips die Konstruktion trialier Figuren mittels involutorischer Trialitäten. Die Untersuchung dieser involutorischen Trialitäten ist das Ziel der folgenden Abhandlung.

In 1. erklären wir das Rechnen mit Oktaven als das Rechnen mit Paaren von Quaternionen¹⁾. In 2. zeigen wir, wie mit Hilfe der Oktaven die Räume $\mathfrak{R}_3^I$ und $\mathfrak{R}_3^{II}$ von $\mathfrak{M}_6^2$ dargestellt werden können. Das Ergebnis stammt von F. Vaney. Doch leiten wir es im Gegensatz zu F. Vaney ohne jede Rechnung (insbesondere ohne von Gleichungen zwischen Oktaven zu Gleichungen zwischen ihren Koordinaten überzugehen) durch eine einfache geometrische Überlegung ab. In 3. behandeln wir die Inzidenzbeziehungen für Räume gleicher oder verschiedener Art. Ein gewisses System von Quaternionengleichungen, auf das wir bei dieser Gelegenheit stoßen, fordert selbständiges Interesse. In 4. stellen wir einige für das folgende wichtige, einander nach dem Trialitätsprinzip entsprechende Figuren zusammen. In 5. werden dann zwei bei der Darstellung von $\mathfrak{M}_6^2$ mittels Oktaven auf $\mathfrak{M}_6^2$ auftretende Nullsysteme behandelt. Bei dieser Gelegenheit tritt der Engelsche Komplex auf, für dessen Behandlung wir unter Verwendung des Trialitätsprinzips in 6. eine neue, rein synthetische Untersuchungsmethode entwickeln. Die Fruchtbarkeit dieser Methode beweisen wir, indem wir sie benutzen, um innerhalb der Ebenengeometrie von $\mathfrak{M}_5^2$ die beiden Grundkonstruktionen des Engelschen Komplexes abzuleiten. In 7. bestimmen wir die möglichen Typen involutorischer Trialitäten und zeigen, daß es unter ihnen zwei und nur zwei gibt, welche die Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ auf ihre $\mathfrak{R}_3^I$ (oder $\mathfrak{R}_3^{II}$) abbilden. Der erste Typ gibt die durch die Oktaven vermittelten, bereits in 5. behandelten Nullsysteme; der zweite Typus ist die Spiegelung an einer auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen Segreschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^4$, die wir zum Schluß in 8. unter Zuhilfenahme der Punktreihen geometrie ausführlich untersuchen.

1. Oktaven als Quaternionenpaare.

Wir bezeichnen mit

$$(1) \quad \alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

¹⁾ Oktaven, behandelt als Paare von Quaternionen, finden sich bereits bei L. E. Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie*, S. 264, Zürich, 1927. Diesen Hinweis verdanke ich E. Bannow.

(α_i gewöhnliche komplexe Zahlen) eine *Quaternion* und schreiben wie üblich:

$$(2) \quad S\alpha = \alpha_0, \quad V\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

$$(3) \quad \alpha = S\alpha + V\alpha, \quad \tilde{\alpha} = S\alpha - V\alpha, \quad \alpha\tilde{\alpha} = N\alpha = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Dann gilt bekanntlich:

$$(4) \quad \tilde{\alpha\beta} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha} \quad \text{und} \quad N(\alpha\beta) = N\alpha \cdot N\beta.$$

Als *Oktave* A bezeichnen wir ein geordnetes Paar von Quaternionen:

$$(5) \quad A = (\alpha, \beta).$$

Zwei Oktaven $A = (\alpha, \beta)$ und $X = (\xi, \eta)$ heißen gleich, wenn $\alpha = \xi, \beta = \eta$. Summe und Differenz der Oktaven A und X und das Produkt einer Oktave A mit einer gewöhnlichen komplexen Zahl c werden durch die Gleichungen

$$(6) \quad A \pm X = (\alpha \pm \xi, \beta \pm \eta), \quad c \cdot A = (c\alpha, c\beta)$$

definiert. Für die Multiplikation zweier Oktaven gelte die Regel:

$$(7) \quad \boxed{AX = (\alpha, \beta)(\xi, \eta) = (\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha).}$$

Mit ihrer Hilfe kann man eine Multiplikationstabelle für die acht Einheiten der Oktave herstellen. Die Tabelle zeigt, daß sich die Einheit $(e_0, 0)$ wie die 1 des komplexen Zahlensystems verhält, so daß man

$$(8) \quad (e_0, 0) = 1$$

setzen darf.

Sie zeigt ferner, daß die hier erklärten Oktaven mit den Graves-Cayleyschen Oktaven identisch sind. Setzt man nämlich für die acht Einheiten der Oktave

$$(9) \quad (e_i, 0) = e_i, \quad (0, e_i) = e'_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

so kann man die Multiplikationstabelle symbolisch so zusammenfassen:

$$(10) \quad e_1 e_2 e_3, \quad -e_1 e'_2 e'_3, \quad -e_2 e'_3 e'_1, \quad -e_3 e'_1 e'_2, \quad -e'_0 e_1 e'_1, \quad -e'_0 e_2 e'_2, \quad -e'_0 e_3 e'_3.$$

Dabei bedeutet z. B. $e_1 e_2 e_3$, daß die Gleichungen

$$(11) \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$$

gelten sollen. Die Multiplikationstabelle (10) stimmt aber bis auf die Bezeichnung mit der von Cayley²⁾ angegebenen überein.

Die Tabelle (10) zeigt, daß die sieben darin angegebenen Tripel gleichberechtigt sind. Es ist also auf sieben wesentlich verschiedene Weisen möglich, die Oktaven als Quaternionenpaare darzustellen. Von dieser Bemerkung werden wir später Gebrauch machen.

²⁾ A. Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions, Phil. Mag. 26 (1845), S. 208 und 211; Coll. Math. Papers 1 (1889), S. 127.

Die Multiplikationstabelle zeigt schließlich, daß für die Multiplikation der Oktaven im allgemeinen weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz gilt. Um so mehr interessieren wir uns im Hinblick auf die folgenden geometrischen Anwendungen für diejenigen Sonderfälle, in denen die Gesetze dennoch gelten. Mit solchen Sonderfällen beschäftigen wir uns im folgenden.

Wir setzen zunächst:

$$(12) \quad A = SA + VA = (S\alpha, 0) + (V\alpha, \beta).$$

Dann wird:

$$(13) \quad \begin{aligned} S(AX) &= S(\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha) = S(\alpha\xi) - S(\tilde{\eta}\beta) \\ &= S(\xi\alpha) - S(\tilde{\beta}\eta) = S(XA). \end{aligned}$$

Hinter dem Zeichen S darf man also in einem Produkt von zwei Faktoren die Reihenfolge dieser Faktoren vertauschen. Wir wollen zeigen, daß hinter dem Zeichen S auch das Assoziativgesetz gilt. Es wird:

$$(14) \quad \begin{aligned} A(XR) &= (\alpha, \beta) \{(\xi, \eta) (\varrho, \sigma)\} \\ &= (\alpha, \beta) (\xi\varrho - \tilde{\sigma}\eta, \eta\tilde{\varrho} + \sigma\xi) \\ &= (\alpha\xi\varrho - \alpha\tilde{\sigma}\eta - \varrho\tilde{\eta}\beta - \tilde{\xi}\tilde{\sigma}\beta, *), \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} (AX)R &= \{(\alpha, \beta) (\xi, \eta)\} (\varrho, \sigma) \\ &= (\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha) (\varrho, \sigma) \\ &= (\alpha\xi\varrho - \tilde{\eta}\beta\varrho - \tilde{\sigma}\beta\tilde{\xi} - \tilde{\sigma}\eta\alpha, *). \end{aligned}$$

Dabei ist aber:

$$(16) \quad S(\alpha\xi\varrho - \alpha\tilde{\sigma}\eta - \varrho\tilde{\eta}\beta - \tilde{\xi}\tilde{\sigma}\beta) = S(\alpha\xi\varrho - \tilde{\eta}\beta\varrho - \tilde{\sigma}\beta\tilde{\xi} - \tilde{\sigma}\eta\alpha),$$

weil man Quaternionen hinter dem Zeichen S zyklisch vertauschen darf³⁾.
So folgt:

$$(17) \quad S(A(XR)) = S((AX)R),$$

und daraus ergibt sich mit Hilfe von (13):

$$(18) \quad S(A(XR)) = S((AX)R) = S(R(AX));$$

d. h.

Satz 1. *Hinter dem Zeichen S darf man Oktaven zyklisch vertauschen:*

$$(19) \quad \boxed{S(A(XR)) = S(R(AX)).}$$

Wir erklären nun die zu $A = (\alpha, \beta)$ konjugierte Oktave durch

$$(20) \quad \tilde{A} = (\tilde{\alpha}, -\beta)$$

³⁾ E. Study, Zur Theorie der linearen Gleichungen, Acta Math. 42 (1920), S. 1—61, vgl. S. 4.

und die Norm von A durch das Produkt $A\tilde{A}$. Dann wird:

$$(21) \quad NA = A\tilde{A} = (\alpha, \beta) (\tilde{\alpha}, -\beta) = (\alpha\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\beta, \beta\alpha - \beta\alpha) = N\alpha + N\beta \\ = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Wir schalten hier eine Bemerkung ein, die uns später die Erörterung einiger uninteressanter Spezialfälle ersparen wird. Wie bereits gesagt, kann ein vorgelegtes System von Oktaven auf sieben wesentlich verschiedene Weisen als System von Quaternionenpaaren dargestellt werden. Offenbar kann man die Darstellung so wählen, daß für eine bestimmte vorgegebene, von Null verschiedene Oktave von verschwindender Norm die Darstellung $A = (\alpha, \beta)$ so ausfällt, daß $N\alpha \neq 0$ wird.

Auf der Beziehung (21) beruht die Möglichkeit der Division. Wir definieren unter der Voraussetzung $NA \neq 0$:

$$(22) \quad A^{-1} = \tilde{A} : NA.$$

Dann wird:

$$(23) \quad \boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = 1.}$$

Für die Konjugierte eines Oktavenproduktes gilt die Beziehung:

$$(24) \quad \boxed{\overline{AX} = \tilde{X}\tilde{A};}$$

denn es wird:

$$(25) \quad \overline{AX} = \overline{(\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha)} = (\tilde{\xi}\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\eta, -\beta\tilde{\xi} - \eta\alpha) \\ = (\tilde{\xi}, -\eta) (\tilde{\alpha}, -\beta) = \tilde{X}\tilde{A}.$$

Während das Assoziativgesetz im allgemeinen nicht gilt, gilt es in dem Sonderfall

$$(26) \quad \boxed{\tilde{A}(AX) = (\tilde{A}A)X = NA \cdot X.}$$

Es ergibt sich nämlich:

$$(27) \quad \tilde{A}(AX) = (\tilde{\alpha}, -\beta) \cdot (\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha) \\ = (\tilde{\alpha}\alpha\xi - \tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta + \xi\tilde{\beta}\beta + \tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta, -\beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta}\eta + \beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha} + \eta\alpha\tilde{\alpha}) \\ = (N\alpha + N\beta) (\xi, \eta) = NA \cdot X,$$

w. z. b. w.

Die Beziehungen (24) und (27) genügen aber nicht, um den folgenden Normenproduktsatz zu beweisen. Für ihn wird vielmehr eine neue Rechnung nötig:

$$\begin{aligned}
 (28) \quad N(A\tilde{X}) &= (A\tilde{X})(\tilde{A}\tilde{X}) = (A\tilde{X})(\tilde{X}\tilde{A}) \\
 &= \{(\alpha, \beta)(\xi, \eta)\} \{(\tilde{\xi}, -\eta)(\tilde{\alpha}, -\beta)\} \\
 &= (\alpha\xi - \tilde{\eta}\beta, \beta\tilde{\xi} + \eta\alpha)(\tilde{\xi}\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\eta, -\eta\alpha - \beta\tilde{\xi}) \\
 &= (N\alpha N\xi + N\beta N\eta + N\alpha N\eta + N\xi N\beta \\
 &\quad + \tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi} + \xi\tilde{\beta}\eta\alpha - \alpha\xi\tilde{\beta}\eta - \tilde{\eta}\beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha}, 0) \\
 &= N\tilde{A} \cdot N\tilde{X} + (\tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi} + \xi\tilde{\beta}\eta\alpha - \alpha\xi\tilde{\beta}\eta - \tilde{\eta}\beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha}, 0).
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß die letzte Oktave verschwindet. Die Quaternion:

$$(29) \quad \varrho = \tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi} + \xi\tilde{\beta}\eta\alpha - \alpha\xi\tilde{\beta}\eta - \tilde{\eta}\beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha}$$

ist nämlich zunächst skalar, weil sie die Summe zweier konjugierter Quaternionen ist. Also gilt:

$$(30) \quad \varrho = 2S(\tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi} - \tilde{\eta}\beta\tilde{\xi}\tilde{\alpha}).$$

Da man aber hinter dem Zeichen S Quaternionen zyklisch vertauschen darf, ergibt sich:

$$(31) \quad \varrho = 2S(\tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi} - \tilde{\alpha}\tilde{\eta}\beta\tilde{\xi}) = 0.$$

So folgt schließlich:

$$(32) \quad \boxed{N(A\tilde{X}) = N\tilde{A} \cdot N\tilde{X}.}$$

Durch Polarisieren der Norm $A\tilde{A}$ entsteht der Ausdruck:

$$(33) \quad A\tilde{X} + X\tilde{A} = 2S(A\tilde{X}) = 2S(\tilde{A}X) = \tilde{A}X + \tilde{X}A.$$

Zwei Oktaven, für welche dieser Ausdruck verschwindet, sollen *normkonjugiert* heißen. Dann folgt:

Satz 2. Sind die Oktaven X, R normkonjugiert, so gilt:

$$R(\tilde{X}A) + X(\tilde{R}A) = 0.$$

Beweis: Es wird:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad (\tilde{X}A) &= (\tilde{\xi}, -\eta)(\alpha, \beta) = (\tilde{\xi}\alpha + \tilde{\beta}\eta, -\eta\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\xi}), \\
 R(\tilde{X}A) &= (\varrho, \sigma)(\tilde{\xi}\alpha + \tilde{\beta}\eta, -\eta\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\xi}) \\
 &= (\varrho\tilde{\xi}\alpha + \varrho\tilde{\beta}\eta + \alpha\tilde{\eta}\sigma - \xi\tilde{\beta}\sigma, \sigma\tilde{\alpha}\xi + \sigma\tilde{\eta}\beta - \eta\tilde{\alpha}\varrho + \beta\tilde{\xi}\varrho)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (35) \quad (\tilde{R}A) &= (\tilde{\varrho}, -\sigma)(\alpha, \beta) = (\tilde{\varrho}\alpha + \tilde{\beta}\sigma, -\sigma\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\varrho}), \\
 X(\tilde{R}A) &= (\xi, \eta)(\tilde{\varrho}\alpha + \tilde{\beta}\sigma, -\sigma\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\varrho}) \\
 &= (\xi\tilde{\varrho}\alpha + \xi\tilde{\beta}\sigma + \alpha\tilde{\sigma}\eta - \varrho\tilde{\beta}\eta, \eta\tilde{\alpha}\varrho + \eta\tilde{\sigma}\beta - \sigma\tilde{\alpha}\xi + \beta\tilde{\varrho}\xi),
 \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
 (36) \quad R(\tilde{X}A) + X(\tilde{R}A) &= ((\varrho\tilde{\xi} + \xi\tilde{\varrho} + \tilde{\eta}\sigma + \tilde{\sigma}\eta)\alpha, (\tilde{\xi}\varrho + \tilde{\varrho}\xi + \sigma\tilde{\eta} + \eta\tilde{\sigma})\beta) \\
 &= (\varrho\tilde{\xi} + \xi\tilde{\varrho} + \tilde{\eta}\sigma + \tilde{\sigma}\eta)(\alpha, \beta) = (R\tilde{X} + X\tilde{R})A.
 \end{aligned}$$

Daher:

(37)

$$R(\tilde{X}A) + X(\tilde{R}A) = \{R\tilde{X} + X\tilde{R}\}A.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Behauptung des Satzes 2. Eine weitere Folgerung ist:

Satz 3. Sind die drei Oktaven A, B, C paarweise normkonjugiert, so können sie in dem Ausdruck

$$A(\tilde{B}C)$$

mit der Maßgabe vertauscht werden, daß bei einer geraden Permutation das Vorzeichen ungeändert bleibt, bei einer ungeraden Permutation wechselt.

Das Oktavenprodukt erhält den Charakter einer dreireihigen Determinante.

2. Darstellung der Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ mit Hilfe der Oktaven.

Wir deuten die Koordinaten der von 0 verschiedenen Oktaven als homogene Punktkoordinaten im $\mathfrak{R}_7$. Dann wird $NX = 0$ die Gleichung einer regulären $\mathfrak{M}_6^2$.

Wir betrachten die Gleichung

$$(1) \quad AX = (SA + VA)X = 0,$$

bringen sie in die Gestalt

$$(2) \quad VA \cdot X = -SA \cdot X,$$

und behaupten zunächst:

Satz 3. Die Verwandtschaft

$$(3) \quad VA \cdot X = U'$$

ist ein Nullsystem ($\mathfrak{N}$).

Beweis. Die Bilinearform, durch deren Nullsetzen die Verwandtschaft entsteht, ist schiefsymmetrisch:

$$(4) \quad \begin{aligned} S\{(VA \cdot X)\tilde{Y}\} &= S\{\overline{(VA \cdot X)\tilde{Y}}\} = S\{Y(\overline{VA \cdot X})\} = S\{Y(\tilde{X} \cdot \overline{VA})\} \\ &= -S\{Y(\tilde{X} \cdot VA)\} = -S\{(VA \cdot Y)\tilde{X}\} \end{aligned}$$

(Satz 1 und 1, (13)).

Satz 4. Das Nullsystem $\mathfrak{N}$ ist, unter Voraussetzung seiner Regularität, mit dem Polarsystem $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{M}_6^2$ vertauschbar.

Beweis. Zu zeigen ist:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{N} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}.$$

Nun hat das Polarsystem der $\mathfrak{M}_6^2 NX = 0$ die Gleichung $X' = U$. Also wird:

$$(5) \quad \begin{aligned} X' &= VA \cdot X, \quad X'' = VA \cdot X' = VA \cdot (VA \cdot X) = -VA \cdot (\overline{VA} \cdot X) \\ &= -N(VA) \cdot X, \end{aligned} \quad (1, (26)).$$

Es wird also dann und nur dann die Identität geliefert, wenn $N(VA) \neq 0$ ist. Daher:

Satz 5. *Notwendig und hinreichend für die Regularität des Nullsystems $U' = VA \cdot X$ ist das Nichtverschwinden von $N(VA)$.*

Von jetzt ab setzen wir zunächst $N(VA) \neq 0$ voraus. Die durch Zusammensetzung des Nullsystems mit der Polarität entstehende Verwandtschaft

$$(6) \quad X' = VA \cdot X$$

ist dann eine *involutorische Kollineation*; denn das Produkt zweier vertauschbarer involutorischer Verwandtschaften ist wieder involutorisch.

Wir wissen, daß die Inzidenzgebiete einer involutorischen Kollineation im $\mathfrak{R}_n$ zwei windschiefe lineare Räume sind, die zusammen den ganzen $\mathfrak{R}_n$ aufspannen. Im $\mathfrak{R}_7$ sind also die Fälle möglich: Punkt und $\mathfrak{R}_6$, Gerade und $\mathfrak{R}_5$, usw. Um zu entscheiden, welcher dieser Fälle hier vorliegt, berufen wir uns auf den Hilfssatz:

Satz 6. *Ein reguläres Nullsystem sei mit einer Polarität vertauschbar. Dann liegt jeder Ruhepunkt der Produktkollineation auf der Inzidenzmannigfaltigkeit der Polarität.*

Da es nun auf $\mathfrak{M}_6^2$ keine linearen Räume höherer Dimensionenzahl gibt als $\mathfrak{R}_3$, folgt, daß die Inzidenzmannigfaltigkeit der involutorischen Kollineation (6) aus zwei $\mathfrak{R}_3$ bestehen muß, und diese müssen, weil sie windschief sind, derselben Familie erzeugender Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ angehören (Satz 10). Also:

Satz 7. *Unter der Voraussetzung $N(VA) \neq 0$ hat die involutorische Kollineation $X' = VA \cdot X$ als Inzidenzgebiete zwei windschiefe $\mathfrak{R}_3$ derselben Art von $\mathfrak{M}_6^2$.*

Um diese $\mathfrak{R}_3$ selbst zu finden, haben wir die Gleichung:

$$(7) \quad cX = VA \cdot X$$

zu lösen, wo c als Wurzel der charakteristischen Gleichung der Kollineation zu wählen ist. Diese charakteristische Gleichung ist vom 8. Grade; aber wir können von vornherein sagen, daß sie den beiden Inzidenz- $\mathfrak{R}_3$ der Kollineation entsprechend nur zwei verschiedene Wurzeln hat. Diese ergeben sich aus

$$(8) \quad VA \cdot (VA \cdot X) = VA \cdot cX = c^2 X,$$

also:

$$(9) \quad -N(VA) \cdot X = c^2 X,$$

oder

$$(10) \quad c^2 + N(VA) = 0.$$

Wir setzen $c = \alpha_0$ und verlangen von der Oktave A , daß sie verschwindende Norm haben soll. Dann folgt:

Satz 8. *Unter der Voraussetzung $N(VA) \neq 0$ haben die beiden Inzidenz- $\mathfrak{R}_3$ der involutorischen Kollineation $X' = VA \cdot X$ die Gleichungen:*

$$+ \alpha_0 X = VA \cdot X, \quad - \alpha_0 X = VA \cdot X.$$

Dabei ist α_0 so bestimmt, daß $\alpha_0 + VA$ eine Oktave von verschwindender Norm wird.

Die bisherigen Überlegungen gelten nur für den Fall $N(VA) \neq 0$. Für diesen Fall ist gezeigt, daß das Gleichungssystem

$$AX = 0, \quad (NA = 0)$$

den Rang 4 besitzt. Kommt nun die zusätzliche Beschränkung $N(VA) = 0$ hinzu, so kann der Rang nicht größer werden. Er kann aber auch nicht kleiner werden. Sonst müßte $A = 0$ sein. Daher wird auch im Falle $N(VA) = 0$, $NA = 0$ durch $AX = 0$ ein auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegener Raum dargestellt.

Auf genau dieselbe Weise zeigt man, daß — unter denselben Voraussetzungen — auch $XA = 0$ einen auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen Raum darstellt. Wir nennen die Räume $AX = 0$ von erster, die Räume $XA = 0$ von zweiter Art. Dann gilt:

Satz 9. *Unter den Voraussetzungen $A \neq 0$, $NA = 0$ stellen die Gleichungen*

$$AX = 0, \quad XA = 0$$

einen Raum 1. Art $\mathfrak{R}_3^I$ und einen Raum 2. Art $\mathfrak{R}_3^{II}$ der $\mathfrak{M}_6^2$ dar⁴⁾.

Zu zeigen bleibt noch, daß auf diese Weise alle Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ geliefert werden. Diesen Beweis holen wir in 5. nach.

3. Inzidenzbedingungen für zwei Räume $\mathfrak{R}_3$ von $\mathfrak{M}_6^2$.

Über den Schnitt zweier Räume $\mathfrak{R}_3$ von $\mathfrak{M}_6^2$ gilt nach C. Segre der Satz:

Satz 10. *Auf $\mathfrak{M}_6^2$ schneiden sich zwei Räume gleicher Art entweder nicht oder gleich in einer Geraden, zwei Räume verschiedener Art entweder in einem Punkte oder gleich in einer Ebene.*

Wir wollen nun die Inzidenzbedingungen für zwei durch Oktaven-gleichungen dargestellte Räume ableiten.

⁴⁾ Dieser Satz stammt von F. Vaney, Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions et le principe de dualité dans l'espace elliptique à 7 dimensions, Thèse, Paris 1929.

Satz 11. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Räume gleicher Art von $\mathfrak{M}_2^2$ sich in einer Geraden schneiden, besteht darin, daß die zugehörigen Oktaven normkonjugiert sind.

Beweis. Haben zwei Räume gleicher Art $AX = 0$, $BX = 0$ einen Punkt C gemeinsam, so daß $AC = 0$, $BC = 0$, so folgt, daß die Punkte A und B im Raume 2. Art $XC = 0$ gelegen und also konjugiert sind. Dann sind die Oktaven A und B normkonjugiert; und umgekehrt.

Satz 12. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Räume verschiedener Art $LX = 0$ und $XR = 0$ sich in einer Ebene schneiden, besteht in dem Verschwinden des Ausdrucks $\tilde{L}\tilde{R}$.

Beweis. Zwei Räume allgemeiner Lage $LX = 0$, $XR = 0$ haben den Punkt $\tilde{L}\tilde{R}$ gemeinsam; denn nach 1 (26) ist:

$$(1) \quad L(\tilde{L}\tilde{R}) = NL \cdot \tilde{R} = 0, \quad (\tilde{L}\tilde{R})R = NR \cdot \tilde{L} = 0.$$

So folgt zwar aus $\tilde{L}\tilde{R} = 0$, daß sich der Rang des Gleichungssystems $LX = 0$, $XR = 0$ verkleinert und daß sich die beiden entsprechenden Räume in einer Ebene schneiden. Es folgt aber nicht ohne weiteres, daß für zwei Räume, die sich in einer Ebene schneiden, notwendig $\tilde{L}\tilde{R}$ verschwinden muß.

Wir wollen diese Behauptung hier ausführlich beweisen, einmal, weil sich in der Literatur ein falscher Satz findet⁵⁾ und dann, weil die folgende Behandlung gewisser Systeme von Quaternionengleichungen ein, auch für sich genommen, interessantes Gegenstück zu den Untersuchungen E. Studys (a. a. O.) über einen einfacheren Typ solcher Systeme bildet.

Die Gleichungen

$$(2L) \quad LX = 0 \text{ mit } NL = 0,$$

$$(2R) \quad XR = 0 \text{ mit } NR = 0$$

fassen nach 1 (7) je zwei Quaternionengleichungen zusammen:

$$(3L) \quad \begin{array}{l} \lambda \xi - \tilde{\eta} \mu = 0, \\ \mu \tilde{\xi} + \eta \lambda = 0, \end{array} \text{ mit } N\lambda + N\mu = 0,$$

$$(3R) \quad \begin{array}{l} \xi \varrho - \tilde{\sigma} \eta = 0, \\ \eta \tilde{\varrho} + \sigma \xi = 0, \end{array} \text{ mit } N\varrho + N\sigma = 0.$$

Nach einer Bemerkung in 1. ist es gestattet, $N\lambda \neq 0$ anzunehmen. Dies sei im folgenden vorausgesetzt. Dann folgt aus der ersten der Gleichungen (3L):

$$(4) \quad \xi = \lambda^{-1} \tilde{\eta} \mu, \quad \tilde{\xi} = \tilde{\mu} \eta \tilde{\lambda}^{-1}.$$

⁵⁾ Satz 11 und sein Beweis findet sich a. a. O. bei F. Vaney. Dort wird aber an Stelle von Satz 12 die Behauptung aufgestellt, auch dafür, daß zwei Räume verschiedener Art sich in einer Ebene schneiden, müßten die entsprechenden Oktaven normkonjugiert sein.

Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung (3 L) ein, so wird sie für alle η identisch erfüllt:

$$(5) \quad \mu \tilde{\xi} + \eta \lambda = \mu \tilde{\mu} \eta \tilde{\lambda}^{-1} + \eta \lambda = -\eta \lambda + \eta \lambda = 0.$$

Diese Gleichung braucht also im folgenden nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Wir führen nun (4) in die erste Gleichung (3 R) ein und erhalten:

$$(6) \quad \begin{aligned} \lambda^{-1} \tilde{\eta} \mu \varrho - \tilde{\sigma} \eta &= 0, \\ \tilde{\lambda} \tilde{\eta} \mu \varrho - \tilde{\lambda} \tilde{\lambda} \tilde{\sigma} \eta &= 0 & \text{wegen } N\lambda \neq 0, \\ \tilde{\eta} \mu \varrho - \lambda \tilde{\sigma} \eta &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir dann zur Abkürzung

$$(7) \quad \delta = \mu \varrho, \quad \varepsilon = \lambda \tilde{\sigma},$$

so erhalten wir eine Gleichung vom Typus:

$$(8) \quad \boxed{\tilde{\eta} \delta - \varepsilon \eta = 0 \quad \text{mit} \quad N\delta - N\varepsilon = 0;}$$

denn es ist:

$$(9) \quad N\delta - N\varepsilon = N\mu \cdot N\varrho - N\lambda \cdot N\sigma = 0.$$

Über Gleichungen vom Typus (8) gilt:

Satz 13. *Die Quaternionengleichung*

$$\tilde{\eta} \delta - \varepsilon \eta = 0 \quad \text{mit} \quad N\delta - N\varepsilon = 0$$

ersetzt ein System von vier homogenen Gleichungen mit vier Unbekannten. Dies System hat im allgemeinen Falle den Rang 3: Man erhält, wenn man die Lösung aus den drei letzten Gleichungen berechnet:

$$\eta = (\delta + \tilde{\varepsilon}) \cdot N(\delta + \tilde{\varepsilon})^6;$$

wenn man die erste und zwei der drei letzten Gleichungen berücksichtigt:

$$\eta = (\delta + \tilde{\varepsilon}) \cdot (\delta \varepsilon)_1, \quad \eta = (\delta + \tilde{\varepsilon}) \cdot (\delta \varepsilon)_2, \quad \eta = (\delta + \tilde{\varepsilon}) \cdot (\delta \varepsilon)_3$$

Dabei bezeichnen $(\delta \varepsilon)_i$ die Koordinaten von $V(\delta \varepsilon)$, also z. B.:

$$(10) \quad (\delta \varepsilon)_1 = \delta_0 \varepsilon_1 + \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_2 \varepsilon_3 - \delta_3 \varepsilon_2.$$

Die Gleichung hat daher im allgemeinen Falle nur eine Lösung:

$$\eta = (\delta + \tilde{\varepsilon}).$$

Der Rang des Gleichungssystems wird aber kleiner als 3, wenn entweder

$$a) \quad \delta + \tilde{\varepsilon} = 0,$$

⁶⁾ Wir sprechen von der Lösung, obwohl nach algebraischem Sprachgebrauch ∞^1 Lösungen $\eta = c \cdot (\delta + \tilde{\varepsilon})$ vorliegen.

oder

$$\text{b) } N(\delta + \tilde{\varepsilon}) = 0 \quad \text{und} \quad V(\delta\varepsilon) = 0.$$

Diese beiden letzten Bedingungen sind äquivalent, vorausgesetzt, daß $N\delta \neq 0$.

Die letzte Behauptung folgt so:

1. Aus a) folgt b); denn $\delta = -\tilde{\varepsilon}$ liefert $N(\delta + \tilde{\varepsilon}) = 0$ und $V(\delta\varepsilon) = -V(\tilde{\varepsilon}\varepsilon) = 0$.

2. Aus b) folgt a) unter der Voraussetzung $N\delta \neq 0$; denn das System der drei Gleichungen

$$(11) \quad V(\delta\varepsilon) = 0$$

hat unter der Voraussetzung $N\delta \neq 0$ nur die Lösungen $\varepsilon = c \cdot \tilde{\delta}$. Setzt man diesen Wert in $N(\delta + \tilde{\varepsilon}) = 0$ ein, so folgt:

$$(12) \quad N(\delta + \tilde{\varepsilon}) = N\{\delta(1+c)\} = N\delta \cdot (1+c)^2 = 0, \quad \text{also } c = -1,$$

und damit $\varepsilon + \tilde{\delta} = 0$, w. z. b. w.

Wir machen nun von dem bewiesenen Satze eine Anwendung auf unser System (3). Unter der Voraussetzung $N\lambda \neq 0$, $N\varrho \neq 0$ ist $N\delta \neq 0$ und es existiert entweder für η nur die Lösung

$$(13) \quad \eta = \delta + \tilde{\varepsilon} = \mu\varrho + \sigma\tilde{\lambda},$$

woraus nach (4)

$$(14) \quad \xi = \lambda^{-1}\tilde{\eta}\mu = \lambda^{-1}\tilde{\varrho}\tilde{\mu}\mu + \lambda^{-1}\lambda\tilde{\sigma}\mu = -\tilde{\lambda}\tilde{\varrho} + \tilde{\sigma}\mu$$

folgt, oder es ist:

$$(15) \quad \mu\varrho + \sigma\tilde{\lambda} = 0, \quad \tilde{\lambda}\tilde{\varrho} - \tilde{\sigma}\mu = 0,$$

und es liegt ein System von ∞^2 Lösungen vor. Bedenken wir jetzt, daß

$$(16) \quad \tilde{L}\tilde{R} = (\tilde{\lambda}, -\mu)(\tilde{\varrho}, -\sigma) = (\tilde{\lambda}\tilde{\varrho} - \tilde{\sigma}\mu, -\mu\varrho - \sigma\tilde{\lambda})$$

ist, so können wir unser Ergebnis — immer noch unter der Voraussetzung $N\lambda \neq 0$, $N\varrho \neq 0$ — in der folgenden Gestalt aussprechen:

Satz 14. Das System der Gleichungen

$$LX = 0, \quad XR = 0 \quad \text{mit} \quad NL = 0, \quad NR = 0$$

hat im allgemeinen nur die Lösung $X = \tilde{L}\tilde{R}$ und dann und nur dann ∞^2 Lösungen, wenn $\tilde{L}\tilde{R} = 0$.

Während wir die Voraussetzung $N\lambda \neq 0$, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, beibehalten dürfen, bleibt uns jetzt noch die Aufgabe, Satz 14 unter der Voraussetzung zu beweisen, daß $N\varrho = N\sigma = 0$.

Unter dieser letzten Voraussetzung sind die beiden Gleichungen (3 R) nicht mehr äquivalent, und es müssen nebeneinander die beiden Gleichungen

$$(17) \quad \tilde{\eta}\delta - \varepsilon\eta = 0, \quad \eta\tilde{\delta} - \tilde{\varepsilon}\tilde{\eta} = 0 \quad \text{mit} \quad N\delta = N\varepsilon = 0$$

betrachtet werden, die sich ergeben, wenn man (4) in diese beiden Gleichungen einsetzt. Nach Satz 13 haben diese beiden Gleichungen die einzige Lösung $\eta = \delta + \tilde{\varepsilon}$, solange nicht entweder $\delta + \tilde{\varepsilon} = 0$ oder zugleich $\delta\varepsilon = 0$, $\varepsilon\delta = 0$ ist. Der letzte Fall bleibt zu untersuchen.

Aus

$$(18) \quad \delta\varepsilon = 0, \quad \varepsilon\delta = 0, \quad N\delta = 0, \quad N\varepsilon = 0$$

folgt unter der Voraussetzung $\delta \neq 0$ ⁷⁾:

$$(19) \quad \varepsilon = c\tilde{\delta},$$

und die Gleichungen (17) nehmen die Gestalt an:

$$(20) \quad \tilde{\eta}\delta - c\tilde{\delta}\eta = 0, \quad \eta\tilde{\delta} - c\delta\tilde{\eta} = 0, \quad \text{mit } N\delta = 0.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $c + 1 = 0$. Das System hat ∞^2 Lösungen, die der Gleichung

$$(21) \quad \delta_0\eta_0 + \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2 + \delta_3\eta_3 = 0$$

genügen. Es wird

$$\delta + \tilde{\varepsilon} = \delta + c\delta = \delta(c + 1) = 0.$$

b) $c + 1 \neq 0$. In diesem Falle stellen die beiden Gleichungen (20) je eine Gerade der Normfläche 2. Ordnung $N\xi = 0$ dar, und diese sind von verschiedener Art. Sie schneiden sich also in einem bestimmten Punkte und dieser ist der Punkt δ . Dabei wird:

$$(22) \quad \delta + \tilde{\varepsilon} = \delta + c\delta = \delta(c + 1) \neq 0.$$

Damit ist Satz 14 für alle Fälle bewiesen.

4. Das Study-Cartansche Trialitätsprinzip.

Auf $\mathfrak{M}_6^2$ haben wir ∞^6 Punkte, $\infty^6 \mathfrak{R}_3^I$ und $\infty^6 \mathfrak{R}_3^{II}$. Wir bezeichnen nun als *inzident* zwei Punkte, wenn sie konjugiert sind, zwei $\mathfrak{R}_3$ derselben Art, wenn sie sich in einer Geraden schneiden, einen Punkt und einen $\mathfrak{R}_3$, wenn der Punkt in dem $\mathfrak{R}_3$ liegt, zwei $\mathfrak{R}_3$ verschiedener Art, wenn sie sich in einer Ebene schneiden. Nicht inzidente Elemente nennen wir *windschief*. Wir haben dann zwei verschiedene Arten von Inzidenzbeziehungen zu unterscheiden, die Inzidenz von Elementen verschiedener Art und die Inzidenz von Elementen der gleichen Art. Dementsprechend haben wir auch analytisch zwei Inzidenzbedingungen. Nach dem Vorhergehenden folgt:

⁷⁾ Verschwindet δ , so lassen wir δ und ε ihre Rollen vertauschen. Es ist nicht möglich, daß δ und ε gleichzeitig verschwinden; denn die Gleichungen $\delta = \mu\rho = 0$, $\varepsilon = \lambda\tilde{\sigma} = 0$ haben wegen $N\mu \neq 0$, $N\lambda \neq 0$ nur die Lösungen $\rho = 0$, $\sigma = 0$, die aber wegen $R = (\rho, \sigma) \neq 0$ ausgeschlossen sind.

Satz 15. Die Inzidenzbedingung für zwei Elemente gleicher Art lautet:

$$A\bar{B} + B\bar{A} = 0.$$

Die Inzidenzbedingung für Elemente verschiedener Art lautet:

$$\tilde{L}\tilde{R} = 0.$$

Hieraus folgt:

Satz 16 (Study-Cartansches Trialitätsprinzip). Ein nur aus Inzidenzbeziehungen folgender Satz über Punkte, $\mathcal{R}_3^I$ und $\mathcal{R}_3^{II}$ von $\mathcal{M}_6^2$ bleibt richtig, wenn man in ihm die Elemente Punkt, $\mathcal{R}_3^I$, $\mathcal{R}_3^{II}$ beliebig vertauscht⁸⁾.

Wir wollen nun die einfachsten, zueinander trialen Figuren der $\mathcal{M}_6^2$, soweit wir sie im folgenden brauchen werden, nacheinander besprechen.

Satz 17. Die Figur einer Geraden von $\mathcal{M}_6^2$ ist zu sich selbst trial: Eine Gerade ist zugleich Trägerin von ∞^1 Punkten, $\infty^1 \mathcal{R}_3^I$, $\infty^1 \mathcal{R}_3^{II}$ und jedes ihrer Elemente ist mit jedem anderen ihrer Elemente inzident.

Beweis. Um eine Vorstellung von den durch eine vorgegebene Gerade $\mathcal{G}$ laufenden Räumen zu erhalten, betrachten wir den Polar- $\mathcal{R}_5$ der Geraden. Er schneidet $\mathcal{M}_6^2$ in einer $\mathcal{M}_4^2$, die $\mathcal{G}$ als Ort singulärer Punkte enthält und daher entsteht, wenn man jeden Punkt der Geraden mit jedem Punkte einer regulären Fläche 2. Ordnung verbindet. Diese enthält $2 \cdot \infty^1$ Geraden. Verbindet man eine solche Gerade mit $\mathcal{G}$, so erhält man einen durch $\mathcal{G}$ laufenden $\mathcal{R}_3$, und zwar ergeben die Erzeugenden der einen Art Räume $\mathcal{R}_3^I$, die Erzeugenden der anderen Art $\mathcal{R}_3^{II}$; denn zwei zu Erzeugenden verschiedener Art gehörige $\mathcal{R}_3$ schneiden sich in einer Ebene, der Verbindungsebene von $\mathcal{G}$ mit dem Schnittpunkt der Erzeugenden, während zwei zu Erzeugenden derselben Art gehörige Räume nur die Gerade $\mathcal{G}$ gemeinsam haben.

So ist gezeigt, daß die Gerade Ort von ∞^1 Punkten, $\infty^1 \mathcal{R}_3^I$ und $\infty^1 \mathcal{R}_3^{II}$ ist. Jeder Punkt ist zu jedem anderen konjugiert und liegt in jedem der Räume, zwei Räume gleicher Art schneiden sich in $\mathcal{G}$, zwei Räume verschiedener Art in einer durch $\mathcal{G}$ laufenden Ebene, w. z. b. w.

Eine Ebene von $\mathcal{M}_6^2$ kann als Schnitt eines $\mathcal{R}_3^I$ und eines mit ihm inzidenten $\mathcal{R}_3^{II}$ angesehen werden (durch jede Ebene von $\mathcal{M}_6^2$ läuft je ein Raum der beiden Familien). Die Ebene ist als Ort ihrer ∞^2 Geraden ein Geradenfeld. Trial zu einem Geradenfeld ist das in einem Raume $\mathcal{R}_3^I$ ($\mathcal{R}_3^{II}$) gelegene Geradenbündel 1. Art (2. Art), das durch einen mit diesem Raume inzidenten Punkt bestimmt wird. Wie jeder Punkt der Ebene ∞^1 Geraden des Feldes angehört und jede Gerade ∞^1 Punkte der Ebene enthält, so enthält jeder zugleich mit dem Punkte und dem $\mathcal{R}_3^I$ des Geradenbündels inzidente $\mathcal{R}_3^{II}$ ein Geraden-

⁸⁾ E. Study, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 12 (1913), S. 36—60 (VIII); É. Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semisimples, Bull. des sc. math. 49 (1925), S. 361 bis 374.

büschel, und jede Gerade des Bündels ist in ∞^1 solchen Geradenbüscheln, also ∞^1 zugleich mit dem Punkte und dem $\mathcal{R}_3^I$ des Geradenbündels inzidenten $\mathcal{R}_3^{II}$ enthalten. So folgt:

Satz 18. *Zu einer als Geradenfeld aufgefaßten Ebene von $\mathcal{M}_6^2$ ist trial ein Geradenbündel 1. Art (oder 2. Art), Ort aller durch einen Punkt eines $\mathcal{R}_3^I$ ($\mathcal{R}_3^{II}$) und in diesem Raume verlaufenden Geraden.*

Wir behandeln nun die Figuren, die zu den verschiedenen auf $\mathcal{M}_6^2$ gelegenen regulären quadratischen Punktmannigfaltigkeiten trial sind. Diese stehen sich paarweise polar gegenüber. Polar zu einer Geraden des $\mathcal{R}_7$ ist ein $\mathcal{R}_5$, polar zu einem Paare nicht konjugierter Punkte von $\mathcal{M}_6^2$ eine reguläre $\mathcal{M}_4^2$. Wie die $\mathcal{M}_4^2$ von allen Punkten der $\mathcal{M}_6^2$ erfüllt wird, die zugleich zu den beiden vorgegebenen Punkten konjugiert sind, so wird die zu ihr triale $\mathcal{R}_3^I - \mathcal{M}_4^2$ von allen $\mathcal{R}_3^I$ gebildet, die mit zwei windschiefen $\mathcal{R}_3^I$ inzident sind. Zu jeder Geraden des einen Raumes gehört eine bestimmte polare Gerade des anderen Raumes. Der Verbindungsraum der beiden Geraden ist ein $\mathcal{R}_3^I$ der Mannigfaltigkeit. Da die $\mathcal{R}_3^I$ dieser Mannigfaltigkeit nach der eben angegebenen Weise den Geraden eines Raumes $\mathcal{R}_3$ eindeutig-umkehrbar entsprechen, läßt sich die Mannigfaltigkeit (nach F. Klein) eindeutig-umkehrbar auf die Punkte einer $\mathcal{M}_4^2$ abbilden. Also:

Satz 19. *Eine reguläre $\mathcal{R}_3^I - \mathcal{M}_4^2$ der $\mathcal{M}_6^2$ besteht aus allen $\mathcal{R}_3^I$, die mit zwei windschiefen $\mathcal{R}_3^I$ gleichzeitig inzident sind.*

Analoges gilt hier, wie im folgenden, von der entsprechenden $\mathcal{R}_3^{II}$ -Mannigfaltigkeit.

Zu einer Ebene des $\mathcal{R}_7$ ist ein $\mathcal{R}_4$ polar, dem Kegelschnitt der $\mathcal{M}_6^2$ steht eine reguläre $\mathcal{M}_3^2$ polar gegenüber. Da die Ebene eines regulären Kegelschnittes durch drei paarweise windschiefe Punkte aufgespannt wird, besteht die zur Punkt- $\mathcal{M}_3^2$ triale $\mathcal{R}_3^I - \mathcal{M}_3^2$ aus allen $\mathcal{R}_3^I$, die mit drei paarweise windschiefen $\mathcal{R}_3^I$ inzident sind. Wir bezeichnen die drei Räume mit $\mathcal{R}_\alpha^I, \mathcal{R}_\beta^I, \mathcal{R}_\gamma^I$. Wir behaupten dann:

Satz 20. *Drei paarweise windschiefe Räume $\mathcal{R}_\alpha^I, \mathcal{R}_\beta^I, \mathcal{R}_\gamma^I$ von $\mathcal{M}_6^2$ bestimmen eine ganz auf $\mathcal{M}_6^2$ gelegene Segresche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_4^2$.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß durch jeden Punkt von $\mathcal{R}_\alpha^I$ eine ganz auf $\mathcal{M}_6^2$ gelegene gemeinsame Treffgerade von $\mathcal{R}_\beta^I$ und $\mathcal{R}_\gamma^I$ läuft. Verbinden wir nun einen Punkt $\mathcal{P}$ von $\mathcal{R}_\alpha^I$ mit $\mathcal{R}_\gamma^I$ durch einen $\mathcal{R}_4$, so schneidet dieser $\mathcal{R}_\beta^I$ in einem Punkte $\mathcal{P}'$. Die Verbindungslinie $\mathcal{P}\mathcal{P}'$ schneidet dann die drei Räume und liegt, weil sie $\mathcal{M}_6^2$ in drei Punkten schneidet, ganz auf $\mathcal{M}_6^2$.

Wir setzen als bekannt voraus, daß die Segresche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_4^2$ ∞^1 paarweise windschiefe Räume $\mathcal{R}_3$ und ∞^3 erzeugende Geraden enthält, derart, daß jede Gerade jeden Raum in einem Punkte schneidet und daß

auf diese Weise zwischen zwei beliebigen Räumen der $\mathcal{M}_4^4$ eine Kollineation $\mathcal{K}$ hergestellt wird ⁹⁾.

In unserem Falle entsteht nun überdies in jedem erzeugenden Raume von $\mathcal{M}_4^4$ ein Nullsystem $\mathcal{N}$. Dem Punkte $\mathfrak{P}$ des Raumes $\mathcal{R}_\alpha^1$ entspricht vermöge $\mathcal{K}$ der Punkt $\mathfrak{P}'$. Dem Punkte $\mathfrak{P}'$ entspricht vermöge der Polarität an $\mathcal{M}_6^2$ ein $\mathcal{R}_6$, der $\mathcal{R}_\alpha^1$ in einer Ebene schneidet. Diese Ebene läuft durch $\mathfrak{P}$; denn die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ sind als Punkte einer ganz auf $\mathcal{M}_6^2$ gelegenen Geraden zueinander konjugiert. So wird jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathcal{R}_\alpha^1$ durch eine reguläre Projektivität eine durch $\mathfrak{P}$ laufende Ebene zugeordnet. Es entsteht in jedem Raume ein Nullsystem $\mathcal{N}$ und ein mit ihm verbundener regulärer linearer Komplex $\mathcal{C}$.

Betrachten wir nun einen Raum $\mathcal{R}_3^1$, der mit den drei vorgegebenen Räumen $\mathcal{R}_\alpha^1$, $\mathcal{R}_\beta^1$, $\mathcal{R}_\gamma^1$ der $\mathcal{M}_4^4$ inzident ist. Die drei (in $\mathcal{R}_3^1$ gelegenen) Schnittgeraden bestimmen einen Regulus (Erzeugende 1. Art) von gemeinsamen Treffgeraden, die — als Treffgeraden von drei verschiedenen Räumen von $\mathcal{M}_4^4$ — Erzeugende von $\mathcal{M}_4^4$ werden. Indem eine solche Erzeugende jeden erzeugenden Raum von $\mathcal{M}_4^4$ schneidet, ist der vorgegebene $\mathcal{R}_3^1$ mit allen Räumen von $\mathcal{M}_4^4$ inzident und schneidet also jeden von ihnen in einer Geraden des konjugierten Regulus (Erzeugende 2. Art).

Wir untersuchen nun die im Raume $\mathcal{R}_\alpha^1$ gelegene Erzeugende 2. Art $\mathcal{C}_\alpha$. Ihr entspricht vermöge $\mathcal{K}$ im Raume $\mathcal{R}_\beta^1$ die in diesem Raume gelegene Erzeugende 2. Art $\mathcal{C}_\beta$. Der Erzeugenden $\mathcal{C}_\beta$ wird aber durch das Polarsystem von $\mathcal{M}_6^2$ im Raume $\mathcal{R}_\alpha^1$ wieder die Gerade $\mathcal{C}_\alpha$ zugeordnet: $\mathcal{C}_\alpha$ und $\mathcal{C}_\beta$ sind polar, weil ihr Verbindungsraum $\mathcal{R}_3^1$ ganz auf $\mathcal{M}_6^2$ liegt. Also ist $\mathcal{C}_\alpha$ eine Gerade des im Raume $\mathcal{R}_\alpha^1$ gelegenen linearen Komplexes $\mathcal{C}_\alpha$.

Damit ist folgendes gezeigt:

Satz 21. *Trial zu einer Punkt- $\mathcal{M}_1^2$ (Kegelschnitt) der $\mathcal{M}_6^2$ ist eine $\mathcal{R}_3^1 - \mathcal{M}_1^2$, eine Segresche $\mathcal{M}_4^4$ als Ort ihrer ∞^1 erzeugenden Räume $\mathcal{R}_3^1$. In jedem Raume $\mathcal{R}_\alpha^1$ dieser $\mathcal{M}_4^4$ liegt ein regulärer linearer Komplex $\mathcal{C}_\alpha$, und die Geraden dieser Komplexe entsprechen sich vermöge der von den Erzeugenden der $\mathcal{M}_4^4$ vermittelten kollinearen Verwandtschaft $\mathcal{K}$ zwischen den erzeugenden Räumen von $\mathcal{M}_4^4$. Je ∞^1 zusammengehörige Komplexgeraden der erzeugenden Räume spannen eine Fläche 2. Ordnung und damit einen $\mathcal{R}_3$ auf. So entstehen ∞^3 Räume $\mathcal{R}_3^1$. Diese sind vermöge der angegebenen Konstruktion eindeutig-umkehrbar auf die Geraden eines regulären linearen Komplexes und damit (nach F. Klein) auf die Punkte einer regulären $\mathcal{M}_3^2$ abgebildet. Sie bilden eine reguläre $\mathcal{R}_3^1 - \mathcal{M}_3^2$. Jeder Raum der $\mathcal{R}_3^1 - \mathcal{M}_1^2$ ist mit jedem Raum der $\mathcal{R}_3^1 - \mathcal{M}_3^2$ inzident.*

⁹⁾ Vgl. C. Segre, Mehrdimensionale Räume, Encyklopädie der Math. Wissenschaften 3. Bd., 2. Teil, 2. Hälfte, Teilband A, S. 829 und die dort angegebene Literatur.

Zu einem $\mathfrak{R}_3$ ist im $\mathfrak{R}_7$ ein $\mathfrak{R}_3$ polar, zu einer $\mathfrak{M}_2^2$ von $\mathfrak{M}_6^2$ eine $\mathfrak{M}_2^2$. Es ist zweckmäßig, die beiden zueinander polaren $\mathfrak{M}_2^2$ zu einer einzigen Figur zusammenzufassen. Dann gilt nämlich:

Satz 22. *Die Figur zweier auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegener zueinander polarer $\mathfrak{M}_2^2$ ist zu sich selbst trial.*

Beweis. Die Figur enthält je zwei Familien von je ∞^2 Elementen jeder Art, zunächst zwei Familien von je ∞^2 Punkten, die beiden Flächen 2. Ordnung $\mathfrak{M}_\alpha^2$ und $\mathfrak{M}_\beta^2$. Auf jeder der beiden $\mathfrak{M}_2^2$ liegen zwei Scharen von Erzeugenden. Verbindet man nun jede Erzeugende 1. Art von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ mit jeder Erzeugenden 1. Art von $\mathfrak{M}_\beta^2$ und ebenso jede Erzeugende 2. Art mit jeder Erzeugenden 2. Art, so erhält man zwei Familien von Räumen $\mathfrak{R}_3^I$ (wir denken uns die Bezeichnung so eingerichtet) und, wenn man Erzeugende 1. und 2. Art miteinander verbindet, zwei Familien von Räumen $\mathfrak{R}_3^{II}$. Jede dieser Familien bildet als doppelbinäres Gebiet eine quadratische Mannigfaltigkeit.

Über die Inzidenzen von Elementen gleicher Art ist zu sagen, daß *jedes Element einer Familie mit den Elementen zweier derselben Familie angehöriger Geraden* (vgl. Satz 17) *und allen Elementen der anderen Familie inzident ist*. So ist ein Punkt von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ zu den Punkten der beiden durch ihn hindurchlaufenden Erzeugenden von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ und außerdem zu allen Punkten von $\mathfrak{M}_\beta^2$ konjugiert. Ein $\mathfrak{R}_3^I$, der als Verbindungsraum der Erzeugenden 1. Art $\mathfrak{G}_\alpha$ und $\mathfrak{G}_\beta$ entstanden ist, ist inzident mit den $2 \cdot \infty^1$ $\mathfrak{R}_3^I$, die entstehen, wenn man $\mathfrak{G}_\alpha$ (bzw. $\mathfrak{G}_\beta$) mit allen Erzeugenden 1. Art von $\mathfrak{M}_\beta^2$ (bzw. $\mathfrak{M}_\alpha^2$) verbindet und außerdem mit allen $\mathfrak{R}_3^I$, die durch Verbinden von zwei Erzeugenden 2. Art entstehen.

Über die Inzidenz von Elementen verschiedener Art ist zu sagen, daß *jedes Element in zwei Geraden enthalten ist*. Ein Punkt von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ liegt auf den beiden durch ihn hindurchlaufenden Erzeugenden von $\mathfrak{M}_\alpha^2$, die jetzt als Träger der ∞^1 durch sie hindurchlaufenden Räume $\mathfrak{R}_3^I$ und $\mathfrak{R}_3^{II}$ anzusehen sind. Ein Raum $\mathfrak{R}_3^I$ enthält die beiden Erzeugenden $\mathfrak{G}_\alpha$ und $\mathfrak{G}_\beta$ von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ und $\mathfrak{M}_\beta^2$, die er verbindet. Er enthält einerseits deren Punkte und ist andererseits inzident mit den $2 \cdot \infty^1$ Räumen $\mathfrak{R}_3^{II}$, die $\mathfrak{G}_\alpha$ mit einer Erzeugenden 2. Art von $\mathfrak{M}_\beta^2$ oder $\mathfrak{G}_\beta$ mit einer Erzeugenden 2. Art von $\mathfrak{M}_\alpha^2$ verbinden.

Hiermit sind sämtliche reguläre auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen $\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{M}_n^2$ behandelt, bis auf die $\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{M}_5^2$, die in der nächsten Nummer untersucht werden wird.

5. Die durch die Oktavendarstellung auf $\mathfrak{M}_6^2$ entstehenden Nullsysteme.

Wir beginnen diese Nummer mit der früher zurückgestellten Aufgabe, nachzuweisen, daß durch die Oktavengleichungen $AX = 0$, $XA = 0$, $NA = 0$ alle Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ geliefert werden. Vorgegeben sei ein beliebiger $\mathfrak{R}_3^{II}$. Wir wollen eine Oktave angeben, mit deren Hilfe seine Gleichung ange-

geschrieben werden kann. Zu diesem Zwecke wählen wir im $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ drei linear-unabhängige Punkte A, B, C , die dann paarweise konjugiert sind. Wir behaupten:

Satz 23. Sind A, B, C drei paarweise konjugierte Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$, so stellt

$$(1) \quad X(\tilde{A}(B\tilde{C})) = 0,$$

falls die Gleichung nicht identisch erfüllt wird, den durch die Ebene ABC hindurchlaufenden $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ dar.

Beweis. Es ist:

$$(2) \quad A(\tilde{A}(B\tilde{C})) = NA \cdot (B\tilde{C}) = 0, \quad (1, (26)),$$

ferner

$$(3) \quad B(\tilde{A}(B\tilde{C})) = -B(\tilde{B}(A\tilde{C})) = -NB \cdot (A\tilde{C}) = 0 \quad (\text{Satz 3}),$$

$$(4) \quad C(\tilde{A}(B\tilde{C})) = +C(\tilde{C}(A\tilde{B})) = +NC \cdot (A\tilde{B}) = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nach dem bewiesenen Satze kann man für jedes Punktetripel A, B, C , für welches das Produkt $D = \tilde{A}(B\tilde{C})$ nicht verschwindet, den Raum 2. Art in der Gestalt $XD = 0$ darstellen. Wir müssen jetzt die Ausnahmetripel untersuchen.

Satz 24. Verschwindet in einer Ebene der $\mathfrak{M}_6^2$ für ein Tripel linear-unabhängiger Punkte der Ausdruck $\tilde{A}(B\tilde{C})$, so verschwindet dieser Ausdruck für alle Punktetripel der Ebene.

Beweis. Es seien A, B, C drei linear unabhängige Punkte einer Ebene und

$$(5) \quad \begin{aligned} A' &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, \\ B' &= \mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C, \\ C' &= \nu_1 A + \nu_2 B + \nu_3 C \end{aligned}$$

drei beliebige Punkte dieser Ebene. Dann wird:

$$(6) \quad \begin{aligned} \tilde{A}'(B'\tilde{C}') &= (\lambda_1 \tilde{A} + \lambda_2 \tilde{B} + \lambda_3 \tilde{C}) \{(\mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C)(\nu_1 \tilde{A} + \nu_2 \tilde{B} + \nu_3 \tilde{C})\} \\ &= |\lambda_1 \mu_2 \nu_3| \cdot \tilde{A}(B\tilde{C}). \end{aligned} \quad (\text{Satz 3}).$$

Aus dieser Gleichung folgt Satz 24 und die triviale Bemerkung, daß $\tilde{A}(B\tilde{C})$ immer dann verschwindet, wenn die drei Punkte A, B, C linear-abhängig sind.

Nach Satz 24 haben wir auf $\mathfrak{M}_6^2$ zwischen zwei Arten von Ebenen zu unterscheiden, solchen, für die der Ausdruck $\tilde{A}(B\tilde{C})$ verschwindet und solchen, für die er nicht identisch verschwindet. Wir wollen zunächst zeigen, daß es wirklich Ebenen der ersten Art gibt. Diese wollen wir aus einem später ersichtlichen Grunde *Nullebenen* nennen.

Satz 25. Im Raume $X\tilde{D} = 0$ sind die durch den Punkt D laufenden Ebenen Nullebenen.

Beweis. Wir denken uns eine Ebene durch D durch den Punkt D selbst und zwei Punkte A und B des Raumes $X\tilde{D} = 0$ aufgespannt. Für diese gilt dann: $A\tilde{D} = 0$ und $B\tilde{D} = 0$. Daher folgt: $\tilde{A}(B\tilde{D}) = 0$, w. z. b. w.

Wir zeigen nun, daß nur die durch D laufenden Ebenen des Raumes $X\tilde{D} = 0$ Nullebenen sind. Hierzu dient der Hilfssatz:

Ist im Raume $X\tilde{D} = 0$ eine nicht durch D laufende Ebene Nullebene, so sind alle Ebenen des Raumes Nullebenen.

Beweis. Es sei A, B, C ein Tripel linear-unabhängiger Punkte des Raumes $X\tilde{D} = 0$, deren Verbindungsebene nicht durch D läuft. Dann können drei beliebige Punkte des Raumes folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A' &= \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D, \\ (7) \quad B' &= \mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C + \mu_4 D, \\ C' &= \nu_1 A + \nu_2 B + \nu_3 C + \nu_4 D. \end{aligned}$$

Für diese Punkte wird:

$$(8) \quad \tilde{A}'(B'\tilde{C}') = |\lambda_1 \mu_2 \nu_3| \tilde{A}(B\tilde{C}),$$

weil alle Ausdrücke, in denen D erscheint, wegen Satz 25 verschwinden. Die Gleichung (8) beweist den Satz.

Wir wollen nun zeigen, daß die Annahme, daß alle Ebenen eines Raumes Nullebenen sind, falsch ist. Es handele sich wieder um den Raum 2. Art $X\tilde{D} = 0$. Wir wählen darin B und C so, daß $C\tilde{B} \neq 0$. Durch $(C\tilde{B})X = 0$ wird dann ein $\mathfrak{R}_3^1$ bestimmt, der $X\tilde{D} = 0$ höchstens in einer Ebene schneidet. Wir wählen A außerhalb dieser Ebene. Dann ist $(C\tilde{B})A \neq 0$. Dann ist aber auch $\tilde{A}(B\tilde{C}) \neq 0$, w. z. b. w.

Damit ist erstens gezeigt, daß im Raume $X\tilde{D} = 0$ nur die Ebenen durch den Punkt D Nullebenen sind und zweitens, daß alle Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ durch Oktavengleichungen dargestellt werden können:

Satz 26. Die Gleichungen

$$AX = 0, \quad XA = 0, \quad NA = 0$$

stellen alle Räume 1. und 2. Art von $\mathfrak{M}_6^2$ dar.

Der von uns geprägte Name Nullebene erhält nun durch den folgenden Satz seine Rechtfertigung:

Satz 27. Durch ihre Darstellung mit Hilfe der Oktaven sind auf $\mathfrak{M}_6^2$ zwei „Nullsysteme“ definiert. Das Nullsystem 1. Art ordnet dem Punkte D den durch ihn hindurch laufenden Raum 1. Art $\tilde{D}X = 0$, das Nullsystem 2. Art dem Punkte D den durch ihn hindurch laufenden Raum 2. Art $X\tilde{D} = 0$ zu.

So wird in jedem $\mathfrak{R}_3^I$ und in jedem $\mathfrak{R}_3^{II}$ ein Ebenenbündel als Bündel von Nullebenen ausgezeichnet. Diese Ebenen sind im Nullsystem 1. Art dadurch ausgezeichnet, daß für alle Punktetripel $(\bar{A} B) \bar{C}$, im Nullsystem 2. Art dadurch, daß für alle Punktetripel $\bar{A} (B \bar{C})$ verschwindet.

Daß auf diese Weise zwei verschiedene Systeme von je ∞^8 Nullebenen entstehen, wird sich im folgenden ergeben, wenn wir die Bedingungen dafür untersuchen, daß eine Nullebene zugleich beiden Systemen angehört.

Wir betrachten den Raum 1. Art $\bar{A} Y = 0$ und einen Raum 2. Art $Y \bar{X} = 0$ und setzen voraus, daß sie sich in einer Ebene schneiden. Soll dann diese Ebene eine Nullebene beider Arten sein, so muß sie die Punkte A und X enthalten; d. h. notwendig und hinreichend dafür, daß sich die Räume $\bar{A} Y = 0$ und $Y \bar{X} = 0$ in einer gemeinsamen Nullebene der beiden Systeme schneiden, ist das Bestehen der Gleichungen

$$(8) \quad \bar{A} X = 0, \quad A \bar{X} = 0.$$

Bestehen diese beiden Gleichungen, so schneiden sich die beiden Räume von selbst in einer Ebene, so daß diese Voraussetzung fortgelassen werden kann; denn entweder sind die beiden Punkte A und X verschieden — dann haben die beiden Räume zwei verschiedene Punkte gemeinsam und schneiden sich also in einer Ebene oder die Punkte A und X fallen zusammen. In diesem letzten Falle handelt es sich um die Räume $\bar{A} Y = 0$, $Y \bar{A} = 0$, die wir später gesondert behandeln, dann nämlich, wenn wir das gleichgebaute System der Gleichungen (8) erledigt haben.

Wir fragen jetzt nach den Lösungen des Gleichungssystems (8) oder der Gleichungen:

$$(9) \quad \bar{A} X = 0, \quad X \bar{A} = 0.$$

Nach Satz 12 hängt die Art der Lösung von dem Verhalten des Ausdrucks AA ab. Es ist aber:

$$(10) \quad \begin{aligned} AA &= (\alpha, \beta) (\alpha, \beta) = (\alpha\alpha - \tilde{\beta}\tilde{\beta}, \beta\tilde{\alpha} + \beta\alpha) = (\alpha\alpha + \alpha\tilde{\alpha}, \beta\tilde{\alpha} + \beta\alpha) \\ &= (\alpha + \tilde{\alpha}) \cdot (\alpha, \beta) = 2 SA \cdot A. \end{aligned}$$

Wegen $A \neq 0$ folgt:

Satz 28. *Die Gleichungen*

$$(11) \quad \bar{A} X = 0, \quad X \bar{A} = 0$$

haben im Falle $SA \neq 0$ nur eine gemeinsame Lösung $X = A$, im Falle $SA = 0$ ∞^2 Lösungen.

Im ersten Falle schneiden sich die beiden Räume (11) nur in einem Punkte A , im zweiten Falle schneiden sie sich in einer durch den Punkt A laufenden Ebene des $\mathfrak{R}_6$ $SX = 0$.

Damit ist zunächst der oben erwähnte Sonderfall erledigt: Die Räume $\tilde{A}X = 0$, $X\tilde{A} = 0$ schneiden sich dann und nur dann in einer gemeinsamen Nullebene beider Systeme, wenn $SA = 0$ ist. Zusammenfassend können wir das Gesamtergebnis so aussprechen:

Satz 29. *Sollen sich die beiden Räume $\tilde{A}Y = 0$ und $Y\tilde{X} = 0$ in einer gemeinsamen Nullebene beider Systeme schneiden, so muß entweder $X = A$ und $SA = 0$ sein oder $SA = 0$, $SX = 0$ und $\tilde{A}X = 0$. Das Bestehen der Gleichung $X\tilde{A} = 0$ folgt dann von selbst.*

Es sei jetzt der Raum $\tilde{A}Y = 0$ mit $SA = 0$ vorgegeben. Wir wählen X beliebig in diesem Raume — $\tilde{A}X = 0$ —, jedoch so, daß $SX = 0$ wird. Dann folgt $A\tilde{X} = 0$; d. h. A ist in dem Raume $Y\tilde{X} = 0$ enthalten. Danach erhalten die Räume $\tilde{A}Y = 0$ und $Y\tilde{X} = 0$ die Punkte A und X und schneiden sich also in einer Ebene, welche durch diese Punkte läuft. Da A und X auf dem $\mathfrak{R}_6 SY = 0$ liegen, ergibt sich:

Satz 30. *Nullebenen, die gleichzeitig beiden Nullsystemen angehören, gibt es nur in Räumen $\tilde{A}X = 0$ oder $X\tilde{A} = 0$ mit $SA = 0$. In jedem solchen Raume gibt es ein Bündel, das Bündel durch den Punkt A .*

Die beiden Systeme von je ∞^8 Nullebenen durchdringen sich daher in einem Systeme von ∞^7 Ebenen.

Es sei nun A der im Raume $\tilde{A}Y = 0$ mit $SA = 0$ ausgezeichnete Punkt, E die Ebene, in der der Raum den $\mathfrak{R}_6 SY = 0$ schneidet. X sei ein Punkt dieser Ebene. Läßt man dann X auf einer durch A laufenden Geraden wandern, so entsprechen den verschiedenen Punkten X die ∞^1 verschiedenen durch die Gerade laufenden $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$. Sie schneiden aus dem vorgegebenen $\mathfrak{R}_3^{\text{I}}$ das Büschel der Ebenen aus, das die vorgegebene Gerade zur Achse hat. Im Büschel ausgezeichnet ist die Ebene E . Sie entspricht dem Punkte A selbst.

Hält man jetzt umgekehrt den Punkt X fest und läßt A laufen, so erhält man in dem, dem Punkt X entsprechenden $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ ein Büschel von Ebenen durch die ausgezeichnete Gerade. Daher enthält diese Gerade ∞^2 gemeinsame Nullebenen beider Systeme in der Weise, daß jede Ebene sich als Schnitt eines $\mathfrak{R}_3^{\text{I}}$ und eines $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ ergibt, die zwei Punkten der Geraden entsprechen. Die Geraden, die wir so als Achsen von Nullebenen gewonnen haben, wollen wir *Nullgeraden* nennen.

In jedem Raume $\mathfrak{R}_3^{\text{I}} \tilde{A}X = 0$ mit $SA = 0$ gibt es ∞^1 Nullgeraden, die Geraden durch den Punkt A in der Schnittebene des Raumes mit dem $\mathfrak{R}_6 SY = 0$. Also gibt es im ganzen ∞^5 Nullgeraden.

Satz 31. *Auf der von dem $\mathfrak{R}_6 SX = 0$ aus $\mathfrak{M}_6^2$ ausgeschnittenen $\mathfrak{M}_3^2$ gibt es ein System von ∞^5 Nullgeraden. Jede Nullgerade enthält ein System von ∞^2 Ebenen, die gleichzeitig Nullebenen beider Systeme sind. Die Ebenen ent-*

sprechen den geordneten Punktpaaren der Geraden in der Weise, daß jede Ebene als Schnitt der Räume 1. und 2. Art entsteht, die den Punkten des Paares in der vorgeschriebenen Reihenfolge entsprechen. Den Doppelpunkten der Geraden entsprechen dabei Ebenen, die der $\mathfrak{M}_5^2$ selbst angehören.

Richten wir unser Augenmerk jetzt nur noch auf die ∞^5 auf $\mathfrak{M}_5^2$ gelegenen Punkte, Geraden und die Ebenen, die den Punkten nach dem letzten Satz zugeordnet werden. Dann entspricht jedem Punkte von $\mathfrak{M}_5^2$ eine durch ihn hindurchlaufende Ebene. Der Punkt bestimmt mit der Ebene ein Büschel von Nullgeraden, und die Nullebene eines Punktes dreht sich um die Nullgerade, wenn der Nullpunkt auf der Nullgeraden fortschreitet. Wir sind so auf das von F. Engel auf der $\mathfrak{M}_5^2$ entdeckte Analogon zum linearen Komplex des R_3 gekommen. Wir können daher sagen:

Satz 32. Ebenen der $\mathfrak{M}_5^2$, die gleichzeitig Nullebenen beider Nullsysteme sind, liegen entweder auf der $\mathfrak{M}_5^2 \cdot SX = 0$ und bilden dort die Ebenen eines Engelschen Komplexes oder sie schneiden $\mathfrak{M}_5^2$ in einer Geraden des Engelschen Komplexes.

Durch die Ergebnisse dieser Nummer ist gleichzeitig eine Aufgabe gelöst, die wir uns in der vorigen Nummer gestellt hatten, die Aufgabe, die Figur einer $\mathfrak{R}_3^1 - \mathfrak{M}_5^2$ zu beschreiben. Da die Punkte A mit $SA = 0$, $NA = 0$ eine Punkt- $\mathfrak{M}_5^2$ bilden, bilden auch die Räume $AX = 0$ mit $SA = 0$, $NA = 0$ eine $\mathfrak{M}_5^2$. Diese schneiden aber, wie wir sahen, den Raum $SX = 0$ in den Ebenen eines Engelschen Komplexes. Daher gilt:

Satz 33. Eine reguläre $\mathfrak{R}_3^1 - \mathfrak{M}_5^2$ wird von allen $\mathfrak{R}_3^1$ gebildet, die aus einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$ einen regulären Engelschen Komplex ausschneiden.

Nach diesem Satz beherrschen wir die $\mathfrak{R}_3^1 - \mathfrak{M}_5^2$ allerdings erst dann, wenn wir den Engelschen Komplex konstruktiv beherrschen. Wir beschäftigen uns daher in der folgenden Nummer mit Konstruktionen des Engelschen Komplexes.

6. Der Engelsche Komplex.

F. Engel hat auf analytischem Wege gezeigt¹⁰⁾, daß sich die Ebenen einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$ eindeutig-umkehrbar auf die Punkte einer regulären $\mathfrak{M}_6^2$ abbilden lassen. Er hat damit ein Analogon zur Plückerschen Liniengeometrie geschaffen, deren Wesen bekanntlich darauf beruht, daß man die Geraden des R_3 eindeutig-umkehrbar auf die Punkte einer regulären $\mathfrak{M}_4^2$ abbilden

¹⁰⁾ F. Engel, Zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen. Jahresber. d. D. M. V. 8 (1900), S. 196—198; Ein neues, dem linearen Komplex analoges Gebilde I, II, Sächs. Berichte 1900, S. 63—67 und 220—239. Der Name Engelscher Komplex wurde von G. Kowalewski geprägt: Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes, Sächs. Berichte 1902, S. 371—392.

kann. Das Engelsche Ergebnis folgt nun hier ohne Rechnung. Man erhält die genannte Abbildung, wenn man von den Punkten von $\mathfrak{M}_6^2$ vermöge des Trialitätsprinzips zu den $\mathfrak{R}_3^1$ (oder $\mathfrak{R}_3^{11}$) von $\mathfrak{M}_6^2$ übergeht und diese mit einem nicht tangierenden $\mathfrak{R}_6$ zum Schnitt bringt. Dieser $\mathfrak{R}_6$ schneidet $\mathfrak{M}_6^2$ in einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$ und jeden $\mathfrak{R}_3^1$ in einer Ebene. Umgekehrt läuft durch eine solche Ebene nur ein einziger $\mathfrak{R}_3^1$ und diesem wiederum entspricht, vermöge des Trialitätsprinzips, ein einziger Punkt von $\mathfrak{M}_6^2$. So folgt also auf die einfachste Weise:

Satz 34. *F. Engels Abbildung der Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ auf die Ebenen einer $\mathfrak{M}_5^2$ ergibt sich, wenn man mittels des Trialitätsprinzips von den Punkten der $\mathfrak{M}_6^2$ zu den $\mathfrak{R}_3^1$ der $\mathfrak{M}_6^2$ übergeht und diese mit einem $\mathfrak{R}_6$ („uneigentlichem $\mathfrak{R}_6$ “) zum Schnitt bringt, der $\mathfrak{M}_6^2$ in einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$ schneidet.*

Auf Grund dieser Abbildung ergeben sich die nächsten Überlegungen zwangsläufig analog zu den entsprechenden Überlegungen der Plückerschen Liniengeometrie. So wie ein Punkt und ein zu ihm bezüglich $\mathfrak{M}_4^2$ polarer $\mathfrak{R}_4$ in der Liniengeometrie einen linearen Komplex definiert, so wird hier ein linearer Engelscher Komplex durch einen Punkt und seinen bezüglich $\mathfrak{M}_6^2$ genommenen Polar- $\mathfrak{R}_6$ erklärt. Genau ebenso wie in der Liniengeometrie sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der $\mathfrak{R}_6$ die $\mathfrak{M}_6^2$ berührt oder nicht. Im ersten Falle heißt der Komplex *singulär*, im zweiten Falle *regulär*.

Wir betrachten zunächst den singulären Komplex. Die Bildpunkte der Ebenen des Komplexes sind alle zu einem Punkte $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{M}_6^2$ konjugiert. Diesen Punkten entsprechen vermöge des Trialitätsprinzips alle $\mathfrak{R}_3^1$, die mit einem festen Raume $\mathfrak{R}_3^1$ inzident sind. Dieser schneidet eine Ebene $\mathfrak{P}'$ aus $\mathfrak{M}_5^2$ aus. Die Räume, die mit dem festen $\mathfrak{R}_3^1$ inzident sind, $\mathfrak{R}_3^1$ also in einer Geraden schneiden, schneiden Ebenen aus, welche $\mathfrak{P}'$ entweder in einem Punkte oder in einer Geraden schneiden. In beiden Fällen wollen wir die Ebenen inzident nennen. Dann gilt:

Satz 35. *Ein singulärer Engelscher Komplex besteht aus allen Ebenen, die mit einer festen Ebene inzident sind.*

Einen regulären Engelschen Komplex gewinnen wir, wenn wir die Ebenen aller Punkte suchen, die ein nicht-tangierender $\mathfrak{R}_6$, z. B. $SX = 0$, aus $\mathfrak{M}_6^2$ ausschneidet:

Satz 36. *Die Räume $AX = 0$ mit $SA = 0$ schneiden aus $SX = 0$ einen regulären Engelschen Komplex aus.*

Engelsche Komplexe gibt es auf $\mathfrak{M}_5^2$ ebensoviele wie Punkte im $\mathfrak{R}_7$; also ∞^7 . Die $\mathfrak{M}_5^2$ läßt ∞^{21} automorphe Kollineationen zu, ein Engelscher Komplex also ∞^{14} solcher Kollineationen. Dies ist die von F. Engel stammende geometrische Deutung der bekannten einfachen Killingschen Gruppe G_{14} .

Für die Ebenengeometrie der $\mathfrak{M}_5^2$ ist aber nicht die G_{21} der automorphen Kollineationen von $\mathfrak{M}_5^2$, sondern die Gruppe G_{28} der im allgemeinen nicht pro-

jektiven Transformationen maßgebend, die der Gruppe der automorphen Kollineationen von $\mathfrak{M}_6^2$ in der Ebenenmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}_5^2$ entspricht.

Wir wollen nun die einfachsten Figuren der Ebenengeometrie behandeln, bis wir imstande sind, Konstruktionen für den Engelschen Komplex anzugeben.

Wie in der Plückerschen Liniengeometrie gilt:

Satz 37. *Ein Büschel von Engelschen Komplexen enthält entweder zwei verschiedene singuläre Komplexe, zwei zusammenfallende singuläre Komplexe, oder es besteht ganz aus singulären Komplexen.*

Im letzten Falle sprechen wir von einem *Ebenenfächer*.

Beweis. Eine Gerade des $\mathfrak{R}_7$ schneidet $\mathfrak{M}_6^2$ entweder in zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Punkten oder sie liegt ganz auf $\mathfrak{M}_6^2$.

Im ersten Falle nennen wir die Basis des Büschels, den *Schnitt zweier Engelscher Komplexe* allgemeiner Lage eine *reguläre Engelsche Kongruenz*. Die beiden Leitebenen der Kongruenz sind windschief; denn die ihnen auf $\mathfrak{M}_6^2$ entsprechenden Punkte sind nicht konjugiert. Die reguläre Kongruenz besteht also aus den gemeinsamen Treffebenen von zwei windschiefen Leitebenen.

Zu jedem Punkte der einen Leitebene ist eine Gerade der anderen konjugiert. So entsteht ein System von ∞^3 gemeinsamen Treffgeraden der beiden Ebenen.

Durch jede Gerade von $\mathfrak{M}_5^2$ laufen ∞^1 Ebenen von $\mathfrak{M}_5^2$; denn polar zu der Geraden ist ein durch die Gerade laufender $\mathfrak{R}_4$. Er schneidet $\mathfrak{M}_5^2$ in einem Kegel $\mathfrak{M}_3^2$, den man erhält, wenn man die Gerade mit einem geeigneten Kegelschnitt verbindet. Den ∞^1 Punkten dieses Kegelschnittes entsprechend, gibt es auf dem Kegel ∞^1 Ebenen, die durch die vorgegebene Gerade laufenden Ebenen der $\mathfrak{M}_5^2$. Hiernach gilt:

Satz 38. *Eine reguläre Engelsche Kongruenz enthält ∞^4 Ebenen, durch jede der ∞^3 gemeinsamen Treffgeraden der beiden Leitebenen je ∞^1 .*

Die *singuläre Kongruenz* besteht (ähnlich wie die der Plückerschen Liniengeometrie) aus allen Ebenen eines regulären Engelschen Komplexes, die mit einer Ebene dieses Komplexes inzident sind.

Wir kommen schließlich zum *Ebenenfächer*. Nach dem Trialitätsprinzip entsprechen allen Punkten einer Geraden von $\mathfrak{M}_6^2$ alle $\mathfrak{R}_3^1$ durch eine Gerade $\mathfrak{G}$ (Satz 17). Diese $\mathfrak{R}_3^1$ liegen alle in dem Polar- $\mathfrak{R}_5$ der Geraden $\mathfrak{G}$. Der Polar- $\mathfrak{R}_5$ schneidet nun den uneigentlichen $\mathfrak{R}_6$ in einem $\mathfrak{R}_4$ und dieser die $\mathfrak{M}_5^2$ in einer $\mathfrak{M}_3^2$. Je nachdem $\mathfrak{G}$ selbst uneigentlich ist oder nur einen bestimmten uneigentlichen Punkt besitzt, hat die $\mathfrak{M}_3^2$ eine singuläre Gerade (und besteht dann aus allen Ebenen, die diese Gerade mit den Punkten eines geeigneten Kegelschnittes verbinden), oder nur einen singulären Punkt (und besteht dann aus allen Ebenen, die diesen Punkt mit den Erzeugenden einer geeigneten Regelschar 2. Ordnung verbinden). Die beiden Figuren sind projektiv verschieden, aber vom Standpunkt der Geometrie der Gruppe G_{28} äquivalent.

Daher:

Satz 39. Auf $\mathfrak{M}_5^2$ gibt es zwei, vom Standpunkt der Gruppe G_{21} aus verschiedene, vom Standpunkt der Gruppe G_{23} aus äquivalente Arten von Ebenenfächern. Ein Ebenenfächer 1. Art ist eine Schar erzeugender Ebenen einer $\mathfrak{M}_3^2$ vom Range 4, ein Ebenenfächer 2. Art bildet die Schar erzeugender Ebenen einer $\mathfrak{M}_3^2$ vom Range 3.

Die nächsteinfache Figur der Ebenengeometrie von $\mathfrak{M}_5^2$ ist die Figur der ∞^1 Ebenen, die einem auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen regulären Kegelschnitt entspricht, der auf einer der $\mathfrak{M}_6^2$ nicht ganz angehörigen Ebene liegt (Gegenstück zur Regelschar 2. Ordnung der Plückerschen Liniengeometrie).

Es ist uns bereits bekannt, daß einem Kegelschnitt der $\mathfrak{M}_6^2$ vermöge des Trialitätsprinzips eine Segresche $\mathfrak{M}_4^4$ entspricht (Satz 21). Diese $\mathfrak{M}_4^4$ haben wir jetzt mit dem uneigentlichen $\mathfrak{R}_6$ zum Schnitt zu bringen. Der Schnitt liefert eine rationale Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^4$ von ∞^1 Ebenen.

Rationale Mannigfaltigkeiten von ∞^1 Ebenen hat zuerst C. Segre¹¹⁾ untersucht. Er hat eine Mannigfaltigkeit von ∞^1 Ebenen und von der Ordnung n eine $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^n$ genannt. In unserem Falle liegt eine $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^4$ vor. Nach Segre liegt auf einer $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^n$ des $\mathfrak{R}_{n+2}$ im allgemeinen eine einzige Leitkurve niedrigster Ordnung (eine Kurve, die alle Ebenen der Schar schneidet). Im Sonderfalle gibt es deren ∞^1 . Dieser Sonderfall liegt hier vor; die genannten Kurven werden von den Erzeugenden einer auf der Mannigfaltigkeit gelegenen Regelschar 2. Ordnung gebildet. Also:

Satz 40. Bei der Abbildung der Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ auf die Ebenen der $\mathfrak{M}_3^2$ entspricht einem regulären Kegelschnitt, der von einer Ebene aus $\mathfrak{M}_6^2$ geschnitten wird, eine $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^4$ mit einer Regelschar 2. Ordnung von Leitgeraden niedrigster Ordnung.

Um dieses einzusehen, bedienen wir uns am einfachsten der Sprechweise der Punktreihengeometrie. Es ist bekannt¹²⁾, daß bei der Abbildung der Punktreihen

$$(1) \quad (UM)(\mu\tau) = (U_0M_0 + \dots + U_3M_3)(\mu_1\tau_2 - \mu_2\tau_1) = 0$$

des $\mathfrak{R}_3$ auf die Punkte von $\mathfrak{R}_7$ die singulären Punktreihen $(UM) \cdot (\mu\tau) = 0$ auf die Punkte einer Segreschen $\mathfrak{M}_4^4$ abgebildet werden. Einem $\mathfrak{R}_6$ entspricht dabei eine Ebenenreihe (ein Ebenenbüschel mit Parameterdarstellung) und

¹¹⁾ C. Segre, Sulle varietà normali a tre dimensioni composti di serie semplici razionali di piani, Atti Acc. di Torino **21** (1885), S. 95—115. — Segres Bezeichnungen $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^n$ usw. sind nicht mit den bisher von uns benutzten Bezeichnungen $\mathfrak{R}_3^1 - \mathfrak{M}_3^2$ usw. zu verwechseln.

¹²⁾ E. A. Weiss, Die Euklidische Geraden-Kugel-Transformation als Gegenstand der Punktreihengeometrie, Deutsche Mathematik **2** (1937), S. 285—293.

dem Schnitt eines $\mathfrak{R}_6$ allgemeiner Lage mit $\mathfrak{M}_4^4$ die Mannigfaltigkeit aller singulären Punktreihen, die zur regulären Ebenenreihe

$$(2) \quad (NX)(\nu\tau) = 0$$

konjugiert sind. Diese Mannigfaltigkeit enthält ∞^1 Ebenen, den ∞^1 Bündeln singulärer Punktreihen entsprechend, die man erhält, wenn man alle Punkte einer Ebene mit dem Parameter dieser Ebene versieht. Sie enthält ∞^1 Leitgeraden, den ∞^1 Büscheln singulärer Punktreihen entsprechend, die man erhält, wenn man jeden Punkt der Achse der Ebenenreihe nacheinander mit allen Parametern versieht. Diese Leitgeraden erfüllen eine Regelschar 2. Ordnung, weil sie eine Erzeugendenschar der Fläche 2. Ordnung bilden, die man durch Abbildung aller auf der Achse der Ebenenreihe gelegenen singulären Punktreihen erhält.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Sylvestersche und die Chaslessche Erzeugung des Linienkomplexes der Plückerschen Liniengeometrie¹³⁾ auf die Engelsche Ebenengeometrie übertragen. In der Liniengeometrie wird ein linearer Komplex auf eine in einem $\mathfrak{R}_4$ gelegene $\mathfrak{M}_3^2$ abgebildet. Diese $\mathfrak{M}_3^2$ kann man aus allen $\mathfrak{M}_2^2$ zusammensetzen, die ein im $\mathfrak{R}_4$ gelegenes $\mathfrak{R}_3$ -Büschel aus $\mathfrak{M}_3^2$ ausschneidet. Polar zur Basisebene des Büschels ist eine Ebene, polar zum $\mathfrak{R}_3$ -Büschel ein Geradenbüschel. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Ebene $\mathfrak{M}_4^2$ in einem Geradenpaar oder einem regulären Kegelschnitt schneidet. Im ersten Falle werden die beiden Geraden durch das in der Ebene gelegene Geradenbüschel perspektiv aufeinander bezogen, im zweiten Falle erzeugt das Geradenbüschel auf dem Kegelschnitt eine Involution. So entsteht der Komplex einmal (Sylvestersche Erzeugung) als das Erzeugnis von zwei verschränkten projektiven Geradenbüscheln, die ihre gemeinsame Gerade entsprechend gemein haben und das andere Mal (Chaslessche Erzeugung) als das Erzeugnis einer involutorischen Regelschar.

Beide Verfahren lassen sich unmittelbar übertragen. Der Bild- $\mathfrak{R}_6$ des Engelschen Komplexes schneidet $\mathfrak{M}_6^2$ in einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$, und diese kann man sich aus den ∞^1 $\mathfrak{M}_4^2$ zusammengesetzt denken, die die $\mathfrak{R}_5$ eines Büschels ausschneiden. Zu diesem Büschel ist ein Geradenbüschel polar, zu seinem Basis- $\mathfrak{R}_4$ eine Ebene. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem diese Ebene $\mathfrak{M}_6^2$ in einem Geradenpaare oder in einem regulären Kegelschnitt schneidet. Daher:

Satz 41. Der Sylvesterschen und der Chaslesschen Erzeugung des regulären linearen Komplexes in der Plückerschen Liniengeometrie des $\mathfrak{R}_3$ entsprechen

¹³⁾ Vgl. E. A. Weiss, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik, Leipzig 1935, § 10.

die beiden folgenden Erzeugungen des linearen Komplexes der Engelschen Ebenengeometrie der $\mathfrak{M}_5^2$:

Das Erzeugnis zweier verschränkter projektiver Ebenenfächer, die ihre gemeinsame Ebene entsprechend gemein haben, ist ein regulärer Engelscher Komplex.

Das Erzeugnis einer involutorischen $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^4$ ist ein regulärer Engelscher Komplex.

Ausführlicher ausgesprochen lautet die Aussage des letzten Satzes: die $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_3^4$ ist als Ort ihrer ∞^1 Ebenen ein binäres Gebiet. In diesem binären Gebiete erkläre man eine Involution. Man konstruiere alle Kongruenzen (darunter zwei singuläre), deren Leitebenen zwei entsprechende Ebenen der Involution sind. Der Ort dieser Kongruenzen ist ein regulärer Engelscher Komplex.

7. Involutorische Trialitäten.

Das Trialitätsprinzip lehrt, daß die Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ eindeutig-umkehrbar auf die $\mathfrak{R}_3^I$ der $\mathfrak{M}_6^2$ abgebildet werden können. Jetzt interessieren wir uns für Transformationen, welche diese Abbildung konstruktiv herstellen, und zwar wollen wir die involutorischen Trialitäten behandeln.

Eine involutorische lineare Transformation von $\mathfrak{M}_6^2$ transformiert entweder jede Familie von Elementen (Punkte, $\mathfrak{R}_3^I$, $\mathfrak{R}_3^{II}$) in sich oder sie vertauscht zwei Familien miteinander und die Elemente der dritten Familie unter sich. Wir unterscheiden hiernach Transformationen der ersten und der zweiten Art (Trialitäten). Danach vertauscht eine involutorische Transformation entweder die Punkte involutorisch oder sie ist trial zu einer Transformation, welche die Punkte involutorisch vertauscht. Wir werden daher alle involutorischen linearen Transformationen von $\mathfrak{M}_6^2$ erhalten, wenn wir die involutorischen Punkttransformationen von $\mathfrak{M}_6^2$ ermitteln und zu ihnen die trialen Transformationen aufsuchen.

Die involutorischen Punkttransformationen von $\mathfrak{M}_6^2$ sind involutorische automorphe Kollineationen von $\mathfrak{M}_6^2$. Jede von ihnen ist durch das Paar ihrer Inzidenzräume bestimmt. Folgende Paare von Inzidenzräumen können auftreten:

1. Punkt und Polar- $\mathfrak{R}_6$,
2. Gerade und Polar- $\mathfrak{R}_5$,
3. Ebene und Polar- $\mathfrak{R}_4$,
4. Raum und Polar- $\mathfrak{R}_3$,
5. Zwei nicht inzidente Räume gleicher Art von $\mathfrak{M}_6^2$.

Die Transformationen der ersten Familie sind von 2. Art; denn die Transformation

$$(1) \quad X' = \tilde{X}$$

gibt ein Beispiel für eine Transformation mit Punkt und Polar- $\mathfrak{R}_6$ als Inzidenzräumen. Diese Transformation verwandelt aber einen Punkt X des Raumes $AX = 0$ in einen Punkt des Raumes $X\tilde{A} = 0$; denn aus $AX = 0$ folgt $\tilde{X}\tilde{A} = 0$. Eine Transformation der ersten Familie vertauscht also Räume $\mathfrak{R}_3^I$ und $\mathfrak{R}_3^{II}$.

Eine Transformation der zweiten Familie kann aus zwei geeigneten Transformationen der ersten Familie zusammengesetzt werden und ist daher von 1. Art. Aus einem analogen Grunde ist eine Transformation der dritten Familie wieder von 2. und eine Transformation der vierten Familie wieder von 1. Art. Eine Transformation der fünften Familie ist schließlich offenbar von 1. Art.

Satz 42. *Von den fünf Typen involutorischer automorpher Kollineationen von $\mathfrak{M}_6^2$ sind drei von 1. und zwei von 2. Art.*

Wir untersuchen nun die zu den fünf aufgezählten Typen trialen Transformationen. Offenbar sind die Typen 2 und 5 zueinander trial; bei dem Typus 2 sind zwei nicht inzidente Punkte, beim Typus 5 zwei nicht inzidente Räume derselben Art ausgezeichnet. Der Typus 4 ist zu sich selbst trial (Satz 22). Als neu ergeben sich die zu den Typen 1 und 3 trialen Transformationen. Diese haben in unserem Zusammenhang das größte Interesse, weil sie involutorische Abbildungen der Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ auf die Räume von $\mathfrak{M}_6^2$ vermitteln.

Wir betrachten zunächst die zum Typus 1 triale Transformation. Wir behaupten, daß jedes der beiden in 5 behandelten Nullsysteme von $\mathfrak{M}_6^2$ eine solche Transformation darstellt:

Satz 43. *Vermöge des Trialitätsprinzips entspricht der automorphen Kollineation von $\mathfrak{M}_6^2$ mit einem Punkt und seinem Polar- $\mathfrak{R}_6$ als Inzidenzgebieten die durch die Oktaven vermittelte Abbildung der Punkte A auf die Räume $\tilde{A}X = 0$ 1. Art.*

Beweis. Bei der Transformation $X' = \tilde{X}$ werden die Punkte involutorisch vertauscht und es bleiben dabei die Punkte einer regulären $\mathfrak{M}_5^2$ einzeln in Ruhe. Einem Raume 1. Art wird ein mit ihm inzidenter Raum 2. Art zugeordnet und diese beiden Räume schneiden sich in einer $\mathfrak{M}_5^2$ angehörigen Ebene.

Es ist zu zeigen, daß unser Nullsystem die trialen Eigenschaften besitzt. Zunächst wird durch die Transformation eine involutorische Abbildung der

Räume $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ hervorgerufen. In der Tat: Der Punkt A liege im Raume $XB = 0$, so daß $AB = 0$ ist. Diese Beziehung besagt aber zugleich, daß der Raum $\tilde{A}X = 0$ mit dem Raum $X\tilde{B} = 0$ inzident ist. Die Verwandtschaft führt also alle Punkte des Raumes $XB = 0$ in alle Räume 1. Art über, die mit dem Raume $X\tilde{B} = 0$ inzident sind; d. h. sie transformiert den Raum $XB = 0$ in den Raum $X\tilde{B} = 0$ und induziert so eine involutorische Transformation der Räume 2. Art. Dabei bleiben die Räume $XB = 0$ mit $SB = 0$ in Ruhe. Diese bilden, wie wir wissen (Satz 33), eine reguläre $\mathfrak{R}_3^{\text{II}} - \mathfrak{M}_5^2$.

Die Transformation ordnet dem Punkte A den mit ihm inzidenten $\mathfrak{R}_3^{\text{I}}$ $\tilde{A}X = 0$ zu, und diese beiden Elemente haben ein Geradenbündel (vgl. Satz 18) gemeinsam, das der $\mathfrak{R}_3^{\text{II}} - \mathfrak{M}_5^2$ angehört. In der Tat: Jeder der ∞^2 $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ $XB = 0$ mit $SB = 0$, die durch den Punkt A laufen ($AB = 0$), ist mit dem Raume $\tilde{A}X = 0$ (wegen $XB = -X\tilde{B}$) inzident, w. z. b. w.

Den zweiten Typus involutorischer Trialitäten, die Punkte auf Räume abbilden, finden wir, wenn wir die zur involutorischen automorphen Kollineation vom Typus 3 triale Transformation aufsuchen. Wie die automorphe Kollineation durch einen auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen Kegelschnitt vollständig bestimmt ist, so die Trialität durch die dem Kegelschnitt nach Satz 21 entsprechende Segresche $\mathfrak{M}_4^4$. Daher können wir sagen:

Satz 44. *Es gibt zwei Typen involutorischer Trialitäten, welche die Punkte von $\mathfrak{M}_6^2$ auf die $\mathfrak{R}_3^{\text{I}}$ von $\mathfrak{M}_6^2$ abbilden: das Nullsystem des Satzes 27 und die Spiegelung an einer Segreschen $\mathfrak{M}_4^4$.*

Mit der zweiten Transformation beschäftigen wir uns in der nächsten Nummer.

8. Die Spiegelung an der Segreschen $\mathfrak{M}_4^4$.

Auf die in dieser Nummer zu besprechende Verwandtschaft ist bereits in einer früheren Arbeit¹⁴⁾ kurz hingewiesen worden. Dort wurde gezeigt: Bildet man die Punktreihen eines regulären linearen Komplexes des R_3 auf die Punkte eines $\mathfrak{R}_7$ ab, so entsteht als Ort der Bildpunkte eine reguläre $\mathfrak{M}_6^2$. Diese enthält eine Segresche $\mathfrak{M}_4^4$ als Ort der Bildpunkte aller singulären Punktreihen. In jedem erzeugenden Raume dieser $\mathfrak{M}_4^4$ liegt ein regulärer linearer Komplex, das Bild des Ausgangskomplexes. So entstehen hier die linearen Komplexe, von denen bereits im Satze 21 die Rede war. Den auf $\mathfrak{M}_6^2$ gelegenen Räumen entsprechen Punktreihengebüsche, und zwar sind folgende Arten zu unterscheiden:

¹⁴⁾ E. A. Weiss, Abbildung der $\mathfrak{M}_6^2$ des R_7 auf Punktreihen eines linearen Komplexes, Monatshefte f. Math. u. Phys. 39 (1932), S. 385—394.

Ia. *Punktreihengebüsch*, bestimmt durch eine reguläre Ebenenreihe, deren Achse dem linearen Komplex angehört. Die Ebenen der Ebenenreihe schneiden die Punktreihen aus den Geraden des Komplexes aus. Das Gebüsch enthält an singulären Punktreihen die Punkte der Achse, versehen mit den Parametern, die ihre Nullebenen in der vorgegebenen Ebenenreihe tragen.

Ib. *Punktreihengebüsch*, das zu einer singulären Ebenenreihe gehört, bestehend aus Punktreihen, die auf den Nullgeraden der Ebene liegen und dem Nullpunkt der Ebenen ausgezeichneten Parameter zuordnen.

IIa. *Punktreihengebüsch*, bestimmt durch zwei verschiedene, mit Parametern versehene nullpolare Geraden. Träger der Punktreihen sind die Geraden der durch die beiden Leitgeraden festgelegten Kongruenz. Jede Punktreihe ordnet ihren Schnittpunkten mit den Leitgeraden die Parameter dieser Leitgeraden zu (Ausartungen davon).

IIb. *Punktreihengebüsch*, bestehend aus allen Punktreihen einer Komplexgeraden.

$\mathcal{R}_3^I$, der die $\mathcal{M}_4^4$ in einem Kegelschnitt schneidet.

$\mathcal{R}_3^I$, der einen erzeugenden Raum von $\mathcal{M}_4^4$ in einer Ebene schneidet.

$\mathcal{R}_3^{II}$, der die Segresche $\mathcal{M}_4^4$ in zwei Geraden $\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta$ schneidet. Diese liegen in den, den Parametern α, β entsprechenden erzeugenden Räumen $\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\beta$ von $\mathcal{M}_4^4$. Die von den Erzeugenden der $\mathcal{M}_4^4$ zwischen den Räumen $\mathcal{R}_\alpha$ und $\mathcal{R}_\beta$ vermittelte Kollineation $\mathcal{K}$ ordnet den Geraden $\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta$ zwei Geraden $\mathcal{G}'_\beta, \mathcal{G}'_\alpha$ so zu, daß $\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}'_\alpha$ und $\mathcal{G}_\beta, \mathcal{G}'_\beta$ sich in den Nullsystemen der betreffenden Räume entsprechen (Ausartungen davon).

$\mathcal{R}_3^{II}$, der die Segresche $\mathcal{M}_4^4$ in einer regulären Fläche 2. Ordnung schneidet. Eine Schar von Erzeugenden der Fläche besteht aus Erzeugenden von $\mathcal{M}_4^4$, die andere aus Geraden in

erzeugenden Räumen der $\mathcal{M}_4^4$. Diese letzten Geraden gehören jeweils dem in dem entsprechenden Raume liegenden linearen Komplexen an.

IIc. *Gebüsch singulärer Punktreihen*, bestehend aus allen Punkten des Raumes, die mit einem und demselben Parameter versehen sind.

Erzeugender Raum $\mathcal{R}_3^{\text{II}}$ von $\mathcal{M}_4^4$.

Nach diesen Vorbereitungen behaupten wir:

Satz 45. *Die auf $\mathcal{M}_6^2$ durch Spiegelung an einer Segreschen $\mathcal{M}_4^4$ entstehende Trialität kann als das Bild des Nullsystems eines regulären linearen Komplexes im R_3 aufgefaßt werden.*

Beweis. Das Nullsystem des R_3 ordnet jeder auf einer Komplexgeraden $\mathfrak{H}$ gelegenen regulären Punktreihe eine reguläre Ebenenreihe zu, welche die Komplexgerade zur Achse hat, damit aber ein Punktreihengebüsch vom Typus Ia.

Der vorgegebenen regulären Punktreihe entspricht ein nicht auf $\mathcal{M}_4^4$ gelegener Punkt $\mathfrak{P}$ der $\mathcal{M}_6^2$. Er legt einen ganz bestimmten, durch $\mathfrak{P}$ laufenden $\mathcal{R}_3$ ($\mathcal{R}_3^{\text{II}}$ vom Typus IIb) fest, das Bild des Gebüsches sämtlicher auf $\mathfrak{H}$ gelegenen Punktreihen. Dieser $\mathcal{R}_3$ schneidet $\mathcal{M}_4^4$ in einer Fläche 2. Ordnung. In bezug auf diese Fläche hat der Punkt $\mathfrak{P}$ eine Polarebene, und durch diese läuft ein bestimmter $\mathcal{R}_3^{\text{I}}$ (vom Typus Ia). Es ist der dem Punkte $\mathfrak{P}$ zugeordnete $\mathcal{R}_3^{\text{I}}$.

Das Nullsystem des R_3 ordnet jeder singulären Punktreihe eine singuläre Ebenenreihe und damit ein Punktreihengebüsch vom Typus Ib zu. Die Ebene der singulären Ebenenreihe ist die Nullebene des Punktes der singulären Punktreihe.

Der vorgegebenen singulären Punktreihe entspricht ein auf $\mathcal{M}_4^4$ gelegener Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathcal{M}_6^2$. $\mathfrak{P}$ liegt in einem erzeugenden Raume von $\mathcal{M}_4^4$, und das in diesem Raume erklärte Nullsystem ordnet $\mathfrak{P}$ eine Nullebene zu. Der durch diese Nullebene laufende $\mathcal{R}_3^{\text{I}}$ (vom Typus Ib) ist der Bild- $\mathcal{R}_3^{\text{I}}$ des Punktes $\mathfrak{P}$. Damit sind zunächst die Punkte von $\mathcal{M}_6^2$ auf die $\mathcal{R}_3^{\text{I}}$ abgebildet.

Wir zeigen ferner, daß als Bild des Nullsystems von R_3 eine involutorische Transformation der Räume $\mathcal{R}_3^{\text{II}}$ entsteht. In der Tat: Ein Raum allgemeiner Lage $\mathcal{R}_3^{\text{II}}$ von $\mathcal{M}_6^2$ entspricht einem Punktreihengebüsch vom Typus IIa und schneidet daher $\mathcal{M}_4^4$ in zwei Geraden $\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta$, von der oben, in der Übersicht angegebenen Lage. Durch das Nullsystem des R_3 werden die beiden Leitgeraden der Trägerkongruenz des Punktreihengebüsches miteinander ver-

tauscht. Auf $\mathfrak{M}_\alpha^2$ wird daher entsprechend der von den Geraden $\mathfrak{G}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta$ aufgespannte Raum mit dem von den Geraden $\mathfrak{G}'_\alpha, \mathfrak{G}'_\beta$ aufgespannten $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ vertauscht.

Bei dieser Verwandtschaft bleiben die Räume $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ in Ruhe, die den Punkt-reihengebüschen vom Typus IIb und IIc (Komplexgerade als Ort sämtlicher auf ihr gelegener Punktreihen, der Raum aufgefaßt als Ort singulärer Punktreihen mit einem bestimmten Parameter) zugeordnet sind. Entsprechend bleiben auf $\mathfrak{M}_\alpha^2$ einerseits die erzeugenden Räume von $\mathfrak{M}_4^4$, andererseits die Räume der $\mathfrak{R}_3^{\text{II}} - \mathfrak{M}_3^2$ in Ruhe, welche $\mathfrak{M}_4^4$ in Flächen 2. Ordnung schneiden. Jeder der genannten Räume wird als Ort von Punkten in sich selbst als Ort inzidenter Räume $\mathfrak{R}_3^{\text{I}}$ transformiert.

Damit ist gezeigt, daß die Bildtransformation des Nullsystems im R_3 die $\mathfrak{R}_3^{\text{II}}$ involutorisch vertauscht und dabei die $\mathfrak{R}_3$ einer $\mathfrak{R}_3^{\text{II}} - \mathfrak{M}_1^2$ und einer dazu polaren $\mathfrak{R}_3^{\text{II}} - \mathfrak{M}_3^2$ einzeln in Ruhe läßt. Die Transformation ist somit trial zu einer automorphen Kollineation der $\mathfrak{M}_6^2$ vom Typus 3, w. z. b. w.

(Eingegangen am 9. Juni 1938.)

Sur une propriété de la loi de Gauß.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. Le but principal de cette note est de démontrer le

Théorème 1. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite finie ou infinie de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité $V(x)$ qui satisfait à la condition suivante

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r dV(x) < \infty \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Supposons que les deux sommes

$$(1.2) \quad \sum a_n x_n, \quad \sum b_n x_n$$

existent et sont égales, c'est à dire qu'elles ont la même fonction de distribution. Sous ces hypothèses ou bien les suites $\{|a_n|\}$ et $\{|b_n|\}$ ne diffèrent que par l'ordre des termes ou bien $V(x)$ est la loi de Gauß c'est à dire que

$$(1.3) \quad V(x) = \Phi(ax + b); \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

où a et b sont deux constantes qui peuvent être finies ou infinies¹⁾.

La démonstration de ce théorème est basée sur un résultat concernant les fonctions caractéristiques, à savoir sur le

Théorème 2. Il n'existe aucune fonction caractéristique qui soit une fonction entière d'ordre fini $p > 2$ et dont l'exposant de convergence des zéros soit $q < p$.

Outre ces deux théorèmes je donne un théorème qui permet de reconnaître dans certains cas qu'une fonction $\varphi(x)$ donnée d'avance n'est pas une fonction caractéristique. Ce théorème est très simple, presque banal, quoique assez général et je le donne pour mieux éclaircir la signification du théorème 2.

C'est le

Théorème 3. Supposons qu'une fonction $\varphi(x)$ non-constante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vérifie dans un entourage du point zéro la relation

$$(1.4) \quad \varphi(x) = 1 + \omega(x) + o(x^2)$$

¹⁾ En posant $b = -\lambda a$, $a = \infty$ on obtient une loi $V(x)$ telle que $V(x) = 0$ lorsque $x < \lambda$ et à 1 dans le cas contraire.

où $\omega(x)$ désigne une fonction impaire satisfaisant à la condition

$$(1.5) \quad \omega(x) = o(x).$$

La fonction $\varphi(x)$ ne peut pas être une fonction caractéristique.

Il en résulte par exemple que les fonctions

$$e^{-x^4}, \quad e^{-|x|^\alpha} (\alpha > 2), \quad e^{-x^4 - x^5}, \quad \frac{2}{e^{x^\kappa} + e^{-x^\kappa}} \quad (\kappa = 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{1+x^4} \text{ etc.,}$$

ne sont pas des fonctions caractéristiques.

Mais si l'on considère p. ex. la fonction de la forme $e^{-x^2 - \alpha x^4}$ le théorème 3 ne nous donne aucune réponse à la question si cette fonction est une fonction caractéristique ou non. La réponse négative résulte du théorème 2.

2. Je commence par donner la démonstration du théorème 3. Cette démonstration sera basée sur le.

Lemme 1⁵⁾. Soit $V(x)$ une loi de probabilité et $\varphi(x)$ sa fonction caractéristique

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV(t).$$

Pour que la limite

$$(2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) + \varphi(h) - 2\varphi(0)}{h^2} = D_2 \varphi(0)$$

existe il faut et il suffit que l'on ait

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dV(x) < \infty,$$

Si l'inégalité est vérifiée la deuxième dérivée existe et on a

$$(2.4) \quad \varphi''(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dV(x).$$

Supposons d'abord que $D_2 \varphi(0)$ existe. On a

$$- \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} xt}{x^2} dV(t) \leq M.$$

²⁾ F. Bernstein [1].

³⁾ Mathias [6].

⁴⁾ F. Bernstein [1].

⁵⁾ Ce lemme est connu. Voir Lévy [5], p. 40 — 99 et Marcinkiewicz [7].

Donc à plus forte raison

$$M \geq \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} x t}{x^2} dV(t) \geq \frac{8}{\pi^2} \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} t^2 dV(t).$$

Or, x étant arbitraire on obtient (2.3). Au contraire l'inégalité (2.3) étant vérifiée on trouve la formule (2.4) en différenciant l'égalité (2.1). Pour démontrer le théorème 3 on remarque d'abord que lorsque $\varphi(x)$ est une fonction caractéristique il en est de même de la fonction $\varphi(-x)$, donc aussi de la fonction $\varphi(x) \varphi(-x)$. En tenant compte de (1.4) on trouve

$$(2.5) \quad \varphi(x) \varphi(-x) = 1 + o(x^2)$$

ce qui donne $D_2 \varphi^2(0) = 0$. D'après le lemme 1 on en conclut en désignant par $U(x)$ la loi de probabilité correspondant à la fonction caractéristique $\varphi(x) \varphi(-x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dU(x) = 0.$$

La dernière égalité entraîne

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui contredit l'hypothèse que φ n'est pas une constante.

3. La démonstration du théorème 2 est basée sur deux lemmes suivants.

Lemme 2. Soit $V(x)$ une loi de probabilité et $\varphi(z)$ sa fonction caractéristique. Pour que $\varphi(z)$ soit une fonction régulière pour $|z| < R$ il faut et il suffit que l'on ait

$$(3.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{r|x|} dV(x) < \infty \quad (r < R).$$

La condition (3.1) étant vérifiée on a

$$(3.2) \quad \varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xz} dV(x).$$

Ce lemme est connu⁶⁾.

Lemme 3. Soient $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ des nombres arbitraires différents de zéro.

Désignons par ϱ la borne inférieure des nombres λ tels que

$$(3.3) \quad \sum |z_v|^{-\lambda} < \infty$$

⁶⁾ Lévy [5], p. 40—90; Marcinkiewicz [7].

et par k le plus grand nombre entier non-négatif pour lequel la série (3.3) diverge. Posons

$$(3.4) \quad \pi(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_v}\right) e^{\frac{z}{z_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_v}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_v}\right)^k}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $R_n \rightarrow \infty$ telle que

$$(3.5) \quad \min_{|z| = R_n} |\pi(z)| \geq e^{-R_n^{\varrho + \varepsilon}},$$

$$(3.6) \quad \max_{|z| = R_n} |\pi(z)| \leq e^{R_n^{\varrho + \varepsilon}}.$$

C'est un résultat bien connu⁷⁾.

En passant à la démonstration du théorème 2 remarquons qu'il ne s'agit ici que du cas où l'ordre p de la fonction $\varphi(z)$ est un entier positif. Admettons donc que ϱ est positif et non-entier.

Soient $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ les zéros de la fonction $\varphi(z)$. D'après le théorème classique de M. Hadamard on a

$$(3.7) \quad \varphi(z) = \pi(z) e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p}$$

où

$$(3.8) \quad \pi(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_v}\right) e^{\frac{z}{z_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_v}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_v}\right)^k}.$$

En appliquant le lemme 2 on trouve une suite infinie de nombres $R_n \rightarrow \infty$ tels que l'on ait pour $|z| = R_n$

$$|\varphi(z)| \geq |e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p}| e^{-R_n^{\varrho + \varepsilon}}.$$

Soit $a_r = \lambda e^{i\theta_r}$. Il en résulte que l'on a pour

$$z = z_{n,s} = R_n e^{\frac{i}{p}(2s\pi - \Theta)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, p-1),$$

$$(3.9) \quad |\varphi(z)| \geq e^{(\lambda - \varepsilon) R_n^p - R_n^{\varrho + \varepsilon}}$$

au moins dès que R_n est suffisamment grand.

D'autre part la formule (3.2) donne

$$(3.10) \quad |\varphi(z)| \leq |\varphi(iy)| + |\varphi(-iy)| \quad (z = x + iy).$$

En supposant $p > 2$ on conclut facilement qu'un au moins des nombres $(2s\pi - \Theta)/p$ est différent de $\pm \frac{\pi}{2}$. Soit par exemple $-\Theta/p$ un tel nombre.

De l'inégalité (3.10) et du fait que la fonction $\varphi(z)$ est d'ordre p il résulte que

$$(3.11) \quad |\varphi(z)| \leq 2 e^{(\lambda + \varepsilon)|y|^p} \quad (y = Jz)$$

⁷⁾ Voir p. ex. Valiron [9], p. 57.

pour $|z| > M_\varepsilon$ et en particulier

$$(3.12) \quad |\varphi(z_{n,0})| \leq e^{(\varepsilon+\lambda)|y_{n,0}|^p} \quad (y_{n,0} = J z_{n,0}).$$

Les inégalités (3.9) et (3.12) donnent

$$(3.13) \quad e^{(\varepsilon+\lambda)|y_{n,0}|^p} \geq e^{(\lambda-\varepsilon)|z_{n,0}|^p - |z_{n,0}|^{q+\varepsilon}}.$$

Or on a $q < p$, $|y_{n,0}| = |\sin \Theta/p z_{n,0}|$, pour ε suffisamment petit on a $(\varepsilon + \lambda)|y_{n,0}|^p < (\lambda - \varepsilon)|z_{n,0}|^p - |z_{n,0}|^{q+\varepsilon}$ ce qui contredit l'inégalité (3.13). Le théorème 2 se trouve ainsi établi.

Comme un simple corollaire du résultat démontré on obtient le
Théorème 2^{bis}. *Aucune fonction de la forme*

$$e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_r z^r} \quad (r > 2)$$

ne peut être une fonction caractéristique.

4. La démonstration du théorème 1 sera divisée en quelques lemmes

Lemme 4. *Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ les variables aléatoires symétriques indépendantes ayant la même loi de probabilité $V(x)$ satisfaisant à la condition (1.1). Pour que la série*

$$(4.1) \quad \sum a_n x_n$$

converge il faut et il suffit que l'on ait

$$(4.2) \quad \sum a_n^2 < \infty.$$

Ce lemme est connu même sous une forme plus générale⁸⁾.

Lemme 5. *Sous les conditions du lemme 4 il existe un nombre $\Delta > 0$ tel que*

$$(4.3) \quad \frac{d^n}{dx^n} \varphi(x) = \sum_v \frac{d^n}{dx^n} \psi_v(x) \quad (|x| < \Delta)$$

où

$$(4.4) \quad \psi_v = \lg \varphi(a_v x); \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV(t), \quad \psi = \sum \psi_v.$$

De la formule $\varphi(0) = 1$ et de la continuité de la fonction φ on conclut qu'il existe un segment Δ tel que $\varphi(x) \geq \frac{1}{2}$ ($x \in \Delta$). D'après (4.2) on peut supposer que $|a_v| \leq 1$. On en déduit que $\varphi(a_v x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in \Delta$. La formule $\psi' \varphi = \varphi'$ donne

$$(4.5) \quad \sum_0^n \binom{n}{i} \psi^{(i+1)} \varphi^{(n-i)} = \varphi^{(n+1)}.$$

En tenant compte du fait que le coefficient de $\psi^{(n+1)}$ dans cette formule

⁸⁾ Voir p. ex. Kac [4]; Marcinkiewicz et Zygmund [8].

est égale à φ donc est borné inférieurement on en conclut que les séries

$$\sum_v \frac{d^n}{dx^n} \psi_v(x)$$

convergent uniformément pour $|x| < \Delta$ dès que les séries

$$(4.6) \quad \sum_v \frac{d}{dx} \psi_v(x),$$

$$(4.7) \quad \sum_v \frac{d^n}{dx^n} \varphi(a_v x)$$

convergent uniformément dans le même intervalle. Or, on a

$$\frac{d}{dx} \varphi(a_n x) = O(a_n^2),$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \varphi(a_n x) = O(a_n^2)$$

et il en résulte la convergence des séries (4.4) dans l'intervalle $(-\Delta, +\Delta)$.

La série

$$\psi = \sum_v \psi_v$$

peut être donc différenciée terme à terme ce qui donne les égalités (4.3).

Lemme 6. Soit $\{a_v\}$ une suite de nombres positifs. On a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\sum_v a_v^s)^{1/s} = \max_v a_v.$$

Ce lemme est connu⁹⁾.

Lemme 7. Soient x_1 et x_2 deux variables aléatoires indépendantes. Si la somme $x_1 + x_2$ dépend de la loi de Gauß il en est de même de x_1 et x_2 .

Ce résultat est aussi connu¹⁰⁾.

Maintenant on peut déjà démontrer le théorème 1. Soient $x'_1, x'_2, \dots$ les variables aléatoires indépendantes telles que x'_v est équivalente avec $-x_v$. Les variables $\xi_v = x_v + x'_v$ sont indépendantes et symétriques et les sommes

$$\sum a_v \xi_v \text{ et } \sum b_v \xi_v$$

sont évidemment égales. On a donc

$$\sum \psi(a_v x) = \sum \psi(b_v x)$$

où $\psi(x)$ désigne le logarithme de la fonction caractéristique de la variable ξ .

En appliquant les lemmes 4 et 5 on obtient

$$\sum a_v^{2s} \psi^{(2s)}(0) = \sum b_v^{2s} \psi^{(2s)}(0),$$

$$\sum (a_v^{2s} - b_v^{2s}) \psi^{(2s)}(0) = 0.$$

En tenant compte du lemme 6 on voit facilement que l'égalité

$$(4.8) \quad \sum a_v^{2s} = \sum b_v^{2s}$$

⁹⁾ Voir p. ex. Hardy, Littlewood, Pólya [3], p. 29.

¹⁰⁾ Cramér [2], p. 52.

subsiste pour un nombre fini au plus d'indices s , au moins qu'une des suites $\{a_s\}$ et $\{b_s\}$ ne soit une permutation de l'autre. Il en résulte

$$(4.9) \quad \psi^{(2s)}(0) = 0 \quad (s > s_0).$$

D'autre part on a $\psi^{(2s+1)}(0) = 0$ donc $\psi^{(s)}(0) = 0$ ($s > s_0$).

D'après (4.5) on a

$$|\varphi^{(n)}(0)| \leq M^n n!$$

où M désigne une constante. On en tire facilement

$$\varphi(z) = \sum \frac{i^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) z^n$$

et d'après (4.9)

$$\varphi(z) = e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$$

la fonction $\varphi(z)$ est donc une fonction entière sans zéros. D'après le théorème 2^{bis} il en résulte

$$\varphi(z) = e^{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}.$$

La fonction $\varphi(z)$ étant paire on en conclut $a_0 = a_1 = 0$. On voit donc que la loi dont dépend la variable ξ et celle de Gauß. D'après le lemme 7 il en résulte que la variable x dépend aussi de la loi de Gauß.

5. Cette méthode de démonstration exige que la variable x admette des moments finis de tous les ordres. D'autre part on vérifie facilement que le théorème tombe en défaut lorsque le deuxième moment est infini. Or, il s'impose la question de savoir si le théorème 1 reste vrai lorsque l'on ne suppose que l'existence du deuxième moment.

Travaux cités.

F. Bernstein:

[1] Über das Fourier-Integral. Math. Annalen 79 (1921), p. 265.

H. Cramér:

[2] Random Variables and Probability Distributions. London 1937.

G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya:

[3] Inequalities. Cambridge 1934.

M. Kac:

[4] Sur les fonctions indépendantes. I. Stud. Math. 6, p. 58—76.

P. Lévy:

[5] Variables aléatoires. Paris 1937.

M. Mathias:

[6] Über positive Fourier-Integrale. Math. Zeitschr. 16 (1923), p. 103—125.

J. Marcinkiewicz:

[7] Sur les fonctions indépendantes. III. Apparaîtra dans 31 t. de Fund. Math.

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund:

[8] Sur les fonctions indépendantes. Fund. Math. 29 (1937), p. 60—90.

G. Valiron:

[9] Integral Functions. Toulouse 1923.

(Eingegangen am 2. Juli 1938.)

Über die Existenz von Eigenwerten bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Im Bereich reeller Veränderlicher und Funktionen seien in dem Intervall $a \leq x \leq b$ die beiden Differentialgleichungen

$$(1) \quad y'(x) = F(x, \lambda) z(x), \quad z'(x) = -G(x, \lambda) y(x)$$

mit $F > 0$ sowie die Randbedingungen

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) = \gamma_1 y(b) + \delta_1 z(b), \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 z(a) = \gamma_2 y(b) + \delta_2 z(b) \end{cases}$$

gegeben; dabei sind die $\alpha, \dots, \delta$, gegebene Zahlen oder stetige Funktionen von λ , und die Matrix der Koeffizienten

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

hat für jedes λ den Rang 2. Das System (1) ist offenbar selbstadjungiert¹⁾ und besagt dasselbe wie die Differentialgleichung

$$(4) \quad \left(\frac{1}{F} y' \right)' + G y = 0.$$

Nachdem schon früher die Frage nach der Existenz von Eigenwerten für die aus (4) und (2) bestehende Randwertaufgabe, soweit es sich um selbstadjungierte Randbedingungen handelt, wiederholt behandelt war, hat Ettlinger²⁾ auch für einige Klassen von nicht-selbstadjungierten Randbedingungen (2) unter sehr allgemeinen Voraussetzungen nachgewiesen, daß mindestens ein (reeller) Eigenwert vorhanden ist. Er stützt sich dabei wesentlich auf die Existenz von Eigenwerten in den selbstadjungierten Fällen, und zwar

¹⁾ Das lineare System

$$u' = Pu + Qv, \quad v' = Ru + Sv$$

mit stetigen Koeffizienten $P, \dots, S$ ist nur scheinbar allgemeiner; es wird durch die Transformation

$$u(x) = y(x) e^{\int P dx}, \quad v(x) = z(x) e^{\int S dx}$$

in ein System der Gestalt (1) übergeführt.

²⁾ I: Annals of mathematics 21 (1919/20), S. 278–290. II: Bulletin of the american mathematical society 27 (1921), S. 322–325.

sowohl der Randbedingungen erster als auch zweiter Gattung (Sturmsche und Nicht-Sturmsche Randbedingungen). Im folgenden sollen diese Ergebnisse³⁾ wesentlich einfacher und ohne Berufung auf schon vorher erledigte Sonderfälle hergeleitet werden. Es werden sich dabei übrigens ohne Mühe zugleich allgemeinere Formulierungen ergeben. Was die Methode betrifft so spielt eine wesentliche Rolle der Übergang von den „rechtwinkligen Koordinaten“ y, z zu „Polarkoordinaten“ ϱ, ϑ .

In § 1 befasse ich mich (zugleich im Hinblick auf eine anschließende Arbeit) mit der Normung und Klassifizierung der Randbedingungen. § 2 enthält vorbereitende Hilfssätze über die Lösungen des Systems (1) im allgemeinen. Ein Teil der in diesen Hilfssätzen abgeleiteten Tatsachen ist nicht neu. § 3 enthält die Sätze, welche das eigentliche Ziel dieser Arbeit bilden. Diese werden am Schluß mit den Resultaten Ettlingers verglichen.

§ 1.

Normung der Randbedingungen.

Sind M, N die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

so gehören die Randbedingungen (2) für jedes einzelne λ genau einer der folgenden vier Gattungen an:

Gattung 0. Eine der Matrizen M, N hat den Rang 0. Ist etwa M vom Rang 0, d. h. $\alpha_\nu = \beta_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2$), so hat N den Rang 2, da die ganze Matrix (3) den Rang 2 hat. Die Gleichungen (2) besagen dann

$$y(b) = 0, \quad z(b) = 0.$$

Hat N den Rang 0, so ergibt sich entsprechend

$$y(a) = 0, \quad z(a) = 0.$$

Die Bedingungen (2) beziehen sich dann in Wirklichkeit nur auf *einen* Punkt.

Gattung 1. M und N haben den Rang 1. Dann lassen sich die Randbedingungen in zwei Gleichungen der Gestalt

$$A y(a) + B z(a) = 0, \quad C y(b) + D z(b) = 0$$

mit $|A| + |B| > 0$ und $|C| + |D| > 0$ umformen. Das sind die sogenannten Sturmschen Randbedingungen.

³⁾ Die zusammenfassende Formulierung bei Ettlinger ist übrigens nicht korrekt. Vgl. dazu den Schluß von § 3.

⁴⁾ Durch diesen Übergang war schon H. Prüfer eine besonders einfache Behandlung der Sturmschen Randwertaufgabe gelungen; Math. Annalen 95 (1926), S. 499–518, insbesondere S. 502–505.

Gattung 2. M und N haben den Rang 2. Dann lassen sich die Gleichungen (2) nach $y(b)$, $z(b)$ auflösen. Die Randbedingungen erhalten dadurch die Gestalt

$$(5) \quad y(b) = A y(a) + B z(a), \quad z(b) = C y(a) + D z(a)$$

mit

$$AD - BC \neq 0.$$

Gattung 3. Eine der Matrizen M , N hat den Rang 2, die andere den Rang 1. Hat etwa M den Rang 2, so lassen sich die Gleichungen (2) nach $y(a)$, $z(a)$ auflösen und erhalten dadurch die Gestalt

$$(6) \quad y(a) = \alpha y(b) + \beta z(b), \quad z(a) = \gamma y(b) + \delta z(b),$$

wobei die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

den Rang 1 hat. Für $|\alpha| + |\beta| > 0$ lassen sich die Bedingungen (6) daher in die Gestalt

$$(7) \quad z(a) = A y(a), \quad y(a) = C y(b) + D z(b)$$

mit $|C| + |D| > 0$ überführen, und für $|\gamma| + |\delta| > 0$ in die Gestalt

$$(8) \quad y(a) = B z(a), \quad z(a) = C y(b) + D z(b),$$

wieder mit $|C| + |D| > 0$. — Hat N den Rang 2, so lassen sich entsprechend die Bedingungen (2) in die Form

$$(9) \quad z(b) = C y(b), \quad y(b) = A y(a) + B z(a)$$

und

$$(10) \quad y(b) = D z(b), \quad z(b) = A y(a) + B z(a)$$

mit $|A| + |B| > 0$ bringen.

Besteht die Matrix (3) nur aus konstanten Elementen, so ist diese Einteilung erschöpfend. Hängen die Elemente der Matrix (3) dagegen noch von λ ab, so sind Übergänge zwischen den verschiedenen Gattungen möglich. Wir werden uns jedoch nur mit solchen Fällen beschäftigen, bei denen keine solchen Übergänge stattfinden, sondern die Randbedingungen für alle λ einer festen Gattung angehören.

Für die Frage nach der Existenz von Eigenwerten können die vier Typen der Randbedingungen dritter Gattung auf die Hälfte reduziert werden. Die Randbedingungen (9), (10) gehen nämlich durch die Transformation

$$y(x) = \eta(\xi), \quad z(x) = -\zeta(\xi), \quad \xi = -x, \quad \alpha = -b, \quad \beta = -a$$

in die Randbedingungen

$$(9a) \quad \zeta(\alpha) = -C \eta(\alpha), \quad \eta(\alpha) = A \eta(\beta) - B \zeta(\beta)$$

und

$$(10a) \quad \eta(\alpha) = -D \zeta(\alpha), \quad \zeta(\alpha) = -A \eta(\beta) + B \zeta(\beta)$$

über, d. h. in Randbedingungen von dem Typus (7) und (8), während die Differentialgleichungen (1) bei dieser Transformation in

$$(11) \quad \eta' = F(-\xi, \lambda) \zeta, \quad \zeta' = -G(-\xi, \lambda) \eta$$

übergehen. Man kann hiernach aus jedem Satz über die Existenz von Eigenwerten bei den Randbedingungen (7), (8) auch einen entsprechenden Satz für die Randbedingungen (9), (10) gewinnen.

Wir werden uns hier nur mit Randbedingungen der zweiten und dritten Gattung beschäftigen. Für diese sei noch auf eine andere Klassifizierung hingewiesen, die Birkhoff⁵⁾ eingeführt hat. Haben die Randbedingungen die Gestalt

$$y(b) = A y(a) + B z(a), \quad z(b) = C y(a) + D z(a),$$

wobei die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

den Rang 1 oder 2 hat, so heißen sie irregulär, wenn $B = A + D = 0$ ist, und regulär, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

§ 2.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. $F(x)$, $G(x)$ seien in dem Intervall $a \leq x \leq b$ stetig. Dann sind die eigentlichen Lösungen⁶⁾ des Systems

$$(12) \quad y' = Fz, \quad z' = -Gy$$

genau die Funktionen

$$(13) \quad y = C \varrho(x) \sin \vartheta(x), \quad z = C \varrho(x) \cos \vartheta(x),$$

wo C eine beliebige Konstante $\neq 0$, $\vartheta(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung

$$(14) \quad \vartheta' = F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta$$

⁵⁾ Transactions of the american mathematical society 9 (1908), S. 373–395. Birkhoff hat diese Klassifizierung für Systeme von n Differentialgleichungen eingeführt. Für die nähere Diskussion im Falle $n = 2$ vgl. M. H. Stone, ebenda 29 (1927), S. 23–53.

⁶⁾ Das sind die Lösungen $y(x)$, $z(x)$, für die $|y| + |z| \neq 0$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, stets $|y| + |z| \neq 0$ ist.

mit einem Anfangswert

$$(15) \quad 0 \leq \vartheta(a) < \pi$$

und

$$(16) \quad \varrho(x) = \exp \frac{1}{2} \int_a^x (F - G) \sin 2\vartheta \, dx$$

ist.

Beweis. Für jede eigentliche Lösung $y(x)$, $z(x)$ des Systems (12) gibt es eine Konstante $C \neq 0$ und stetig differenzierbare Funktionen $\varrho(x)$, $\vartheta(x)$, so daß $\varrho(a) = 1$ ist und die Beziehungen (13) und (15) bestehen. Aus (13) folgt

$$y' = C\varrho' \sin \vartheta + C\varrho \vartheta' \cos \vartheta, \quad z' = C\varrho' \cos \vartheta - C\varrho \vartheta' \sin \vartheta,$$

und daher nach (12)

$$(17) \quad \begin{cases} \varrho' \sin \vartheta + \vartheta' \varrho \cos \vartheta = \varrho F \cos \vartheta, \\ \varrho' \cos \vartheta - \vartheta' \varrho \sin \vartheta = -\varrho G \sin \vartheta. \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter (14) und

$$(18) \quad \varrho' = \varrho (F - G) \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

also (16), da $\varrho(a) = 1$ ist. Umgekehrt folgt (18) aus (16), und weiter (17) aus (14) und (18). Werden nun $y(x)$, $z(x)$ durch (13) definiert, so erfüllen diese Funktionen daher die Differentialgleichungen (12).

Hilfssatz 2. Sind $F(x)$, $G(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig und ist $F > 0$, so gilt folgendes:

(a) Für beliebiges α gibt es genau eine Lösung $\vartheta(x)$ der Differentialgleichung (14) mit dem Anfangswert $\vartheta(a) = \alpha$, und die Lösung existiert im ganzen Intervall (a, b) .

(b) Ist $\alpha \geq k\pi$ mit ganzzahligem k , so ist $\vartheta(x) > k\pi$ für $a < x \leq b$.

(c) Sind $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ zwei Lösungen mit den Anfangswerten α_1 , α_2 , so ist

$$(19) \quad \varrho_1(x) \varrho_2(x) \sin [\vartheta_2(x) - \vartheta_1(x)] = \sin (\alpha_2 - \alpha_1),$$

wobei $\varrho(x)$ wieder die Funktion (16) ist.

(d) Ist $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, so sind die aus den ϑ , entspringenden Funktionenpaare (13) linear unabhängig.

(e) Durchläuft α_2 wachsend das Intervall $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 + \pi$, so durchläuft $\vartheta_2(b)$ wachsend das Intervall $\vartheta_1(b) \leq \vartheta_2(b) \leq \vartheta_1(b) + \pi$.

(f) Ist $0 < \alpha_2 < \pi$ und nimmt $\vartheta_2(x)$ für $a \leq x \leq b$ kein ganzzahliges Vielfaches von π an, so ist für beliebiges α_1

$$\frac{\varrho_1(x) \sin \vartheta_1(x)}{\varrho_2(x) \sin \vartheta_2(x)} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} + \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \int_a^x \frac{F}{\varrho_2^2 \sin^2 \vartheta_2} \, dx.$$

Beweis. (a) folgt z. B. daraus, daß die rechte Seite von (14) für $a \leq x \leq b$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ stetig und beschränkt ist und eine stetige partielle Ableitung nach ϑ hat.

Zu (b). Für alle hinreichend nahe an a gelegenen $x > a$ ist sicher $\vartheta(x) > k\pi$; denn für $\alpha > k\pi$ ist das unmittelbar klar, und für $\alpha = k\pi$ folgt es daraus, daß dann $\vartheta'(a) = F(a) > 0$ ist. Bestände die Ungleichung nicht für alle $x > a$, so gäbe es ein kleinstes $\xi > a$, so daß $\vartheta(\xi) = k\pi$ wäre, und vor dieser Stelle wäre $\vartheta(x) > k\pi$, es müßte also $\vartheta'(\xi) \leq 0$ sein, während aus (14) sich $\vartheta'(\xi) = F > 0$ ergäbe.

Zu (c). Geht man zu dem System (12) über, so ist für irgendein Lösungspaar y, z , bei der besonderen Art dieses Systems⁷⁾

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & z_1(x) \\ y_2(x) & z_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(a) & z_1(a) \\ y_2(a) & z_2(a) \end{vmatrix}.$$

Auf Grund von (13) und $\varrho_1(a) = 1$ ist das gerade (19).

(d) folgt aus der obigen Determinantengleichung, da die rechte Seite $\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ jetzt $\neq 0$ ist.

Zu (e). Bekanntlich ist $\vartheta_2(b)$ eine stetige, monoton wachsende Funktion von α_2 . Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß $\vartheta_2(x) = \vartheta_1(x) + \pi$ für $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ ist. Offenbar ist nun $\vartheta_1(x) + \pi$ eine Lösung von (14) mit dem Anfangswert $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, also gleich $\vartheta_2(x)$, da es nur eine Lösung mit einem gegebenen Anfangswert gibt.

Zu (f). Für

$$u = \frac{\varrho_1 \sin \vartheta_1}{\varrho_2 \sin \vartheta_2}$$

ist

$$(\varrho_2 \sin \vartheta_2)^2 u' = (\varrho_1 \sin \vartheta_1)' \varrho_2 \sin \vartheta_2 - \varrho_1 \sin \vartheta_1 (\varrho_2 \sin \vartheta_2)',$$

also, da die Funktionen (13) das System (12) erfüllen,

$(\varrho_2 \sin \vartheta_2)^2 u' = F \varrho_1 \varrho_2 (\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1) = F \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$, letzteres wegen (19). Hieraus folgt die Behauptung, da

$$u(a) = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

ist.

Wir gehen nun zu dem System (1) mit dem Parameter λ über. Die vorangehenden Hilfssätze bleiben bestehen, wenn in (14) unter F, G die Funktionen $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ verstanden werden. Für diese Gleichung (14) sei diejenige Lösung, die für $x = a$ den Anfangswert α hat, mit $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ bezeichnet und die zugehörige Funktion (16) mit $\varrho(x, \alpha, \lambda)$. Dann gilt der

⁷⁾ Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 172.

Hilfssatz 3. Für $a \leq x \leq b$ und $\lambda = l_n$ ($n = 1, 2, \dots$) seien $F(x, \lambda)$ und $G(x, \lambda)$ stetige Funktionen von x sowie $F > 0$; ferner sei

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G(x, l_n) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, l_n)}{G(x, l_n)} = 0$$

gleichmäßig für $a \leq x \leq b$.

(a) Dann ist bei gegebenen Zahlen $0 \leq \alpha_0 < \pi$, $a < a_1 < b$ und ganzzahligem k

$$(21) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \vartheta(x, \alpha, l_n) \leq \alpha_0 + k\pi \text{ gleichmäßig für } a \leq x \leq b, \alpha \leq \alpha_0 + k\pi,$$

$$(22) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \vartheta(x, \alpha, l_n) \leq k\pi \text{ gleichmäßig für } a_1 \leq x \leq b, \alpha \leq \alpha_0 + k\pi,$$

und insbesondere für $k = 0$

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(x, \alpha, l_n) = 0 \text{ gleichmäßig für } a_1 \leq x \leq b, 0 \leq \alpha \leq \alpha_0.$$

(b) Hat F überdies für alle $\lambda = l_n$ und $a \leq x \leq b$ eine obere Schranke F_2 und in einem Teilintervall $a' \leq x \leq b'$ ($a < a' < b' < b$) eine untere Schranke $F_1 > 0$, so ist

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x, \alpha, l_n) \sin \vartheta(x, \alpha, l_n) = +\infty \text{ gleichmäßig für } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \text{ und } b' \leq x \leq b,$$

ferner

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_1 \sin \vartheta_1}{\varrho_2 \sin \vartheta_2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 0,$$

wenn $\vartheta_1 = \vartheta(b, 0, \lambda)$ und $\vartheta_2 = \vartheta(b, \frac{\pi}{2}, \lambda)$ ist und ϱ_1, ϱ_2 die zugehörigen Funktionen (16) für $x = b$ sind.

Beweis. (a) Man wähle U, V irgendwie so, daß

$$\alpha_0 + k\pi < U < (k+1)\pi, \quad k\pi < V < U$$

ist, und verbinde in der x, ϑ -Ebene die Punkte a, U und b, V durch eine geknickte Strecke s , deren über $a_1 \leq x \leq b$ liegender Teil horizontal verläuft; s sei analytisch durch die Funktion $\vartheta = \Phi(x)$ gegeben. Aus (20) folgt dann, daß für $\lambda = l_n$ und alle hinreichend großen n

$$(26) \quad F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta = G \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{F}{G} \operatorname{ctg}^2 \vartheta \right) < \Phi'_-(x)$$

gleichmäßig für $a \leq x \leq b$ und $\vartheta = \Phi(x)$ gilt. Für

diese λ und $\alpha \leq \alpha_0 + k\pi$ liegt daher die Kurve $\vartheta = \vartheta(x, \alpha, \lambda)$ ganz unterhalb s . Denn für den

Anfangspunkt der Kurve trifft es offensichtlich zu. Träfe es nicht für alle x zu, so müßte es für eines jener λ und α ein kleinstes $\xi > a$ geben, für welches

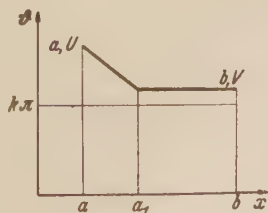


Fig. 1.

die Kurve den Streckenzug s erreicht. In diesem Punkte müßte $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ eine Ableitung $\geq \Phi'_-(\xi)$ haben. Da ϑ der Differentialgleichung (14) genügt, ist das aber nach (26) ausgeschlossen. Da U beliebig nahe an $\alpha_0 + k\pi$ und V beliebig nahe an $k\pi$ gewählt werden kann, folgt hieraus (21) und (22). Wird $k = 0$ gewählt, so ist nach Hilfssatz 2 (b) im ganzen Intervall $\vartheta \geq 0$; daher folgt (23) aus (22).

(b) Man kann $\alpha_0 > \frac{1}{2}\pi$ annehmen, so daß $0 < \eta < \frac{1}{2}\pi$ für $\eta = \pi - \alpha_0$ ist. Die Beziehung (24) wird in zwei Schritten bewiesen. Zunächst sei $\eta \leq \alpha \leq \pi - \eta$. Nach Hilfssatz 2 (b) und (21) mit $k = 0$ ist für $\lambda = \lambda_n$ und alle hinreichend großen n

$$0 < \vartheta(x, \alpha, \lambda) < \pi,$$

also $\varrho \sin \vartheta > 0$. Da $y = \varrho \sin \vartheta$ und $z = \varrho \cos \vartheta$ nach Hilfssatz 1 dem System (1) genügen, ist

$$\frac{(\varrho \sin \vartheta)'}{\varrho \sin \vartheta} = F \frac{\varrho \cos \vartheta}{\varrho \sin \vartheta} = F \operatorname{ctg} \vartheta,$$

also

$$(27) \quad \varrho(x, \alpha, \lambda) \sin \vartheta(x, \alpha, \lambda) = \sin \alpha e^{\int_x F(x, \lambda) \operatorname{ctg} \vartheta(x, \alpha, \lambda) dx}$$

Hierin ist $\sin \alpha \geq \sin \eta$, ferner nach (21) und (23) bei beliebig gegebenem $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$ für alle hinreichend großen n

$$0 < \vartheta(x, \alpha, \lambda) \leq \pi - \frac{1}{2}\eta \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b,$$

$$0 < \vartheta(x, \alpha, \lambda) \leq \delta \quad \text{für} \quad a' \leq x \leq b',$$

also für $b' \leq x \leq b$

$$\int_a^x F \operatorname{ctg} \vartheta dx \geq (b' - a') F_1 \operatorname{ctg} \delta - (b - a) F_2 \operatorname{ctg} \eta.$$

Da δ beliebig nahe an 0 gewählt werden kann, wächst dieser Ausdruck, und daher (27) durch Vergrößerung von n gleichmäßig für $\eta \leq \alpha \leq \pi - \eta$ über jede Grenze.

Für den noch übriggebliebenen Bereich $0 \leq \alpha \leq \eta$ kann man so schließen: Ist $C > 0$ beliebig gegeben, so ist für $\lambda = \lambda_n$ und alle hinreichend großen n nach (20) $-G > C$ und nach Hilfssatz 2(b) $y = \varrho \sin \vartheta \geq 0$. Für $z = \varrho \cos \vartheta$ folgt daher aus der zweiten Gleichung (1)

$$z(x) \geq z(a) = \cos \alpha \geq \cos \eta > 0,$$

also aus der ersten Gleichung (1)

$$y(x) \geq (x - a') F_1 \cos \eta \quad \text{für} \quad a' \leq x \leq b',$$

also aus der zweiten Gleichung (1)

$$z(x) \geq \frac{1}{2}(x - a')^2 C F_1 \cos \eta \quad \text{für} \quad a' \leq x \leq b',$$

und daher wieder aus der ersten Gleichung (1) für $b' \leq x \leq b$

$$y(x) \geq \frac{1}{6} (b' - a')^3 C F_1^2 \cos \eta.$$

Da C beliebig groß gewählt werden kann, ist (24) auch für den noch übriggebliebenen Bereich bewiesen.

Schließlich folgt die erste der Behauptungen (25) aus Hilfssatz 2 (f) und (24) mit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} \pi$. Dividiert man die Gleichung (19) durch $\varrho_2 \cos \vartheta_2 \cdot \varrho_2 \sin \vartheta_2$, so erhält man bei Berücksichtigung von (24) und $\vartheta_2(b) \rightarrow 0$

$$\frac{\varrho_1 \cos \vartheta_1}{\varrho_2 \cos \vartheta_2} - \frac{\varrho_1 \sin \vartheta_1}{\varrho_2 \sin \vartheta_2} = \frac{1}{\varrho_2 \cos \vartheta_2 \cdot \varrho_2 \sin \vartheta_2} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$; daher ist wegen $\vartheta_1, \vartheta_2 \rightarrow 0$ und der schon bewiesenen ersten Gleichung (25) auch die zweite Gleichung richtig.

Hilfssatz 4. Für $a \leq x \leq b$ und $\lambda = L_n$ ($n = 1, 2, \dots$) seien $F(x, \lambda)$ und $G(x, \lambda)$ stetige Funktionen von x sowie $F \geq F_0 > 0$; ferner sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x, L_n) = +\infty$$

gleichmäßig in $a \leq x \leq b$. Dann ist bei festem α_0 gleichmäßig für alle $\alpha \geq \alpha_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(b, \alpha, L_n) = +\infty.$$

Beweis. Man wähle $V > (b - a) F_0 + \alpha_0$ und verbinde in der x, ϑ -Ebene den Punkt a, α_0 mit b, V . An den Punkten der Strecke, deren Ordinate ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, schalte man kleine Strecken s_v ein, für welche der Tangens des Neigungswinkels $\frac{1}{2} F_0$ ist. Indem man die Endpunkte der Strecken verbindet (vgl. Fig. 2), entsteht ein Streckenzug, der durch die Funktion $\vartheta = \Phi(x)$ gegeben sei. Für $\lambda = L_n$ und alle hinreichend großen n ist dann nach der Voraussetzung $G \geq F_0$, also auf den s_v

$$F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta \geq F_0 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) > \frac{1}{2} F_0.$$

Weiter kann noch n so groß gewählt werden, daß auf den restlichen Strecken $G \sin^2 \vartheta > \Phi'(x)$, also insgesamt in allen Punkten des Streckenzuges

$$F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta > \Phi'_-(x)$$

ist. Dann gelangt aber für diese λ keine der Kurven $\vartheta = \vartheta(x, \alpha, \lambda)$ unterhalb des Streckenzuges, da sie sonst mit dem Streckenzug einen Punkt gemeinsam haben müßte, in dem $\vartheta' \leq \Phi'_-$ wäre, und das ist, da $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ der Differentialgleichung (14) genügt, nach dem Vorangehenden ausgeschlossen. Da V beliebig groß gewählt werden kann, ist damit die Behauptung bewiesen.

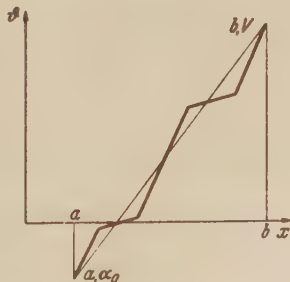


Fig. 2.

§ 3.

Über die Existenz von Eigenwerten.

Die gemeinsamen *Voraussetzungen* für die folgenden Sätze sind:

I. Für $a \leq x \leq b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ sind $F(x, \lambda)$ und $G(x, \lambda)$ stetig sowie $F > 0$.

II. Für eine in $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ gelegene Zahlenfolge $\lambda = l_n$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x, l_n) = -\infty \quad \text{gleichmäßig in } a \leq x \leq b;$$

ferner hat F für diese λ im ganzen Intervall $\langle a, b \rangle$ eine obere Schranke und⁸⁾ in einem Teilintervall eine positive untere Schranke.

III. Für eine in $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ gelegene Zahlenfolge $\lambda = L_n$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x, L_n) = +\infty \quad \text{gleichmäßig in } a \leq x \leq b;$$

ferner hat F für diese λ im ganzen Intervall $\langle a, b \rangle$ eine positive untere Schranke.

IV. Die vorkommenden Funktionen $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ sind für stetig $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

Die auf die Differentialgleichungen bezüglichen Voraussetzungen I bis III sind z. B. erfüllt für das System $y' = z$, $z' = \left(\frac{1}{\lambda} \cos \frac{1}{\lambda}\right) y$ im Bereich $0 < \lambda < 1$. Sie sind so beschaffen, daß alle Hilfssätze von § 2 anwendbar sind.

Satz 1. *Es seien die Randbedingungen erster Gattung*

$$(28) \quad Ay(a) + Bz(a) = 0, \quad Cy(b) + Dz(b) = 0$$

gegeben, und es sei

*für das ganze Intervall $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ entweder $A(\lambda) \neq 0$ oder $B(\lambda) \neq 0$
sowie entweder $C(\lambda) \neq 0$ oder $D(\lambda) \neq 0$.*

Dann gibt es für die Randwertaufgabe (1) + (28) unendlich viele Eigenwerte.

Beweis. Es sind wegen IV stetige Funktionen $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ definiert

$$\text{für } A \neq 0 \text{ durch } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{für } B \neq 0 \text{ durch } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{A}{B}, \quad 0 < \alpha < \pi;$$

$$\text{für } C \neq 0 \text{ durch } \operatorname{tg} \beta = -\frac{D}{C}, \quad |\beta| < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{für } D \neq 0 \text{ durch } \operatorname{ctg} \beta = -\frac{C}{D}, \quad 0 < \beta < \pi.$$

⁸⁾ Für Satz 1 fällt der Rest von II fort.

Geht man nach Hilfssatz 1 von den Lösungen y, z des Systems (1) zu ihren Darstellungen (13) durch „Polarkoordinaten“ über, so ergibt sich, daß die Randbedingungen (28) genau dann erfüllt sind, wenn für eine ganze Zahl m

$$(29) \quad \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) = \beta(\lambda) + m\pi$$

ist. Nach Hilfssatz 3 (22) mit $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, $k = 1$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(b, \alpha(l_n), l_n) \leq \pi,$$

also

$$\overline{\lim}_{\lambda_1 < \lambda < \lambda_2} [\vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) - \beta(\lambda)] \leq 2\pi.$$

Hilfssatz 4 ergibt entsprechend

$$\overline{\lim}_{\lambda_1 < \lambda < \lambda_2} [\vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) - \beta(\lambda)] = +\infty.$$

Da α, β und ϑ stetig von λ abhängen, gibt es also unendlich viele λ , so daß (29) für ganze Zahlen m erfüllt ist.

Satz 2. Es seien die Randbedingungen dritter Gattung

$$(7) \quad z(a) = Ay(a), \quad y(a) = Cy(b) + Dz(b)$$

gegeben, und es sei für $n = 1, 2, \dots$

$$(30) \quad A(l_n) \text{ nach unten beschränkt,}$$

sowie entweder

$$(a) \quad D(l_n) = 0, \quad C(l_n) \geq C_0 > 0$$

oder

$$(b) \quad D(l_n) \geq D_0 > 0, \quad C(l_n) \text{ nach unten beschränkt.}$$

Dann gibt es für die Randwertaufgabe (1) + (7) mindestens einen Eigenwert.

Beweis. Durch

$$\operatorname{ctg} \alpha = A, \quad 0 < \alpha < \pi$$

ist eine stetige Funktion $\alpha(\lambda)$ bestimmt. Geht man wieder von y, z zu ϱ, ϑ über, so erkennt man, daß die erste Gleichung (7) für beliebiges λ durch

$$(31) \quad y = \varrho(x, \alpha(\lambda), \lambda) \sin \vartheta(x, \alpha(\lambda), \lambda), \quad z = \varrho \cos \vartheta,$$

und die zweite der Gleichungen (7) für ein λ genau dann erfüllt ist, wenn

$$(32) \quad U(\lambda) \equiv \varrho(b, \alpha(\lambda), \lambda) [C(\lambda) \sin \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) + D(\lambda) \cos \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda)] - \sin \alpha(\lambda) = 0$$

ist. Nach Hilfssatz 4 nimmt ϑ beliebig große Werte an, es gibt also, da C bzw. D ein festes Vorzeichen haben, ein λ , so daß die eckige Klammer < 0 ist, es ist somit

$$(33) \quad \overline{\lim}_{\lambda_1 < \lambda < \lambda_2} U(\lambda) < 0.$$

Wegen (30) gibt es ein $0 < \alpha_0 < \pi$, so daß $0 \leq \alpha(l_n) \leq \alpha_0$ für alle n ist. Daher ist im Fall (a) nach Hilfssatz 3 (24)

$$U(l_n) \rightarrow +\infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und im Fall (b) nach Hilfssatz 3 (24) und (23)

$$U(l_n) = D \varrho(b, \alpha, l_n) \cos \vartheta(b, \alpha, l_n) \left[1 + \frac{C}{D} \operatorname{tg} \vartheta \right] - \sin \alpha \rightarrow +\infty,$$

also in jedem Falle

$$\overline{\lim}_{\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2} U(\lambda) = +\infty.$$

Da U stetig von λ abhängt, folgt hieraus mit (33), daß $U(\lambda)$ eine Nullstelle hat, also ein Eigenwert existiert.

Satz 3. Es seien die Randbedingungen dritter Gattung

$$(8) \quad y(a) = B z(a), \quad z(a) = C y(b) + D z(b)$$

gegeben. Ferner sei für $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$

$$\text{entweder A: } B(\lambda) \geq 0 \quad | \quad \text{oder B: } B(\lambda) < 0,$$

und für $n = 1, 2, \dots$

entweder

$$(a) \quad D(l_n) = 0, \quad C(l_n) \geq C_0 > 0$$

oder

$$(b) \quad D(l_n) \geq D_0 > 0, \\ C(l_n) \text{ nach unten beschränkt,}$$

$B(l_n) \leq B_0 < 0$ und entweder

$$(a) \quad D(l_n) = 0, \quad C(l_n) \leq C_0 < 0$$

oder

$$(b) \quad D(l_n) \leq D_0 < 0, \\ C(l_n) \text{ nach oben beschränkt.}$$

Dann gibt es für die Randwertaufgabe (1) + (8) mindestens einen Eigenwert.

Beweis. Durch

$$\operatorname{tg} \alpha = B \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

je nachdem der Fall A oder B vorliegt, ist eine stetige Funktion $\alpha(\lambda)$ bestimmt. Die erste der Gleichungen (8) ist dann wieder für beliebige λ durch (31) erfüllt, und die zweite der Gleichungen (8) ist für ein λ genau dann erfüllt, wenn

$$V(\lambda) = \varrho[U \sin \vartheta + D \cos \vartheta] - \cos \alpha = 0$$

ist. Es gibt wieder ein λ , so daß die eckige Klammer < 0 im Fall A und > 0 im Fall B ist. Es ist also

$$(34) \quad \underline{\lim} V(\lambda) < 0 \text{ im Fall A,} \quad \overline{\lim} V(\lambda) > 0 \text{ im Fall B.}$$

Weiter ergibt sich wie im vorigen Beweis, daß $V(l_n)$ für große n das Vorzeichen von C im Fall (a) und von D im Fall (b) hat. Es ist also

$$\overline{\lim} V(\lambda) = +\infty \text{ im Fall A, } \underline{\lim} V(\lambda) = -\infty \text{ im Fall B.}$$

Hieraus folgt mit (34) wieder, daß $V(\lambda)$ in der Tat eine Nullstelle hat.

Satz 4. Es seien die Randbedingungen zweiter Gattung

$$(5) \quad y(b) = A y(a) + B z(a), \quad z(b) = C y(a) + D z(a)$$

gegeben mit

$$(35) \quad \Delta(\lambda) = AD - BC > 0.$$

Ferner sei $\Delta(\lambda)$ beschränkt und entweder

(a) $B(\lambda) \equiv 0$, $A(\lambda) > 0$, $A(l_n) \geq A_0 > 0$, $C(l_n)$ nach oben beschränkt oder

(b) $B(\lambda) < 0$, $B(l_n) \leq B_0 < 0$, $C(l_n)$ und $D(l_n)$ nach oben, $A(l_n)$

nach unten beschränkt. Dann gibt es für die Randwertaufgabe (1) + (5) mindestens einen Eigenwert.

Beweis. Es sei $y_v(x)$, $z_v(x)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichungen (1) mit den Anfangswerten

$$y_1(a) = 0, \quad z_1(a) = 1; \quad y_2(a) = 1, \quad z_2(a) = 0.$$

Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn⁹⁾ die Determinante

$$W(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(b) - B & y_2(b) - A \\ z_1(b) - D & z_2(b) - C \end{vmatrix}$$

den Wert 0 hat. Geht man nach Hilfssatz 1 zu der Darstellung von y_v , z_v durch Polarkoordinaten über, so ist

$$y_v(b) = \varrho_v(\lambda) \sin \vartheta_v(\lambda), \quad z_v(b) = \varrho_v(\lambda) \cos \vartheta_v(\lambda)$$

mit

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\lambda) &= \vartheta(b, 0, \lambda), & \varrho_1(\lambda) &= \varrho(b, 0, \lambda), \\ \vartheta_2(\lambda) &= \vartheta\left(b, \frac{\pi}{2}, \lambda\right), & \varrho_2(\lambda) &= \varrho\left(b, \frac{\pi}{2}, \lambda\right). \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung von (19) ergibt sich also

$$W(\lambda) = -(1 + \Delta) - \varrho_2(B \cos \vartheta_2 - D \sin \vartheta_2) + \varrho_1(A \cos \vartheta_1 - C \sin \vartheta_1).$$

Im Fall (a) ist $\Delta = AD$, also $D > 0$ und daher wieder nach Hilfssatz 3

$$W(l_n) = -(1 + \Delta) + D \varrho_2 \sin \vartheta_2 + A \varrho_1 \cos \vartheta_1 \left(1 - \frac{C}{A} \operatorname{tg} \vartheta_1\right) \rightarrow +\infty$$

⁹⁾ Vgl. z. B. E. L. Ince, Differential equations, London 1927, S. 207 f.

für $n \rightarrow \infty$, also

$$(36) \quad \overline{\lim} W(\lambda) = +\infty.$$

Ferner nimmt ϑ_1 nach Hilfssatz 4 beliebig große Werte, insbesondere also für ein $\lambda = \lambda^*$ einen Wert $(2k+1)\pi$ mit ganzzahligem k an. Für dieses λ^* ist dann nach Hilfssatz 2 (e)

$$(2k+1)\pi < \vartheta_2 < (2k+2)\pi,$$

also $\sin \vartheta_2 < 0$ und daher

$$W(\lambda^*) = -(1+A) + D \varrho_2 \sin \vartheta_2 - A \varrho_1 < -(1+A) < 0.$$

Es ist also

$$\underline{\lim} W(\lambda) < 0.$$

Da $W(\lambda)$ eine stetige Funktion von λ ist, folgt hieraus mit (36), daß $W(\lambda)$ den Wert 0 annimmt.

Im Fall (b) wähle man $\beta(\lambda)$ so, daß

$$B = \sqrt{B^2 + D^2} \sin \beta, \quad D = \sqrt{B^2 + D^2} \cos \beta$$

ist. Da $B < 0$ ist, läßt sich β so normieren, daß $\pi < \beta < 0$ ist, und β ist dann eine stetige Funktion von λ . Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} -W(\lambda) \sin \beta &= (1+A) \sin \beta - B \varrho_2 \sin(\vartheta_2 - \beta) \\ &\quad + A \varrho_1 \sin(\vartheta_1 - \beta) - \frac{A}{\sqrt{B^2 + D^2}} \varrho_1 \sin \vartheta_1. \end{aligned}$$

Da β beschränkt und stetig ist, gibt es nach Hilfssatz 4 ein $\lambda = \lambda^*$, so daß $\vartheta_1 - \beta = (2k+1)\pi$ ist. Nach Hilfssatz 2 (e) ist dann

$(2k+1)\pi < \vartheta_2 - \beta < (2k+2)\pi$, ferner ist $2k\pi < \vartheta_1 < (2k+1)\pi$, also

$$W(\lambda^*) \leq -(1+A) \text{ und daher } \underline{\lim} W(\lambda) < 0.$$

Ferner ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen (b) und des Hilfssatzes 3

$$\begin{aligned} W(l_n) &= -(1+A) - B \varrho_2 \cos \vartheta_2 \left[1 - \frac{D}{B} \operatorname{tg} \vartheta_2 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(\frac{A}{B} \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} - \frac{C}{B} \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} \right) \right] \\ &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, also $\overline{\lim} W(\lambda) = +\infty$, und daher hat $W(\lambda)$ auch in diesem Falle eine Nullstelle.

Es bleibt noch zu klären, in welchem Verhältnis die hier hergeleiteten Sätze zu den Ergebnissen Ettlingers stehen. Ettlinger betrachtet statt des Systems (1) die Differentialgleichung

$$(37) \quad [P(x, \lambda) y']' - Q(x, \lambda) y = 0$$

und setzt voraus, daß P, Q stetig sind, mit wachsendem λ monoton abnehmen, $P > 0$ und

$$-\frac{\text{Min } Q}{\text{Min } P} \rightarrow -\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow A_1, \quad -\frac{\text{Max } Q}{\text{Max } P} \rightarrow +\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow A_2$$

ist; dabei bedeuten Min, Max das Minimum und Maximum bei festem λ für $a \leq x \leq b$. Die Lösungen der Gleichung (37) sind genau die Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{P}{A} y'\right)' - \frac{Q}{A} y = 0,$$

wo $A = A(\lambda)$ irgendeine stetige Funktion > 0 ist. Die Lösungen dieser letzten Gleichung werden gerade durch die Lösungen des Systems (1) geliefert, wenn

$$F = \frac{A}{P}, \quad G = -\frac{Q}{A}$$

ist. Hängt P nicht von λ ab, so erfüllen F, G schon für $A = 1$ die Voraussetzungen I bis III. Hängt P von λ ab, so wähle man für $A(\lambda)$ eine stetige Funktion > 0 , die in der Nähe von A_1 mit Min P und in der Nähe von A_2 mit Max P übereinstimmt. Dann ist gleichmäßig in $a \leq x \leq b$

$$G(x, \lambda) \rightarrow -\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow A_1 \text{ und } F \leq 1 \text{ in der Nähe von } A_1,$$

$$G(x, \lambda) \rightarrow +\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow A_2 \text{ und } F \geq 1 \text{ in der Nähe von } A_2,$$

so daß bis auf den letzten Teil von II alle Voraussetzungen I bis III erfüllt sind, während die Monotonie von P, Q nicht benutzt ist. Abgesehen von einer geringen Diskrepanz kann man also sagen, daß die Lösungssysteme der von Ettlinger betrachteten Differentialgleichungen auch durch die Lösungssysteme der hier betrachteten Gleichungen (1) geliefert werden. Die Voraussetzungen von Ettlinger sind insofern schärfer, als sie verlangen, daß die Folge der l_n und L_n stets gegen A_1 bzw. A_2 , d. h. gegen zwei verschiedene Werte, konvergieren, und als sie sich auf *alle* λ in der Nähe dieser Punkte beziehen.

Bei den Randbedingungen beschränke ich mich auf konstante Koeffizienten, da hierbei schon das Wesentliche in Erscheinung tritt. Nach der zusammenfassenden Formulierung bei Ettlinger¹⁰⁾ gibt es für die Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) - \beta_1 z(a) - \gamma_1 y(b) + \delta_1 z(b) = 0,$$

$$\alpha_2 y(a) - \beta_2 z(a) - \gamma_2 y(b) + \delta_2 z(b) = 0$$

Eigenwerte, wenn $D_{12} D_{34} = 0$ und entweder $|D_{24}| + |D_{14}| > 0$, $D_{14} \geq 0$, $D_{24} \geq 0$ oder $D_{24} = D_{14} = 0$, $|D_{13}| + |D_{23}| > 0$, $D_{13} \leq 0$, $D_{23} \leq 0$ ist, sowie auch, wenn $D_{12} D_{34} \neq 0$ und entweder $D_{24} > 0$ oder $D_{24} = 0$,

¹⁰⁾ I, S. 287. Die dortige Formulierung für die Gleichung (37) ist auf das hier betrachtete System (1) transponiert.

$D_{14} > 0$ ist; dabei bedeutet D_{pq} die Determinante, die aus der p -ten und q -ten Spalte der Matrix (3) gebildet ist. Es fällt auf, daß einerseits die Existenz von Eigenwerten davon unabhängig ist, in welcher Reihenfolge die beiden Randbedingungen geschrieben werden, andererseits aber diese Reihenfolge von Einfluß auf das Vorzeichen der Determinanten ist, die in der obigen Formulierung vorkommen. Tatsächlich benutzt Ettlinger bei seinem Beweis auch eine bestimmte Anordnung der beiden Randbedingungen, nämlich für die Randbedingungen, die hier in Satz 2 und 3 betrachtet sind, diejenige Anordnung, bei der $D_{12} > 0$ ist. Die obigen Bedingungen Ettlingers lauten dann für die Randbedingungen (7)

$$D > 0, A \geq 0 \quad \text{oder} \quad D = 0, C > 0, A \geq 0,$$

und für die Randbedingungen (8)

$$D > 0, B \geq 0, \quad \text{oder} \quad D = 0, C > 0, B \geq 0.$$

Sie enthalten also noch eine Vorschrift über das Vorzeichen von A bzw. B , während sich hier gezeigt hat, daß diese Vorschrift unnötig ist. Im Falle der Randbedingungen zweiter Gattung und konstanter Koeffizienten scheinen die Bedingungen Ettlingers bei einer entsprechenden Korrektur gerade mit den hier in Satz 4 aufgestellten übereinzustimmen.

(Eingegangen am 27. August 1938.)

Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Es handelt sich um das System der Differentialgleichungen

$$(1) \quad y'(x) = F(x, \lambda) z(x), \quad z'(x) = -G(x, \lambda) y(x) \quad (F > 0)$$

in dem Intervall $a \leq x \leq b$ mit den Randbedingungen

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) = \gamma_1 y(b) + \delta_1 z(b), \\ \alpha_2 y(a) + \beta_2 z(a) = \gamma_2 y(b) + \delta_2 z(b). \end{cases}$$

Dabei sind die $\alpha, \dots, \delta$, gegebene Zahlen oder Funktionen des Parameters λ , und die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

hat für jedes λ den Rang 2.

Diese Randwertaufgabe besagt dasselbe wie die Aufgabe, die aus der Differentialgleichung

$$(3) \quad \left(\frac{1}{F} y' \right)' + G y = 0$$

und den Randbedingungen (2) mit $z(x) = \frac{y'(x)}{F(x, \lambda)}$ besteht.

Die Randwertaufgabe ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1$$

ist. Je nachdem $\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 \equiv 0$ oder $\neq 0$ ist, lassen sich die Randbedingungen (2) in die Gestalt

$$A y(a) = B z(a), \quad C y(b) = D z(b)$$

mit

$$|A| + |B| > 0, \quad |C| + |D| > 0$$

(Randbedingungen erster Gattung oder Sturmsche Randbedingungen) oder in die Gestalt

$$y(b) = A y(a) + B z(a), \quad z(b) = C y(a) + D z(a)$$

mit

$$AD - BC = 1$$

(Randbedingungen zweiter Gattung) bringen¹⁾.

Seit der grundlegenden Abhandlung von C. Sturm²⁾ ist die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (3) und insbesondere der Eigenfunktionen der Randwertaufgabe erster Gattung immer wieder Gegenstand von Untersuchungen³⁾ gewesen. Die entsprechende Frage für die Randwertaufgabe zweiter Gattung ist erst beträchtlich später behandelt worden. Die allgemeinsten Ergebnisse über diese haben O. Haupt⁴⁾ und H. J. Ettliger⁵⁾ erreicht. Haupt benutzt eine Kontinuitätsmethode, durch die er das allgemeine Problem auf ein Problem für eine spezielle Differentialgleichung zurückführt. Ettliger führt durch Stetigkeitsbetrachtungen anderer Art den Fall der Randbedingungen zweiter Gattung auf den der Randbedingungen erster Gattung zurück.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode verwendet, durch die sich das jeweils vorgelegte Problem unmittelbar angreifen läßt. Bei dieser Methode spielt eine wesentliche Rolle die Darstellung der gesuchten Funktionen $y(x)$, $z(x)$ durch „Polarkoordinaten“ $\varrho(x)$, $\vartheta(x)$. Für die Randwertaufgabe erster Gattung hat zuerst H. Prüfer⁶⁾ gezeigt, daß durch eine derartige Darstellung das Problem leichter angreifbar wird. Daß dieses auch für den Fall der Randbedingungen zweiter Gattung gilt, ist nicht so unmittelbar zu sehen. Tatsächlich führt jedoch, wie hier gezeigt werden soll, dieser Ansatz auch bei den Randbedingungen zweiter Gattung zum Ziel. Da ohnehin die erforderlichen Mittel bereitgestellt werden müssen, leite ich auch den Oszillationssatz für die Randbedingungen erster Gattung nach dieser Methode in allgemeiner Form her. Für den Fall, daß F , A , ..., D nicht von λ abhängen, werden die Entwicklungen, wie man unmittelbar erkennt, wesentlich kürzer.

¹⁾ Vgl. hierzu etwa E. Kamke, diese Zeitschrift **44**, S. 620 f.

²⁾ Journal de mathématiques pures et appliquées **1** (1836), S. 106–186.

³⁾ Vgl. M. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris 1917.

⁴⁾ Untersuchungen über Oszillationstheoreme, Diss. Würzburg 1911; Math. Annalen **76** (1915), S. 67–104 (hier muß es nach einer Mitteilung von Haupt auf S. 86, Zeile 6 heißen: „die Bedingung (2a) ist gewiß erfüllt, wenn *gleichmäßig* für alle x des Intervalls $\langle a, b \rangle$...“). Haupt setzt A , ..., D als konstant voraus, aber die Methode ist wohl auch anwendbar, wenn diese Spezialisierung nicht vorliegt.

⁵⁾ Transactions of the american mathematical society **19** (1918), S. 79–96; **22** (1921), S. 136–143.

⁶⁾ Math. Annalen **95** (1926), S. 499–518, insbesondere S. 502–505. Prüfer behandelt den Sonderfall: F , A , ..., D von λ unabhängig, G von der Gestalt $\lambda g(x)$. Etwas allgemeiner bei E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 274–280.

§ 1.

Umformung der Randwertaufgaben. Hilfssätze.

Es werden folgende Voraussetzungen vorkommen:

- I. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ stetig und $F > 0$ für $a \leq x \leq b$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.
 II. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ nehmen bei festem x mit wachsendem λ nicht ab;
 für je zwei Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2$ gibt es eine Stelle $x_0 = x_0(\lambda_1, \lambda_2)$, so daß
- $$G(x_0, \lambda_1) < G(x_0, \lambda_2)$$

oder

$$F(x_0, \lambda_1) < F(x_0, \lambda_2) \quad \text{und} \quad |G(x_0, \lambda_1)| + |G(x_0, \lambda_2)| > 0$$

ist.

$$\text{III. } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} G(x, \lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} G(x, \lambda) = +\infty.$$

Später werden noch Voraussetzungen über die Randbedingungen hinzukommen.

Für die ersten drei Hilfssätze genügt die Voraussetzung I.

Hilfssatz 1. Die eigentlichen Lösungen des Systems (1) sind für jedes λ genau die Funktionen

$$(4) \quad y = C \varrho(x) \sin \vartheta(x), \quad z = C \varrho(x) \sin \vartheta(x),$$

wo C eine beliebige Konstante $\neq 0$, $\vartheta(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung

$$(5) \quad \vartheta' = F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta$$

mit einem Anfangswert

$$(6) \quad 0 \leq \vartheta(a) < \pi$$

und

$$(7) \quad \varrho(x) = \exp \frac{1}{2} \int_a^x (F - G) \sin 2\vartheta dx$$

ist.

Beweis. Siehe S. 622f. der vorangehenden Abhandlung¹⁾.

Hilfssatz 2. Die Randbedingungen erster Gattung

$$(8) \quad \begin{cases} Ay(a) = Bz(a), & |A| + |B| > 0, \\ Cy(b) = Dz(b), & |C| + |D| > 0 \end{cases}$$

besagen für das System (1) dasselbe wie

$$(9) \quad \vartheta(a) = \alpha, \quad \vartheta(b) = \beta + n\pi, \quad n \text{ eine ganze Zahl,}$$

für die Differentialgleichung (5); dabei sind α, β durch

$$(10) \quad A \sin \alpha = B \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$(11) \quad C \sin \beta = D \cos \beta, \quad 0 < \beta \leq \pi^7)$$

eindeutig festgelegt.

⁷⁾ Daß diese gegenüber (10) veränderte Normierung zweckmäßig ist, wird sich im § 2 zeigen.

Beweis. Die Gleichungen (8) besagen nach Hilfssatz 1

$$A \sin \vartheta(a) = B \cos \vartheta(a), \quad C \sin \vartheta(b) = D \cos \vartheta(b),$$

also, wenn α, β durch (10) und (11) festgelegt sind,

$$\vartheta(a) = \alpha + m\pi, \quad \vartheta(b) = \beta + n\pi, \quad m \text{ und } n \text{ ganze Zahlen.}$$

Da $0 \leq \alpha, \vartheta(a) < \pi$ ist, folgt weiter $m = 0$, d. h. gerade (9).

Hilfssatz 3. Die Randbedingungen zweiter Gattung

$$(12) \quad \begin{cases} y(b) = Ay(a) + Bz(a), & z(b) = Cy(a) + Dz(a) \\ AD - BC = 1 \end{cases}$$

besagen für das System (1) dasselbe wie

$$(13) \quad \varrho(b) = \sigma, \quad \vartheta(b) = \beta + 2n\pi, \quad n \text{ eine ganze Zahl,}$$

für die Differentialgleichung (5); dabei ist

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha = \vartheta(a), & \sigma > 0, \\ \sigma^2 = (A \sin \alpha + B \cos \alpha)^2 + (C \sin \alpha + D \cos \alpha)^2 \end{cases}$$

und β ein beliebiger der durch

$$(15) \quad \sigma \sin \beta = A \sin \alpha + B \cos \alpha, \quad \sigma \cos \beta = C \sin \alpha + D \cos \alpha$$

bestimmten Werte.

Beweis. Die Randbedingungen (12) besagen nach (4)

$$\varrho(b) \sin \vartheta(b) = A \sin \alpha + B \cos \alpha,$$

$$\varrho(b) \cos \vartheta(b) = C \sin \alpha + D \cos \alpha.$$

Hieraus folgt sofort $\varrho^2 = \sigma^2$; wegen der letzten Gleichung (12) ist dabei $\sigma \neq 0$, kann also positiv gewählt werden, so daß die erste der Gleichungen (13) besteht. Weiter folgt aus den obigen Gleichungen nun wegen (15)

$$\sin \vartheta(b) = \sin \beta, \quad \cos \vartheta(b) = \cos \beta,$$

also auch die zweite Gleichung (13).

Hilfssatz 4 = Hilfssatz 2 auf S. 623 der vorangehenden Abhandlung¹).

Hilfssatz 5. Es sei $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ die Lösung der Differentialgleichung (5) mit dem Anfangswert α an der Stelle $x = a$. Sind I bis III erfüllt, so gilt folgendes:

(a) Ist $\alpha_0 < \pi$ fest gegeben und ist k eine fest gegebene ganze Zahl, so ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \vartheta(b, \alpha, \lambda) \leq k\pi \text{ gleichmäßig für alle } \alpha \leq \alpha_0 + k\pi$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \vartheta(b, \alpha, \lambda) = 0 \text{ gleichmäßig für alle } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0.$$

(b) Für alle $\alpha \geq 0$ ist gleichmäßig

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} \vartheta(b, \alpha, \lambda) = +\infty.$$

(c) $\vartheta(b, \alpha_1, \lambda_1) < \vartheta(b, \alpha_2, \lambda_2)$ für $\alpha_1 \leq \alpha_2, \lambda_1 < \lambda_2$.

Beweis. Die Behauptung (c) ist ein bekannter Sturmscher Vergleichssatz⁸⁾. Für den Beweis von (a) und (b) ist zu bemerken, daß die Limesrelationen III sogar gleichmäßig für $a \leq x \leq b$ gelten⁹⁾. Denn ist irgend eine $K > 0$ gegeben, so gibt es zu jedem x_0 ein $\lambda_0 = \lambda_0(x_0)$, so daß

$$G(x_0, \lambda_0) < -2K,$$

also in einer gewissen Umgebung von x_0 (für $x_0 = a$ oder b sind das einseitige Umgebungen $a \leq x < a + \delta$ oder $b - \delta < x \leq b$) $G(x, \lambda_0) < -K$ ist. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz läßt sich das Intervall $\langle a, b \rangle$ mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken. Ist λ_0 die kleinste der Zahlen λ_0 , die zu diesen endlich vielen Umgebungen gehören, so ist, da G mit abnehmendem λ nicht zunimmt, in der Tat $G(x, \lambda) < -K$ für alle $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ und gleichmäßig für alle $a \leq x \leq b$. Entsprechend ergibt sich, daß auch die zweite der Beziehungen III gleichmäßig für $a \leq x \leq b$ gilt. Da F auch noch mit wachsendem λ nicht abnimmt, sind somit die Voraussetzungen der Hilfssätze 3 (a) und 4 der vorangehenden Abhandlung¹⁾ erfüllt, wenn die l_n irgendeine gegen λ_1 und die L_n irgendeine gegen λ_2 konvergierende Zahlenfolge sind. Nach den genannten Hilfssätzen gelten somit die Behauptungen (a) und (b) sicher für $\lambda = l_n$ und $\lambda = L_n$, also wegen (c) auch für alle $\lambda \rightarrow \lambda_1$ bzw. $\lambda \rightarrow \lambda_2$.

§ 2.

Der Oszillationssatz für Randbedingungen erster Gattung.

Satz 1. Gegeben ist die Randwertaufgabe erster Gattung

$$(1) \quad y'(x) = F(x, \lambda) z(x), \quad z'(x) = -G(x, \lambda) y(x),$$

$$(8) \quad \begin{cases} Ay(a) = Bz(a), & |A| + |B| > 0, \\ Cy(b) = Dz(b), & |C| + |D| > 0, \end{cases}$$

wobei A, B, C, D von λ abhängen dürfen.

Voraussetzungen: (a) I bis III von S. 637.

(b) ¹⁰⁾ $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ stetig für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$;

⁸⁾ Vgl. E. Kamke in einer Note, die demnächst im Bulletin of the American Mathematical Society erscheint.

⁹⁾ Vgl. O. Haupt, Differential und Integralrechnung I, Berlin 1938, S. 177, Aufgabe 5.

¹⁰⁾ Wenn $A, \dots, D$ von λ nicht abhängen, ist (b) trivialerweise erfüllt und kann daher fortgelassen werden.

entweder $B(\lambda) \equiv 0$ oder $B(\lambda) \neq 0$ und $\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$ nimmt mit wachsendem λ nicht zu;

entweder $D(\lambda) \equiv 0$ oder $D(\lambda) \neq 0$ und $\frac{C(\lambda)}{D(\lambda)}$ nimmt mit wachsendem λ nicht ab.

Behauptung. Zu der Randwertaufgabe gibt es unendlich viele Eigenwerte. Die Gesamtheit der Eigenwerte läßt sich als eine gegen λ_2 konvergierende Folge $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ schreiben. Jeder Eigenwert ist einfach, die sämtlichen zu einem Eigenwert λ_n gehörigen Systeme von Eigenfunktionen $y_n(x)$, $z_n(x)$ unterscheiden sich daher nur durch konstante, von Null verschiedene Faktoren. Jedes $y_n(x)$ hat im offenen Intervall (a, b) genau n Nullstellen.

Beweis. Es sei $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ wieder die Lösung der Differentialgleichung (5) mit dem Anfangswert α an der Stelle $x = a$. Nach Hilfssatz 2 ist eine Zahl λ genau dann ein Eigenwert, wenn für die durch (10) und (11) festgelegten Zahlen $\alpha = \alpha(\lambda)$ und $\beta = \beta(\lambda)$

$$(16) \quad \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) - \beta(\lambda) = n\pi \text{ mit ganzzahligem } n$$

gilt. Auf Grund der Voraussetzung (b) folgt aus (10): Ist $B(\lambda) \equiv 0$, so ist $\alpha = 0$ für alle λ . Ist $B(\lambda) \neq 0$, so ist

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

und nimmt mit wachsendem λ nicht zu. Daher ist α bei der durch (10) festgelegten Normierung in beiden Fällen eine stetige und (im weiteren Sinne) monoton wachsende Funktion von λ . Entsprechend ergibt sich, daß $\beta(\lambda)$ bei der durch (11) gegebenen Normierung eine stetige und (im weiteren Sinne) monoton abnehmende Funktion von λ ist.

Da F , G , α , β stetig von λ abhängen, ist somit

$$\eta(\lambda) = \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) - \beta(\lambda)$$

eine stetige Funktion von λ . Nach Hilfssatz 5 (c) und dem Vorangehenden ist ferner für $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\begin{aligned} \eta(\lambda_1) &= \vartheta(b, \alpha(\lambda_1), \lambda_1) - \beta(\lambda_1) \\ &< \vartheta(b, \alpha(\lambda_2), \lambda_2) - \beta(\lambda_2) = \eta(\lambda_2), \end{aligned}$$

d. h. $\eta(\lambda)$ ist eine monoton wachsende Funktion.

Da $0 \leq \alpha < \pi$, also nach Hilfssatz 4 (b) $\vartheta(b) > 0$ ist, und da ferner $0 < \beta \leq \pi$ ist, ist (16) jedenfalls für ganze Zahlen $n < 0$ nicht erfüllbar. Da $0 \leq \alpha < \pi$ ist (also, wie eben schon bemerkt, $\vartheta(b) > 0$ ist), und da α mit λ abnimmt, folgt aus Hilfssatz 5 (a) und (b) mit $k = 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} \vartheta(b, \alpha(\lambda), \lambda) = +\infty.$$

Da $0 < \beta \leq \pi$ ist und mit abnehmendem λ zunimmt, ist somit

$$(17) \quad \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \eta(\lambda) < 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow A_2} \eta(\lambda) = +\infty.$$

Daher nimmt $\eta(\lambda)$ als stetige, monoton wachsende Funktion jeden Wert ≥ 0 , insbesondere also jeden Wert $n\pi$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ genau einmal an.

Wird die Lösung der Gleichung $\eta(\lambda) = n\pi$ mit λ_n bezeichnet, so ist wegen der Monotonie von $\eta(\lambda)$ und der zweiten Relation (17)

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow A_2.$$

Da zu jedem λ_n genau eine Funktion $\vartheta(x, \alpha(\lambda_n), \lambda_n)$ gehört, unterscheiden sich die sämtlichen, zu einem Eigenwert λ_n gehörigen Eigenfunktionen $y_n(x)$, $z_n(x)$ nach Hilfssatz 1 nur durch konstante, von Null verschiedene Faktoren. Da $y_n = \varrho(x) \sin \vartheta(x)$ ist, verschwindet y_n in dem offenen Intervall (a, b) ebenso oft, wie $\vartheta(x)$ einen Wert $k\pi$ (k ganz) annimmt. Aus der Differentialgleichung (5) folgt, daß immer $\vartheta' > 0$ ist, wenn $\vartheta = k\pi$ ist; $\vartheta(x)$ passiert also jeden Wert $k\pi$ wachsend und nimmt ihn daher höchstens einmal an. Daher ist die Anzahl der von $\vartheta(x)$ angenommenen Werte $k\pi$ gleich der Anzahl der ganzen Zahlen k , für die $\alpha < k\pi < \beta + n\pi$ gilt. Wegen $0 \leq \alpha < \pi$ und $0 < \beta \leq \pi$ ist diese Anzahl gleich n , entsprechend der Behauptung.

§ 3.

Weitere Hilfssätze über $\vartheta' = F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta$.

Wie bei der Randwertaufgabe erster Gattung nach der in Hilfssatz 2 vorgenommenen Umformung die erste der Randbedingungen (9) stets erfüllbar ist und erst das gleichzeitige Bestehen der zweiten Bedingung (9) eine geeignete Wahl des Parameters λ erfordert, wird sich zeigen, daß auch bei der Randwertaufgabe zweiter Gattung die erste der Bedingungen (13) stets erfüllbar ist. Das zu beweisen, ist eines der Ziele dieses Paragraphen. Außerdem werden mehrere, später gebrauchte Hilfssätze abgeleitet. In § 4 wird dann gezeigt, daß sich durch geeignete Wahl von λ auch noch die zweite der Bedingungen (13) erfüllen läßt.

1. Für beliebig gegebene Zahlen $A, \dots, D$ mit $AD - BC = 1$ sei

$$(18) \quad \sigma^2 = (A \sin \alpha + B \cos \alpha)^2 + (C \sin \alpha + D \cos \alpha)^2$$

und $\sigma > 0$ ¹¹⁾. Für $-\infty < \alpha < +\infty$ gibt es dann eine stetig differenzierbare Funktion $\beta = \beta(\alpha)$, so daß

$$(19) \quad \sigma \sin \beta = A \sin \alpha + B \cos \alpha, \quad \sigma \cos \beta = C \sin \alpha + D \cos \alpha$$

¹¹⁾ Da $AD - BC = 1$ ist, ist $\sigma \neq 0$, kann also > 0 gewählt werden.

ist. Diese Funktion durchläuft wachsend das Intervall

$$(20) \quad \beta(\omega) \leq \beta \leq \beta(\omega) + \pi,$$

wenn α wachsend das Intervall $\omega \leq \alpha \leq \omega + \pi$ durchläuft, und es gilt

$$(21) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{\sigma^2(\alpha)},$$

$$(22) \quad \sigma(\alpha_1) \sigma(\alpha_2) \sin[\beta(\alpha_2) - \beta(\alpha_1)] = \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ist $\beta(\alpha)$ eine derartige Funktion, so ist auch $\beta(\alpha) + 2k\pi$ für eine beliebige ganze Zahl k wieder eine solche Funktion, und dieses sind zugleich alle derartigen Funktionen.

Beweis. Es ist klar, daß sich $\beta(\alpha)$ als stetige Funktion so wählen läßt, daß (19) gilt, ferner daß diese Funktion sogar stetig differenzierbar ist und daß $\beta(\alpha) + 2k\pi$ alle derartigen Funktionen sind.

Wird zur Abkürzung $\sigma_v = \sigma(\alpha_v)$, $\beta_v = \beta(\alpha_v)$ gesetzt, so folgt aus (19)

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sin(\beta_2 - \beta_1) &= \sigma_2 \sin \beta_2 \cdot \sigma_1 \cos \beta_1 - \sigma_2 \cos \beta_2 \cdot \sigma_1 \sin \beta_1 \\ &= (AD - BC) \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned}$$

also (22), da $AD - BC = 1$ ist.

Aus (22) folgt (21), da

$$\frac{\sin[\beta(\alpha_2) - \beta(\alpha_1)]}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{1}{\sigma(\alpha_1) \sigma(\alpha_2)} \rightarrow \frac{1}{\sigma^2(\alpha_1)} \text{ für } \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$$

ist.

Nach (21) wächst $\beta(\alpha)$ monoton mit α . Nach (22) ist daher

$$\beta(\omega) < \beta(\alpha) < \beta(\omega) + \pi \quad \text{für } \omega < \alpha < \omega + \pi,$$

ferner nach (18) und (19)

$$\sin \beta(\omega + \pi) = -\sin \beta(\omega), \quad \cos \beta(\omega + \pi) = -\cos \beta(\omega).$$

Daher durchläuft $\beta(\alpha)$ wachsend das Intervall (20), wenn α wachsend das Intervall $\omega \leq \alpha \leq \omega + \pi$ durchläuft.

2. In dem Intervall $a \leq x \leq b$ seien $F(x)$ und $G(x)$ stetig, ferner $F > 0$. Es sei $\vartheta(x, \alpha)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\vartheta' = F \cos^2 \vartheta + G \sin^2 \vartheta$$

mit dem Anfangswert $\vartheta(a, \alpha) = \alpha$ und

$$\varrho(x, \alpha) = \exp \frac{1}{2} \int_a^x (F - G) \sin 2\vartheta \, dx$$

mit $\vartheta = \vartheta(x, \alpha)$. Schließlich seien $\sigma(\alpha)$ und $\beta(\alpha)$ die in Nr. 1 eingeführten Funktionen. Dann gibt es in jedem Intervall $\omega \leq \alpha < \omega + \pi$ entweder

(a) genau zwei Werte $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$, so daß

$$(23) \quad \varrho(b, \alpha) = \sigma(\alpha)$$

gilt, oder

(b) für alle α gilt (23).

Im Falle (a) erhält man alle Zahlenpaare α_1, α_2 aus einem einzigen durch Addition der ganzzahligen Vielfachen von π , und für $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ und jede beliebige der in Nr. 1 eingeführten Funktionen $\beta(\alpha)$ gilt

(24)
$$\vartheta(b, \alpha_2) - \vartheta(b, \alpha_1) + \beta(\alpha_2) - \beta(\alpha_1) = \pi,$$

(25)
$$\vartheta(b, \alpha_2) - \beta(\alpha_2) \neq \vartheta(b, \alpha_1) - \beta(\alpha_1).$$

Im Falle (b) ist für alle α

(26)
$$\vartheta(b, \alpha_2) - \beta(\alpha_2) = \vartheta(b, \alpha_1) - \beta(\alpha_1).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 4 (c) ist für beliebige α_1, α_2

(27)
$$\varrho(x, \alpha_1) \varrho(x, \alpha_2) \sin [\vartheta(x, \alpha_2) - \vartheta(x, \alpha_1)] = \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Hieraus folgt für die partielle Ableitung ϑ_α von ϑ nach α , indem man α_2 gegen $\alpha_1 = \alpha$ streben läßt¹²⁾,

(28)
$$\vartheta_\alpha(x, \alpha) = \frac{1}{\varrho^2(x, \alpha)}.$$

Da $\beta(\alpha)$ und $\vartheta(b, \alpha)$ nach Nr. 1 und Hilfssatz 4 (c) wachsend Intervalle der Länge π durchlaufen, wenn α ein solches Intervall durchläuft, folgt aus (21) und (28) für beliebiges ω

(29)
$$\int_\omega^{\omega + \pi} \frac{d\alpha}{\sigma^2(\alpha)} = \int_\omega^{\omega + \pi} \frac{d\alpha}{\varrho^2(b, \alpha)}.$$

Hieraus folgt, daß entweder $\varrho(b, \alpha) - \sigma(\alpha)$ im Intervall $\omega \leq \alpha < \omega + \pi$ mindestens einmal das Vorzeichen wechselt oder daß $\varrho(b, \alpha) = \sigma(\alpha)$ für alle α dieses Intervalls und daher wegen

(30)
$$\varrho(x, \alpha + \pi) = \varrho(x, \alpha), \quad \sigma(\alpha + \pi) = \sigma(\alpha)$$

für alle α ist.

Im ersten Fall verschwindet $\varrho(b, \alpha) - \sigma(\alpha)$ wegen (30) mindestens noch einmal im Intervall $\omega \leq \alpha < \omega + \pi$. Es gibt daher ein Intervall $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ mit einer Länge $< \pi$, so daß im Innern dieses Intervalls $\varrho - \sigma \geq 0$ und in den Endpunkten $= 0$ ist. Wird zur Abkürzung $\vartheta(b, \alpha_v) = \vartheta_v, \beta(\alpha_v) = \beta_v$, usw. gesetzt, so ist dann

(31)
$$\beta_2 - \beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sigma^2} \geq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\varrho^2} = \vartheta_2 - \vartheta_1.$$

¹²⁾ (28) ergibt sich natürlich auch aus einem allgemeinen Satz der Theorie der Differentialgleichungen. Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 155.

Aus (22) und (27) folgt weiter wegen $\varrho_r = \sigma$,

$$(32) \quad \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \sin(\beta_2 - \beta_1).$$

Da nach der Bemerkung hinter Formel (28) $0 < \beta_2 - \beta_1 < \pi$ und $0 < \vartheta_2 - \vartheta_1 < \pi$ ist, folgt hieraus wegen (31)

$$(33) \quad \vartheta_2 - \vartheta_1 + \beta_2 - \beta_1 = \pi.$$

Nun wird $\omega = \alpha_1$ gewählt. Dann gibt es in dem Intervall $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_1 + \pi$ noch ein zweites, rechts von $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ liegendes Intervall $\alpha_3 \leq \alpha \leq \alpha_4$, so daß im Innern dieses Intervalls $\varrho - \sigma \leq 0$ ist und in den Endpunkten verschwindet. Wie vorhin ergibt sich $\beta_4 - \beta_3 \leq \vartheta_4 - \vartheta_3$ und daher auch

$$\vartheta_4 - \vartheta_3 + \beta_4 - \beta_3 = \pi.$$

Durch Addition dieser Gleichung zu (33) erhält man

$$(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (\vartheta_4 - \vartheta_3) + (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_4 - \beta_3) = 2\pi.$$

Hieraus folgt nun $\alpha_3 = \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + \pi$, da andernfalls die Summe der beiden ersten und der beiden letzten Summanden $< \pi$, also die linke Seite $< 2\pi$ wäre. Damit ist die unter (a) ausgesprochene Behauptung, sowie wegen (31) und (33) auch (24) und (25) bewiesen.

Liegt der zweite Fall vor, so folgt aus (22) und (27) die Gleichung (32) für beliebige α_1 , α_2 , und hieraus die Gleichung (26), da β und ϑ mit α monoton wachsen.

Anmerkung. Auch folgender Ansatz führt zum Ziel und dürfte zur wirklichen Auffindung der Zahlen α_1 , α_2 im Falle (a) sogar geeigneter sein: Man gehe von zwei Lösungen $\vartheta^{(1)}$, $\vartheta^{(2)}$ der Gleichung für ϑ mit den Anfangswerten $\vartheta^{(1)}(a) = 0$, $\vartheta^{(2)}(a) = \frac{1}{2}\pi$ aus und suche für die zugehörigen Funktionen $\varrho^{(1)}$, $\varrho^{(2)}$ Konstanten C_1 , C_2 so zu bestimmen, daß $C_1^2 + C_2^2 = 1$ ist und für die durch

$$\begin{aligned} \varrho(x) \sin \vartheta(x) &= C_1 \varrho^{(1)} \sin \vartheta^{(1)} + C_2 \varrho^{(2)} \sin \vartheta^{(2)}, \\ \varrho(x) \cos \vartheta(x) &= C_1 \varrho^{(1)} \cos \vartheta^{(1)} + C_2 \varrho^{(2)} \cos \vartheta^{(2)} \end{aligned}$$

definierten Größen $\varrho(b)$, $\alpha = \vartheta(a)$ die Gleichung (23) erfüllt ist. Dieser Ansatz führt zu einer quadratischen Gleichung für C_1 , C_2 .

3. Es sei nun das System (1) nebst den Randbedingungen

$$(12) \quad \begin{cases} y(b) = Ay(a) + Bz(a), & z(b) = Cy(a) + Dz(a), \\ AD - BC = 1 \end{cases}$$

gegeben. Es sei die Voraussetzung I erfüllt, und $A, \dots, D$ seien stetige Funktionen von λ für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Nach Hilfssatz 1 ist mit dem System (1) die Differentialgleichung (5) verknüpft. Diejenige Lösung dieser Gleichung, die an der Stelle $x = a$ den Wert α annimmt, sei wieder mit $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ bezeichnet.

Die in Nr. 1 eingeführten Funktionen σ und β hängen jetzt im allgemeinen noch von λ ab und seien daher mit $\sigma(\alpha, \lambda)$, $\beta(\alpha, \lambda)$ bezeichnet. Die Funktion $\beta(\alpha, \lambda)$ kann noch so normiert werden, daß für ein fest gegebenes λ^* ($\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$)

$$(34) \quad -2\pi < \beta(0, \lambda^*) \leq 0$$

und $\beta(0, \lambda)$ eine stetige Funktion von λ ist. Diese Normierung wird weiterhin festgehalten. Dann ist $\beta(\alpha, \lambda)$ eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen α, λ .

Nach Nr. 2 gibt es für jedes einzelne λ in jedem Intervall $\omega \leq \alpha < \omega + \pi$ entweder genau zwei Zahlen $\alpha_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda)$, so daß die erste der Bedingungen (13), d. h.

$$\varrho(b, \alpha, \lambda) = \sigma(\alpha, \lambda) \quad \text{für} \quad \alpha = \alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)$$

erfüllt ist, oder diese Gleichung besteht für alle α . Der Parameterwert λ möge von erster oder zweiter Art heißen, je nachdem der erste oder zweite dieser Fälle vorliegt. Es wird nun

$$(35) \quad \begin{cases} \Theta_1(\lambda) = \text{Max}_{r=1,2} [\vartheta(b, \alpha_r(\lambda), \lambda) - \beta(\alpha_r, \lambda)], \\ \Theta_2(\lambda) = \text{Min}_{r=1,2} [\vartheta(b, \alpha_r(\lambda), \lambda) - \beta(\alpha_r, \lambda)] \end{cases}$$

gesetzt, falls λ von erster Art ist, und

$$(36) \quad \Theta_1(\lambda) = \Theta_2(\lambda) = \vartheta(b, 0, \lambda) - \beta(0, \lambda),$$

falls λ von zweiter Art ist. Im letzten Falle ist nach (26)

$$(36a) \quad \Theta_1(\lambda) = \Theta_2(\lambda) = \vartheta(b, \alpha, \lambda) - \beta(\alpha, \lambda)$$

für beliebiges α .

Da ϑ und β sich beide um π vermehren, wenn α um π vermehrt wird, sind Θ_1, Θ_2 in (35) unabhängig von der speziellen Normierung der α_r , d. h. unabhängig von ω . Weiter ist $\Theta_1(\lambda) \geq \Theta_2(\lambda)$ und $\Theta_1(\lambda) = \Theta_2(\lambda)$ wegen (25) genau dann, wenn λ von zweiter Art ist.

In den folgenden Nummern soll die Stetigkeit und (unter zusätzlichen Voraussetzungen) die Monotonie der Funktionen $\Theta_\mu(\lambda)$ bewiesen werden.

4. (a) Die Parameterwerte erster Art bilden eine offene Menge. Die Funktionen $\alpha_1(\lambda)$ und $\alpha_2(\lambda)$ sind in dieser Menge stetig¹³).

(b) Die Funktionen $\Theta_1(\lambda)$ und $\Theta_2(\lambda)$ sind stetig für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Beweis. (a) Es sei λ_0 von erster Art und

$$\omega < \alpha_1(\lambda_0) < \alpha_2(\lambda_0) < \omega + \pi.$$

¹³) In folgendem Sinne: Ist $\omega < \alpha_1(\lambda_0) < \alpha_2(\lambda_0) < \omega + \pi$, so gibt es für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ in der ε -Umgebung jedes der beiden $\alpha_r(\lambda_0)$ genau ein $\alpha_r(\lambda)$, falls λ hinreichend nahe an λ_0 liegt.

Dann hat

$$(37) \quad \varrho(b, \alpha, \lambda_0) - \sigma(\alpha, \lambda_0)$$

unmittelbar vor und hinter jedem $\alpha_r(\lambda_0)$ verschiedene Vorzeichen. Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gibt es also vor bzw. hinter $\alpha_r(\lambda_0)$ Zahlen $\alpha_r^{(1)}, \alpha_r^{(2)}$ in einem Abstand $< \varepsilon$ von $\alpha_r(\lambda_0)$, so daß (37) sowohl für $\alpha = \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}$ als auch für $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$ verschiedene Vorzeichen hat. Da $\vartheta(x, \alpha, \lambda)$ und somit auch $\varrho(x, \alpha, \lambda)$ bei festem α stetig von λ abhängt, haben auch

$$\varrho(b, \alpha_r^{(1)}, \lambda) - \sigma(\alpha_r^{(1)}, \lambda) \quad \text{und} \quad \varrho(b, \alpha_r^{(2)}, \lambda) - \sigma(\alpha_r^{(2)}, \lambda)$$

für alle hinreichend nahe an λ_0 gelegenen λ verschiedene Vorzeichen, d. h. diese λ sind von erster Art, und es gibt weiter zwischen $\alpha_r^{(1)}$ und $\alpha_r^{(2)}$ ein $\alpha_r = \alpha_r(\lambda)$, so daß $\varrho(b, \alpha_r(\lambda), \lambda) = \sigma(\alpha_r(\lambda), \lambda)$ gilt. Damit ist zugleich die Stetigkeit der $\alpha_r(\lambda)$ bewiesen.

(b) Aus (a) folgt schon unmittelbar die Stetigkeit der Funktionen (35) innerhalb der Menge der Parameterwerte erster Art. Es ist also nur noch zu beweisen, daß jede der Funktionen $\Theta_\mu(\lambda)$ auch an der Stelle λ_0 stetig ist, wenn λ_0 ein Parameterwert zweiter Art ist. Träfe dieses nicht zu, so gäbe es für ein $\nu = 1$ oder 2 ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, so daß

$$|\vartheta(b, \alpha_r(\lambda_n), \lambda_n) - \beta(\alpha_r(\lambda_n), \lambda_n) - [\vartheta(b, 0, \lambda_0) - \beta(0, \lambda_0)]| \geq \varepsilon$$

wäre. Hierin kann $0 \leq \alpha_r(\lambda_n) \leq \pi$ gewählt werden. Die $\alpha_r(\lambda_n)$ haben dann als beschränkte Folge einen Häufungspunkt α_0 , und für eine Teilfolge $\bar{\lambda}_n \rightarrow \lambda_0$ wäre dann $\alpha_r(\bar{\lambda}_n) \rightarrow \alpha_0$ und $\vartheta(b, \alpha_r(\bar{\lambda}_n), \bar{\lambda}_n) \rightarrow \vartheta(b, \alpha_0, \lambda_0)$. Es müßte also auch

$$|\vartheta(b, \alpha_0, \lambda_0) - \beta(\alpha_0, \lambda_0) - [\vartheta(b, 0, \lambda_0) - \beta(0, \lambda_0)]| \geq \varepsilon$$

sein, im Widerspruch zu (26).

5. Neben den Voraussetzungen I bis III wird jetzt noch vorausgesetzt:

IV. $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ sind stetig für $A_1 < \lambda < A_2$, und es ist

$$(38) \quad AD - BC = 1.$$

V. $B \cdot \Delta A \geq A \cdot \Delta B$, $D \cdot \Delta C \geq C \cdot \Delta D$, $\Delta A \cdot \Delta D \geq \Delta B \cdot \Delta C$; dabei ist $\Delta A = A(\lambda + \varepsilon) - A(\lambda)$, und ε bedeutet in jeder der Ungleichungen dieselbe positive Zahl; die Ungleichungen sollen für alle hinreichend kleinen ε erfüllt sein.

Unter diesen Voraussetzungen ist für beliebiges α und $\lambda_1 < \lambda_2$

$$(39) \quad \beta(\alpha, \lambda_1) \geq \beta(\alpha, \lambda_2),$$

ferner

$$(40) \quad \Theta_\mu(\lambda_1) < \Theta_\mu(\lambda_2) \quad (\mu = 1, 2).$$

Beweis. (a) Zunächst soll (39) bewiesen werden. Zur Abkürzung wird

$$\beta_r = \beta(\alpha, \lambda_r), \quad \sigma_r = \sigma(\alpha, \lambda_r), \quad A_r = A(\lambda_r), \quad \dots, \quad D_r = D(\lambda_r)$$

gesetzt. Da $\beta(\alpha, \lambda)$ stetig ist, braucht (39) bei beliebigem $\lambda_1 < \lambda_1 < \lambda_2$ nur für alle hinreichend nahe an λ_1 gelegenen $\lambda_2 > \lambda_1$ bewiesen zu werden, und hierfür kann die Behauptung (39) noch durch $\sin(\beta_1 - \beta_2) \geq 0$ ersetzt werden.

Nach der Definition (19) von β ist

$$\sigma_r \sin \beta_r = A_r \sin \alpha + B_r \cos \alpha, \quad \sigma_r \cos \beta_r = C_r \sin \alpha + D_r \cos \alpha.$$

Hieraus folgt

$$(41) \quad \sin \alpha = \sigma_1 (D_1 \sin \beta_1 - B_1 \cos \beta_1), \quad \cos \alpha = \sigma_1 (-C_1 \sin \beta_1 + A_1 \cos \beta_1)$$

und

$$\sigma_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) = \sin \beta_1 \cdot (C_2 \sin \alpha + D_2 \cos \alpha) - \cos \beta_1 \cdot (A_2 \sin \alpha + B_2 \cos \alpha),$$

also wegen (41)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sin(\beta_1 - \beta_2) &= (C_2 D_1 - C_1 D_2) \sin^2 \beta_1 + (A_2 B_1 - A_1 B_2) \cos^2 \beta_1 \\ &\quad + (A_1 D_2 - A_2 D_1 + B_2 C_1 - B_1 C_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist bewiesen, sobald gezeigt ist, daß die rechts stehende quadratische Form in $\sin \beta_1, \cos \beta_1$ stets ≥ 0 ist. Da nach den beiden ersten Ungleichungen von V die Koeffizienten von $\sin^2 \beta_1$ und $\cos^2 \beta_1$ stets ≥ 0 sind, braucht nur noch bewiesen zu werden, daß die Determinante ≥ 0 ist. Diese ist

$$\text{Det.} = 4 (C_2 D_1 - C_1 D_2) (A_2 B_1 - A_1 B_2) - (S - T)^2,$$

wobei

$$S = A_1 D_2 - B_1 C_2, \quad T = A_2 D_1 - B_2 C_1$$

ist. Multipliziert man aus und formt man die Glieder, welche $B_1 C_1$ bzw. $A_1 D_1$ enthalten, mittels (38) um, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{Det.} &= 4 - 4ST - (S - T)^2 \\ &= (2 - S - T)(2 + S + T). \end{aligned}$$

Wegen (38) ist die erste Klammer gerade

$$\Delta A \cdot \Delta D - \Delta B \cdot \Delta C \geq 0$$

nach der letzten Ungleichung V; die zweite Klammer strebt für

$$\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 \text{ gegen } 2 + 2(A_1 D_1 - B_1 C_1) = 4,$$

ist also für alle hinreichend kleinen positiven $\lambda_2 - \lambda_1$ selber positiv. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b)¹⁴⁾. Es sei λ_1 ein Parameterwert erster Art, und es seien $\alpha_1(\lambda_1)$, $\alpha_2(\lambda_1)$ die beiden in (35) auftretenden Zahlen; nach dem Schluß von Nr. 3 liegen diese in einem Intervall $\omega < \alpha_1(\lambda_1) < \alpha_2(\lambda_1) < \omega + \pi$. Nach Nr. 4 liegen dann für alle hinreichend nahe an λ_1 gelegenen $\lambda_2 > \lambda_1$ die zugehörigen $\alpha_1(\lambda_2)$, $\alpha_2(\lambda_2)$ auch in diesem Intervall und streben für $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ gegen $\alpha_1(\lambda_1)$, $\alpha_2(\lambda_1)$. Zur Abkürzung wird $\gamma_1 = \alpha_v(\lambda_1)$, $\gamma_2 = \alpha_v(\lambda_2)$ gesetzt, wo v einen beliebigen der Werte 1, 2 haben kann. Wird weiter zur Abkürzung

$$\Phi(\lambda_\mu) = \vartheta(b, \gamma_\mu, \lambda_\mu) - \beta(\gamma_\mu, \lambda_\mu)$$

gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1) &= [\vartheta(b, \gamma_2, \lambda_2) - \beta(\gamma_2, \lambda_2)] - [\vartheta(b, \gamma_1, \lambda_2) - \beta(\gamma_1, \lambda_2)] \\ &\quad + [\vartheta(b, \gamma_1, \lambda_2) - \beta(\gamma_1, \lambda_2)] - [\vartheta(b, \gamma_1, \lambda_1) - \beta(\gamma_1, \lambda_1)]. \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 5 (c) und der eben bewiesenen Ungleichung (39) folgt, daß die zweite Zeile > 0 ist. Wendet man auf die erste Zeile den Mittelwertsatz an, so ergibt sich daher

$$\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1) > (\gamma_2 - \gamma_1) [\vartheta_\alpha(b, \gamma, \lambda_2) - \beta_\alpha(\gamma, \lambda_2)]$$

für ein γ , das zwischen γ_1 und γ_2 liegt. Es ist aber auch

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1) &= [\vartheta(b, \gamma_2, \lambda_2) - \beta(\gamma_2, \lambda_2)] - [\vartheta(b, \gamma_2, \lambda_1) - \beta(\gamma_2, \lambda_1)] \\ &\quad + [\vartheta(b, \gamma_2, \lambda_1) - \beta(\gamma_2, \lambda_1)] - [\vartheta(b, \gamma_1, \lambda_1) - \beta(\gamma_1, \lambda_1)]. \end{aligned}$$

Hierin ist die erste Zeile > 0 ; daher ist

$$\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1) > (\gamma_2 - \gamma_1) [\vartheta_\alpha(b, \bar{\gamma}, \lambda_1) - \beta(\bar{\gamma}, \lambda_1)]$$

für ein $\bar{\gamma}$, das zwischen γ_1 und γ_2 liegt. Bei Berücksichtigung von (28) und (21) ergibt sich also

$$(42) \quad \begin{cases} \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1) > (\gamma_2 - \gamma_1) \left(\frac{1}{\varrho^2(b, \gamma, \lambda_2)} - \frac{1}{\sigma^2(\gamma, \lambda_2)} \right), \\ \text{und auch} > (\gamma_2 - \gamma_1) \left(\frac{1}{\varrho^2(b, \bar{\gamma}, \lambda_1)} - \frac{1}{\sigma^2(\bar{\gamma}, \lambda_1)} \right). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(43) \quad \Phi(\lambda_1) < \Phi(\lambda_2).$$

Denn der Ausdruck

$$(44) \quad \varrho(b, \alpha, \lambda) - \sigma(\alpha, \lambda)$$

wechselt bei festem λ das Vorzeichen in $\alpha = \alpha_1(\lambda)$ und $\alpha = \alpha_2(\lambda)$ und hat für die α zwischen $\alpha_1(\lambda)$ und $\alpha_2(\lambda)$ ein festes Vorzeichen, und zwar, da (44) stetig von λ abhängt, dasselbe Vorzeichen für alle hinreichend nahe an λ_1 gelegenen λ_2 . Die Zahlen γ und $\bar{\gamma}$ liegen zwischen γ_1 und γ_2 . Für $\gamma_1 \leq \gamma_2$

¹⁴⁾ Diesen Teil des Beweises, der mit geringeren Voraussetzungen als mein ursprünglicher Beweis auskommt, verdanke ich Herrn E. Digel.

ist also $\gamma \geq \gamma_1 = \alpha_r(\lambda_1)$ und $\bar{\gamma} \leq \gamma_2 = \alpha_r(\lambda_2)$, d. h. γ und $\bar{\gamma}$ liegen auf entgegengesetzten Seiten von $\alpha_r(\lambda_1)$ und $\alpha_r(\lambda_2)$. Daher hat (44) für $\alpha = \gamma$, $\lambda = \lambda_2$ und $\alpha = \bar{\gamma}$, $\lambda = \lambda_1$ entgegengesetzte Vorzeichen, einer der Ausdrücke auf der rechten Seite von (42) ist also positiv für $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und Null für $\gamma_1 = \gamma_2$. Damit ist (43) für $r = 1, 2$ bewiesen, und daraus folgt (40) für jedes Intervall, das nur Parameterwerte erster Art enthält.

(c) Gehört λ einem abgeschlossenen Intervall an, das nur Parameterwerte zweiter Art enthält, so gilt ebenfalls (40). Denn nach Hilfssatz 5 (c) und (39) ist jetzt

$$\Theta_u(\lambda_1) = \vartheta(b, 0, \lambda_1) - \beta(0, \lambda_1) < \vartheta(b, 0, \lambda_2) - \beta(0, \lambda_2) = \Theta_u(\lambda_2).$$

(d) Wegen der Stetigkeit von $\Theta_u(\lambda)$ folgt aus (b) die Ungleichung (40) auch für jedes abgeschlossene Intervall, das in seinem Innern nur Parameterwerte erster Art enthält, während die Endpunkte Parameterwerte zweiter Art sein können. Hieraus und aus (c) folgt unter nochmaliger Benutzung der Stetigkeit der $\Theta_u(\lambda)$ die Behauptung (40) für alle $A_1 < \lambda < A_2$.

Anmerkungen. 1. Die Voraussetzungen V sind für konstante $A, \dots, D$ stets erfüllt; ebenso, wenn $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ differenzierbare Funktionen sind und

$$A'B \geq AB', \quad C'D \geq CD', \quad A'D' \geq B'C'$$

ist. Für nicht-konstante $A, \dots, D$ sind die Bedingungen IV und V z. B. erfüllt bei $A = B = 1$, $C = \lambda$, $D = \lambda + 1$, sowie bei $A = -\lambda$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 0$.

2. Ist $B(\lambda) \equiv 0$ oder $C(\lambda) \equiv 0$, so folgt aus IV und V, daß A und D von λ unabhängig sind. Denn nach (38) muß jetzt $AD = 1$ sein. Wäre einmal $\Delta A \geq 0$, so müßte also $\Delta D \leq 0$ und daher $\Delta A \cdot \Delta D < 0$ sein im Widerspruch zu der letzten Ungleichung V.

3. In der Voraussetzung V können die beiden ersten Ungleichungen auch durch

$$A \cdot \Delta C \geq C \cdot \Delta A, \quad B \cdot \Delta D \geq D \cdot \Delta B$$

ersetzt werden. Denn hierfür braucht nur bewiesen zu werden, daß (39) auch unter diesen veränderten Voraussetzungen gilt. Drückt man in dem Teil (a) des vorigen Beweises alles durch α statt durch β_1 aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) &= (A_1 C_2 - A_2 C_1) \sin^2 \alpha + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \cos^2 \alpha \\ &\quad + (A_1 D_2 - A_2 D_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\sin^2 \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ in dieser quadratischen Form sind nach der jetzigen Voraussetzung ≥ 0 , und für die Determinante ergibt sich wieder der frühere Wert.

6. Neben den Voraussetzungen I bis V möge noch die folgende Voraussetzung bestehen:

VI. Entweder ist $B(\lambda) \equiv 0$ für $A_1 < \lambda < A_2$ oder es ist $B(\lambda) \neq 0$ für alle $A_1 < \lambda < A_2$.

Dann sind alle hinreichend nahe an A_1 gelegenen λ Parameterwerte erster Art, und für $\lambda \rightarrow A_1$ ist

$$(45) \quad \Theta_1(\lambda) \rightarrow -\beta_0, \quad \Theta_2(\lambda) \rightarrow -\beta_0 - \pi;$$

dabei ist

$$(46) \quad \beta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(0, \lambda).$$

Beweis. (a) Nach (19) ist

$$\sigma(0, \lambda) \sin \beta(0, \lambda) = B(\lambda),$$

also $\beta(0, \lambda)$ als stetige Funktion wegen VI in einem festen Intervall der Länge π gelegen. Nach Nr. 1 ist dann $\beta(\alpha, \lambda)$ für $0 \leq \alpha < \pi$ und alle λ beschränkt. Da $\beta(\alpha, \lambda)$ bei festem α nach (39) eine monotone Funktion von λ ist, existiert für jedes feste α des Intervalls $0 \leq \alpha < \pi$

$$\lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda),$$

insbesondere also (46).

(b) Gäbe es beliebig nahe an A_1 immer wieder Parameterwerte zweiter Art, so wäre für diese nach (36)

$$\Theta_\mu(\lambda) = \vartheta(b, 0, \lambda) - \beta(0, \lambda)$$

und nach (36a) für jedes $0 < \alpha < \pi$ auch

$$\Theta_\mu(\lambda) = \vartheta(b, \alpha, \lambda) - \beta(\alpha, \lambda).$$

Nach Hilfssatz 5 (a) ist für $\lambda \rightarrow A_1$

$$\vartheta(b, 0, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \vartheta(b, \alpha, \lambda) \rightarrow 0.$$

Es wäre also

$$(47) \quad \Theta_\mu(\lambda) \rightarrow -\beta_0 \quad \text{und} \quad \Theta_\mu(\lambda) \rightarrow -\lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda).$$

Die letzte Beziehung gilt dabei für jedes $0 < \alpha < \pi$, es wäre also

$$\lim_{\lambda \rightarrow A_1} \Theta_\mu(\lambda) = -\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda) = -\beta_0 - \pi^{15}).$$

¹⁵⁾ Für $A_1 < \lambda < \bar{\lambda}$ ist nämlich nach (39) $\beta(\alpha, \lambda) \geq \beta(\alpha, \bar{\lambda})$, also nach Nr. 1

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda) \geq \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \beta(\alpha, \bar{\lambda}) = \beta(0, \bar{\lambda}) + \pi,$$

und zwar für jedes $\bar{\lambda} > A_1$, also

$$(*) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda) \geq \beta_0 + \pi.$$

Andererseits ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha, \lambda) \leq \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\pi, \lambda) = \beta_0 + \pi.$$

Hieraus und aus (*) folgt das obige Ergebnis.

Damit ist der gewünschte Widerspruch gegen die erste Beziehung (47) erreicht.

(c) Ist $\alpha(\lambda) \rightarrow \pi$ für irgendeine Funktion $\alpha(\lambda)$ mit $0 \leq \alpha < \pi$ und eine gegen A_1 konvergierende Folge von Zahlen λ , so ist

$$(48) \quad \beta(\alpha(\lambda), \lambda) \rightarrow \beta_0 + \pi \quad \text{für } \lambda \rightarrow A_1.$$

Denn da $\beta(\alpha, \lambda)$ mit wachsendem λ nach (39) monoton abnimmt, ist für $A_1 < \lambda < \bar{\lambda}$

$$\beta(\alpha(\lambda), \lambda) \geq \beta(\alpha(\lambda), \bar{\lambda}),$$

also

$$\lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha(\lambda), \lambda) \geq \beta(\pi, \bar{\lambda}) = \beta(0, \bar{\lambda}) + \pi$$

für jedes $\bar{\lambda} > A_1$, also

$$(49) \quad \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha(\lambda), \lambda) \geq \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow A_1} \beta(0, \bar{\lambda}) + \pi = \beta_0 + \pi.$$

Andererseits ist

$$\beta(\alpha(\lambda), \lambda) < \beta(\pi, \lambda) = \beta(0, \lambda) + \pi,$$

also

$$(50) \quad \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(\alpha(\lambda), \lambda) \leq \beta_0 + \pi.$$

Aus (49) und (50) folgt (48).

(d) Da nach (a) alle hinreichend nahe an A_1 gelegenen λ von erster Art sind, gibt es für diese λ die Funktionen $\alpha_v(\lambda)$. Für den Beweis von (45) können die $\alpha_v(\lambda)$ so normiert werden, daß

$$(51) \quad 0 \leq \alpha_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda) < \pi$$

ist. Zur Abkürzung wird

$$\beta_v = \beta(\alpha_v(\lambda), \lambda), \quad \vartheta_v = \vartheta(b, \alpha_v(\lambda), \lambda)$$

gesetzt.

Gibt es ein $\alpha_0 < \pi$, so daß für eine gegen A_1 konvergierende Folge von Zahlen λ die Ungleichung $\alpha_2(\lambda) \leq \alpha_0$ und somit auch $\alpha_1(\lambda) \leq \alpha_0$ besteht, so ist nach Hilfssatz 5 (a) für diese Folge

$$\vartheta_1 \rightarrow 0, \quad \vartheta_2 \rightarrow 0.$$

Da nach (24)

$$(52) \quad \vartheta_2 - \vartheta_1 + \beta_2 - \beta_1 = \pi$$

ist, folgt hiermit

$$\beta_2 - \beta_1 \rightarrow \pi.$$

Wegen (51) ist

$$\beta(0, \lambda) \leq \beta_1 < \beta_2 < \beta(\pi, \lambda) = \beta(0, \lambda) + \pi,$$

also ergibt sich weiter

$$\beta_1 \rightarrow \beta_0, \quad \beta_2 \rightarrow \beta_0 + \pi,$$

und daher

$$\vartheta_1 - \beta_1 \rightarrow -\beta_0, \quad \vartheta_2 - \beta_2 \rightarrow -\beta_0 - \pi,$$

also (45), zunächst für die betrachtete Folge von Zahlen λ , daraus aber wegen der Monotonie der $\Theta_\mu(\lambda)$ für alle $\lambda \rightarrow A_1$.

Weiterhin kann also $\alpha_2(\lambda) \rightarrow \pi$ für $\lambda \rightarrow A_1$ angenommen werden. Ist auch $\alpha_1(\lambda) \rightarrow \pi$ für eine gegen A_1 konvergierende Folge von Zahlen λ , so ist nach (c) für diese Folge

$$\beta_1 \rightarrow \beta_0 + \pi, \quad \beta_2 \rightarrow \beta_0 + \pi,$$

also wegen (52)

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \rightarrow \pi.$$

Da nach Hilfssatz 4 (b) $\vartheta_\nu > 0$ und nach Hilfssatz 5 (a) mit $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$

$$\overline{\lim} \vartheta_\nu \leq \pi$$

ist, folgt hieraus

$$\vartheta_1 \rightarrow 0, \quad \vartheta_2 \rightarrow \pi,$$

also

$$\vartheta_1 - \beta_1 \rightarrow -\beta_0 - \pi, \quad \vartheta_2 - \beta_2 \rightarrow -\beta_0,$$

und daher (45), zunächst wieder nur für die betrachtete Folge der Zahlen λ , und daraus wie vorhin für alle $\lambda \rightarrow A_1$.

Es bleibt also nur noch der Fall

$$\alpha_2 \rightarrow \pi \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow A_1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_0$$

für ein festes $\alpha_0 < \pi$ und alle hinreichend nahe an A_1 gelegenen λ . Nach Hilfssatz 5 (a) und (48) ist dann

$$(53) \quad \vartheta_1 \rightarrow 0, \quad \beta_2 \rightarrow \beta_0 + \pi.$$

Da es sich um Parameterwerte erster Art handelt, folgt aus (25) und (24), daß entweder für alle hinreichend nahe an A_1 gelegenen λ

$$(\alpha) \quad 0 < \beta_2 - \beta_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad (\beta) \quad \frac{\pi}{2} < \beta_2 - \beta_1 < \pi$$

ist.

Im Falle (α) ist

$$(54) \quad \beta_1 \rightarrow \beta_0 + \pi.$$

Denn sonst gäbe es wegen (53) ein $\delta > 0$, so daß für eine gegen A_1 konvergierende Folge von Zahlen λ

$$\beta_1 \leq \beta_2 - 2\delta$$

ist. Da $\beta(\alpha, \lambda)$ bei festem λ stetig mit α wächst, gäbe es für jene λ ein $\gamma = \gamma(\lambda) > \alpha_1(\lambda)$, so daß

$$\beta(\gamma, \lambda) = \beta_1 + \delta,$$

also

$$(55) \quad \beta(\gamma, \lambda) \leq \beta_2 - \delta$$

und daher $\gamma \leq \alpha_2$ ist. Da aus (52)

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 > \beta_2 - \beta_1$$

folgt, ist nach (31)

$$\varrho(b, \alpha, \lambda) < \sigma(\alpha, \lambda) \quad \text{für} \quad \alpha_1(\lambda) < \alpha < \alpha_2(\lambda),$$

es wäre also

$$(56) \quad \vartheta(b, \gamma, \lambda) - \vartheta_1 = \int_{\alpha_1}^{\gamma} \frac{d\alpha}{\varrho^2} > \int_{\alpha_1}^{\gamma} \frac{d\alpha}{\sigma^2} = \beta(\gamma, \lambda) - \beta_1 = \delta.$$

Andererseits folgt aus (55)

$$\overline{\lim} \beta(\gamma, \lambda) < \beta_0 + \pi.$$

Nach (c) würde es also ein $\gamma_0 < \pi$ geben, so daß $\gamma(\lambda) \leq \gamma_0$ für die hinreichend nahe an λ_1 gelegenen λ unserer Folge ist. Nach Hilfssatz 5 (a) wäre dann wieder

$$\vartheta(b, \gamma, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow \lambda_1.$$

Da auch $\vartheta_1 \rightarrow 0$ ist, ergibt sich hiermit aus (56) der gewünschte Widerspruch gegen die Annahme eines festen $\delta > 0$. Damit ist (54) bewiesen. Aus (54), (53) und (52) folgt dann $\vartheta_2 \rightarrow \pi$ und somit

$$\vartheta_1 - \beta_1 \rightarrow -\beta_0 - \pi, \quad \vartheta_2 - \beta_2 \rightarrow -\beta_0,$$

also in der Tat (45).

Im Falle (β) ist

$$(57) \quad \beta_1 \rightarrow \beta_0.$$

Denn wegen (52) ist jetzt

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\varrho^2} = \vartheta_2 - \vartheta_1 < \beta_2 - \beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sigma^2},$$

und daher

$$\varrho(b, \alpha, \lambda) > \sigma(\alpha, \lambda) \quad \text{für} \quad \alpha_1(\lambda) < \alpha < \alpha_2(\lambda),$$

also

$$\varrho(b, \alpha, \lambda) < \sigma(\alpha, \lambda) \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < \alpha_1(\lambda).$$

Es ist somit

$$\beta_1 - \beta(0, \lambda) = \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sigma^2} < \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\varrho^2} = \vartheta_1 - \vartheta(b, 0, \lambda).$$

Da $0 < \alpha_1 \leq \alpha_0$ ist, strebt die linke Seite gegen Null, also ist auch $\beta_1 - \beta(0, \lambda) \rightarrow 0$, d. h. es gilt (57). Aus (57), (53) und (52) folgt nun $\vartheta_2 \rightarrow 0$, also

$$\vartheta_1 - \beta_1 \rightarrow -\beta_0, \quad \vartheta_2 - \beta_2 \rightarrow -\beta_0 - \pi$$

und damit wieder (45).

§ 4.

Der Oszillationssatz für Randbedingungen zweiter Gattung.

Satz 2. Gegeben ist die Randwertaufgabe zweiter Gattung

$$(1) \quad y'(x) = F(x, \lambda) z(x), \quad z'(x) = -G(x, \lambda) y(x);$$

$$(12) \quad \begin{cases} y(b) = A y(a) + B z(a), & z(b) = C y(a) + D z(a), \\ AD - BC = 1, \end{cases}$$

wobei $A, \dots, D$ von λ abhängen dürfen.

Voraussetzungen. I bis III von S. 637 sowie¹⁶⁾

IV. $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ sind stetig für $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

V.¹⁷⁾ $B \cdot \Delta A \geq A \cdot \Delta B, \quad D \cdot \Delta C \geq C \cdot \Delta D, \quad \Delta A \cdot \Delta D \geq \Delta B \cdot \Delta C$.

VI. Entweder ist $B(\lambda) \equiv 0$ oder $B(\lambda) \neq 0$ für $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

Für die hiernach allein möglichen vier Fälle¹⁸⁾

$$(\alpha) \quad B > 0,$$

$$(\beta) \quad B \equiv 0, \quad A < 0,$$

$$(\gamma) \quad B < 0,$$

$$(\delta) \quad B \equiv 0, \quad A > 0$$

gilt die

Behauptung: Es gibt unendlich viele Eigenwerte. Die Gesamtheit der Eigenwerte läßt sich in zwei, gegen Λ_2 konvergierenden Folgen

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots, \\ (\bar{\lambda}_0 <) \bar{\lambda}_1 < \lambda_2 < \bar{\lambda}_3 < \dots$$

anordnen, die folgende Eigenschaften haben:

(a) $\bar{\lambda}_0$ tritt nur in den Fällen (γ) , (δ) auf.

(b) $\lambda_n \leq \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$.

¹⁶⁾ Wenn $A, \dots, D$ von λ nicht abhängen, sind die folgenden Voraussetzungen IV bis VI trivialerweise erfüllt und können daher fortgelassen werden.

¹⁷⁾ Für die ausführlichere Formulierung von V siehe S. 646.

¹⁸⁾ Daß es keine andern Fälle gibt, folgt aus IV und VI.

(c) Ist $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, so ist diese Zahl ein doppelter Eigenwert, d. h. für diesen Fall sind alle Lösungen des Systems (1) mit $\lambda = \lambda_n$ Eigenfunktionen. Ist $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$, so sind beides einfache Eigenwerte, d. h. die sämtlichen zu λ_n gehörigen Lösungssysteme $y_n(x)$, $z_n(x)$ unterscheiden sich nur durch konstante, von Null verschiedene Faktoren, und dasselbe gilt für die zu $\bar{\lambda}_n$ gehörigen Systeme $\bar{y}_n(x)$, $\bar{z}_n(x)$ von Eigenfunktionen.

(d) Ist $N(n)$ die Anzahl der in dem halboffenen Intervall $a < x \leq b$ gelegenen Nullstellen von Funktionen $y_n(x)$, $\bar{y}_n(x)$, die zu Eigenwerten λ_n , $\bar{\lambda}_n$ gehören¹⁹⁾, so besteht der durch die folgende Tabelle wiedergegebene Sachverhalt:

Fall	α	β	γ	δ
$N(n)$	$2n - 2$ oder $2n - 1$	$2n - 1$	$2n - 1$ oder $2n$	$2n$

In den Fällen (γ) , (δ) hat $\bar{y}_0$ sogar in dem beiderseits abgeschlossenen Intervall $\langle a, b \rangle$ keine Nullstelle.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 und § 3, Nr. 3 ist eine Zahl λ genau dann ein Eigenwert, wenn für ein $\mu = 1$ oder 2

(58) $\Theta_\mu(\lambda) = 2n\pi$ mit ganzzahligem n

ist; dabei ist (vgl. § 3, Nr. 3) für Parameterwerte erster Art

(35)
$$\begin{cases} \Theta_1(\lambda) = \text{Max}_{v=1, 2} [\vartheta(b, \alpha_v(\lambda), \lambda) - \beta(\alpha_v, \lambda)], \\ \Theta_2(\lambda) = \text{Min}_{v=1, 2} [\vartheta(b, \alpha_v(\lambda), \lambda) - \beta(\alpha_v, \lambda)], \end{cases}$$

und für Parameterwerte zweiter Art

(36) $\Theta_1(\lambda) = \Theta_2(\lambda) = \vartheta(b, 0, \lambda) - \beta(0, \lambda),$

wobei

(51) $0 \leq \alpha_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda) < \pi$

angenommen werden darf.

In § 3, Nr. 3 war β für ein festes λ^* durch

(34) $-2\pi < \beta(0, \lambda^*) \leq 0$

normiert. Nach (19) ist

$\sigma(0, \lambda) \sin \beta(0, \lambda) = B(\lambda), \quad \sigma(0, \lambda) \cos \beta(0, \lambda) = D(\lambda).$

Für $B \neq 0$ ist also $\beta(0, \lambda)$ für alle λ auf ein festes Intervall $k\pi < \beta < (k+1)\pi$ mit ganzzahligen k beschränkt. Für $B \equiv 0$ ist $\beta(0, \lambda) = k\pi$, wobei k nach

¹⁹⁾ Es darf dabei $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$ sein; dann sind $y_n, \bar{y}_n$ beliebige Funktionen, die zu eigentlichen Lösungen von (1) mit $\lambda = \lambda_n$ gehören.

der sich jetzt auf $AD = 1$ reduzierenden letzten Gleichung (12) gerade oder ungerade ist, je nachdem $A > 0$ oder < 0 ist. Mit der Normierung (34) gelangt man so zu der nachstehenden Tabelle (59) über $\beta(0, \lambda)$. Da $\beta(0, \lambda)$ nach (39) mit abnehmendem λ zunimmt, erhält man daraus unmittelbar die Angaben der Tabelle über

$$(46) \quad \beta_0 = \lim_{\lambda \rightarrow A_1} \beta(0, \lambda).$$

$$(59) \quad \begin{cases} (\alpha) & -2\pi < \beta(0, \lambda) < -\pi, & -2\pi < \beta_0 \leq -\pi; \\ (\beta) & \beta(0, \lambda) = -\pi, & \beta_0 = -\pi; \\ (\gamma) & -\pi < \beta(0, \lambda) < 0, & -\pi < \beta_0 \leq 0; \\ (\delta) & \beta(0, \lambda) = 0, & \beta_0 = 0. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 5 (b) ist gleichmäßig für $0 \leq \alpha < \pi$

$$\lim_{\lambda \rightarrow A_2} \vartheta(b, \alpha, \lambda) = +\infty.$$

Da $\beta(0, \lambda) \leq \beta(\alpha, \lambda) < \beta(0, \lambda) + \pi$, also nach der obigen Tabelle $\beta(\alpha, \lambda)$ beschränkt ist, ist somit auch

$$(60) \quad \lim_{\lambda \rightarrow A_2} \Theta_\mu(\lambda) = +\infty \quad (\mu = 1, 2).$$

Wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow A_1} \Theta_\mu(\lambda) = L_\mu$$

ist, gibt es daher wegen der Stetigkeit und Monotonie von $\Theta_\mu(\lambda)$ zu jeder ganzen Zahl $n > \frac{1}{2\pi} L_\mu$, und nur zu diesen n , genau eine Lösung λ von (58). Nach (45) ist

$$L_1 = -\beta_0, \quad L_2 = -\beta_0 - \pi.$$

Bedeutet n_μ die kleinste ganze Zahl, für welche die Gleichung (58) lösbar ist, so erhält man daher aus (59) die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) & \pi \leq L_1 < 2\pi, & 0 \leq L_2 < \pi, & n_1 = n_2 = 1; \\ (\beta) & L_1 = \pi, & L_2 = 0, & n_1 = n_2 = 1; \\ (\gamma) & 0 \leq L_1 < \pi, & -\pi \leq L_2 < 0, & n_1 = 1, n_2 = 0; \\ (\delta) & L_1 = 0, & L_2 = -\pi, & n_1 = 1, n_2 = 0. \end{array}$$

Wird die Lösung der Gleichung (58) bei gegebenem n für $\mu = 1, 2$ mit $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$ bezeichnet, so beginnt also die Folge der Eigenwerte in den Fällen (α), (β) mit λ_1 bzw. $\bar{\lambda}_1$, und in den Fällen (γ), (δ) mit λ_1 bzw. $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1$. Da $\Theta_\mu(\lambda)$ mit λ monoton wächst, folgt aus der Definition der $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$ unmittelbar, daß $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ und $\bar{\lambda}_n < \bar{\lambda}_{n+1}$ ist. Die Eigenwerte lassen sich also als zwei monoton wachsende Folgen schreiben. Da

$$\Theta_1(\lambda_n) = \Theta_2(\bar{\lambda}_n) = 2n\pi$$

ist, folgt aus (60) wegen der Monotonie der $\Theta_\mu(\lambda)$, daß $\lambda_n \rightarrow A_2$ und $\bar{\lambda}_n \rightarrow A_2$ ist. Damit ist schon die Behauptung bis (a) einschließlich bewiesen. Die weiteren Teile ergeben sich so:

Zu (b): Ist λ von erster Art, so ist

$$0 < \beta(\alpha_2, \lambda) - \beta(\alpha_1, \lambda) < \pi.$$

Aus (24) folgt daher

$$|\vartheta(b, \alpha_2, \lambda) - \beta(\alpha_2, \lambda) - [\vartheta(b, \alpha_1, \lambda) - \beta(\alpha_1, \lambda)]| < \pi,$$

also

$$\Theta_1(\lambda) - \Theta_2(\lambda) < \pi,$$

und diese Ungleichung ist trivialerweise auch richtig, wenn λ von zweiter Art ist. Hiermit ergibt sich

$$\Theta_1(\bar{\lambda}_n) < \Theta_2(\bar{\lambda}_n) + \pi = \Theta_1(\lambda_n) + \pi < \Theta_1(\lambda_{n+1}),$$

also $\bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$. Weiter ist

$$\Theta_2(\lambda_n) \leq \Theta_1(\lambda_n) = 2n\pi = \Theta_2(\bar{\lambda}_n),$$

also auch $\lambda_n \leq \bar{\lambda}_n$.

Zu (c). Ist $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, so ist $\Theta_1(\lambda_n) = 2n\pi = \Theta_2(\bar{\lambda}_n)$, also λ_n von zweiter Art. Nach (36a) ist dann

$$\Theta_\mu(\lambda_n) = \vartheta(b, \alpha, \lambda_n) - \beta(\alpha, \lambda_n)$$

mit beliebigem $0 \leq \alpha < \pi$. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind daher nach Hilfssatz 1 gerade die *sämtlichen* eigentlichen Lösungen des Systems (1), nämlich die Funktionen

$$(61) \quad y_n = \bar{y}_n = C \varrho(x, \alpha) \sin \vartheta(x, \alpha, \lambda_n), \quad z_n = \bar{z}_n = C \varrho(x, \alpha) \cos \vartheta(x, \alpha, \lambda_n)$$

mit beliebigem $0 \leq \alpha < \pi$ und $C \neq 0$. In diesem Fall ist also λ_n ein zweifacher Eigenwert. Ist $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$, so ist jede dieser beiden Zahlen von erster Art, da wegen der Monotonie der $\Theta_\mu(\lambda)$

$$\Theta_1(\bar{\lambda}_n) > \Theta_1(\lambda_n) = \Theta_2(\bar{\lambda}_n) > \Theta_2(\lambda_n)$$

ist. Eigenfunktionen sind daher in diesem Fall nur die Funktionen

$$(62) \quad \begin{cases} y_n = C \varrho(x, \alpha_\nu(\lambda_n), \lambda_n) \sin \vartheta(x, \alpha_\nu(\lambda_n), \lambda_n), \\ z_n = C \varrho(x, \alpha_\nu(\lambda_n), \lambda_n) \cos \vartheta(x, \alpha_\nu(\lambda_n), \lambda_n) \end{cases}$$

für ein $\nu = 1$ oder 2 und $\bar{y}_n, \bar{z}_n$ mit $\nu = 2$ oder 1 und mit $\bar{\lambda}_n$ statt λ_n .

Zu (d). Nach (61) und (62) ist ein y_n bzw. $\bar{y}_n$ an einer Stelle x genau dann gleich Null, wenn an dieser Stelle ϑ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Da nach (5) dann $\vartheta' > 0$ ist, passiert ϑ jeden solchen Wert wachsend und nimmt ihn daher nur einmal an. Ist $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$, so ist daher die Anzahl der

Nullstellen von y_n bzw. $\bar{y}_n$ gleich der Anzahl $N(n)$ der ganzen Zahlen k , für die

$$\alpha_v(\lambda) < k\pi \leq \vartheta(b, \alpha_v(\lambda), \lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda = \lambda_n \text{ bzw. } \bar{\lambda}_n,$$

d. h. nach (58)

$$(63) \quad \alpha_v(\lambda) < k\pi \leq \beta(\alpha_v, \lambda) + 2n\pi$$

ist. Ist $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, so ist die Anzahl der Nullstellen nach (61) entsprechend gleich der Anzahl $N(n)$ der ganzen Zahlen k , für die

$$(64) \quad \alpha < k\pi \leq \beta(\alpha, \lambda) + 2n\pi \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha < \pi$$

ist. Nach (51) ist für $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$

$$(65) \quad \beta(0, \lambda) \leq \beta(\alpha_v, \lambda) < \beta(0, \lambda) + \pi \quad (\lambda = \lambda_n, \bar{\lambda}_n);$$

für $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$ ist hierin nur der Index v fortzulassen.

Mit der Tabelle (59) erhält man aus (63), (64) und (65) die Tabelle der Behauptung (d); man braucht dafür nur die einzelnen Fälle der Reihe nach durchzugehen. Es hat also insbesondere $\bar{y}_0$ in $a < x \leq b$ keine Nullstelle. Es ist aber auch noch $\bar{y}_0(a) \neq 0$. Denn $\bar{\lambda}_0$ ist ein einfacher Eigenwert, das zugehörige ϑ ist also ein $\vartheta(b, \alpha_v(\bar{\lambda}_0), \bar{\lambda}_0)$ und nach Hilfssatz 4 (b) größer als Null, da $\alpha_v \geq 0$ ist. Aus (58) folgt dann $\beta(\alpha_v(\bar{\lambda}_0), \bar{\lambda}_0) > 0$, also ist nach der Tabelle (59) $\alpha_v(\bar{\lambda}_0) > 0$.

(Eingegangen am 27. August 1938.)

Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes*).

Von

Joseph Heinhold in München.

Inhalt.

	Seite
Einleitung. Der Minkowskische Satz (Satz 1). Stellung der Aufgabe	659
§ 1. Semidefinite Formen	661
Satz 2	662
§ 2. Definite Formen	663
Satz 3	667
3. Indefinite Formen	667
A. Zwei Schranken für gewisse Formen. Satz 4.	667
B. Vergleich dieser Schranken mit der Minkowskischen Schranke	673
C. Reduktion einer beliebigen indefiniten Form auf eine der angegebenen Formen. Satz 4a	674
D. Spezialfälle, in denen die angegebene Schranke gleich der unteren Grenze ist. Satz 5	675
E. Schranken für die Formen $ x^2 - Dy^2 $ (D natürliche Zahl) und $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D\frac{y^2}{4}$ ($D = 4n + 1$, n natürliche Zahl)	680
Beispiele zu diesen Formen	683
§ 4. Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern	686

Einleitung.

Alle Zahlen in dieser Arbeit sind reell. „Ganze“ Zahlen bedeuten ganze rationale Zahlen. Kongruenzen (in Zeichen $\equiv$) ohne Angabe eines Moduls sind stets solche nach dem Modul 1. Es handelt sich im folgenden nur um binäre quadratische Formen, die wir kurz als „Formen“ bezeichnen werden.

Minkowski¹⁾ hat einen Satz über indefinite Formen bewiesen, der in allgemeiner Weise, z. B. in der folgenden Fassung ausgesprochen werden kann:

*) Die Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München als Dissertation (D 19) angenommen. Herrn Geheimrat Prof. Dr. Perron bin ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

¹⁾ Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 42ff.

Satz 1. Ist $ac - b^2 < 0$, dann gibt es zu beliebigen Zahlen μ, ν stets kongruente Zahlen x, y , $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - ac},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur notwendig ist für die zu $2bxy$ äquivalenten Formen.

Die hier angegebene Schranke soll nun verbessert und zugleich das Problem verallgemeinert werden auf beliebige (binäre quadratische) Formen.

Vorgelegt sei eine beliebige Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Mit $\varphi(a, b, c)$ bezeichnen wir die untere Grenze aller C^2 von der folgenden Eigenschaft:

Zu zwei beliebigen Zahlen μ, ν gibt es immer kongruente Zahlen $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$(1) \quad |ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq C^2.$$

Diese Funktion $\varphi(a, b, c)$ zu bestimmen oder nach oben abzuschätzen, ist die gestellte Aufgabe. Hierfür gilt offenbar der

Hilfssatz 1. Äquivalente Formen besitzen dieselbe untere Grenze φ .

Dabei heißen zwei Formen „äquivalent“, wenn sie durch eine „unimodulare“ Transformation, d. h. eine ganzzahlige Transformation der Determinante ± 1 , ineinander übergeführt werden können.

Wird die untere Grenze $\varphi(a, b, c)$ von den C^2 angenommen, so bezeichnen wir sie noch besonders mit $\varphi_1(a, b, c)$; wenn das nicht der Fall ist, mit $\varphi_2(a, b, c)$.

Ist $\varphi(a, b, c) = \varphi_1(a, b, c)$, wird also die untere Grenze angenommen, so gibt es zu beliebigen μ, ν stets $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$(2) \quad |ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq \varphi_1(a, b, c).$$

Zahlenpaare μ, ν , für die hierbei das Gleichheitszeichen notwendig ist, bezeichnen wir mit μ_1, ν_1 .

Solche Zahlenpaare μ_1, ν_1 sind im Falle $\varphi = \varphi_1$ stets vorhanden.

Angenommen es gäbe ein φ_1 , für das kein Zahlenpaar $(\mu_1; \nu_1)$ existiert. Greifen wir dann aus dem Quadrat Ω ($-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{1}{2}$) irgendeinen Punkt $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ heraus, so gibt es stets Zahlen $\bar{x} \equiv \bar{\mu}$, $\bar{y} \equiv \bar{\nu}$ und ein positives $\bar{\varepsilon}$, so daß

$$|a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2| \leq \varphi_1 - \bar{\varepsilon}.$$

Für die Punkte (μ, ν) einer quadratischen Umgebung $\bar{q}$ von $(\bar{\mu}; \bar{\nu})$:

$$\mu = \bar{\mu} + \partial_1, \quad \nu = \bar{\nu} + \partial_2, \quad |\partial_1|, |\partial_2| \leq \partial < 1,$$

ist dann mit $\mu \equiv \bar{x} + \partial_1 = x$, $\nu \equiv \bar{y} + \partial_2 = y$

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| < |a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2| + \partial \cdot S,$$

wobei S eine von ∂ unabhängige positive Schranke ist. Nehmen wir $\partial = \text{Min} \left(\frac{1}{2}; \frac{\bar{\varepsilon}}{2S} \right)$, so ist $|ax^2 + 2bxy + cy^2| < \varphi_1 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}$. Es läßt sich also um jeden Punkt $(\bar{\mu}; \bar{\nu})$ von Ω ein Quadrat $\bar{q}$ und ein zugehöriges $\bar{\varepsilon} > 0$ angeben, so daß für alle Punkte dieses Quadrats sich ein Absolutbetrag $< \varphi_1 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}$ ergibt. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz kann man dann Ω durch eine endliche Anzahl n solcher Quadrate q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) überdecken. Für die Punkte (μ, ν) jedes Quadrats q_i gibt es dann Zahlen $x \equiv \mu, y \equiv \nu$ und ein positives ε_i , so daß

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| < \varphi_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_i,$$

also für jeden Punkt von Ω und damit für jeden beliebigen Punkt (μ, ν) Zahlen $x \equiv \mu, y \equiv \nu$, so daß

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| < \varphi_1 - \frac{1}{2}\text{Min } \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Es wäre daher φ_1 noch zu verkleinern. Widerspruch! W. z. b. w.

Wir werden im folgenden für semidefinite und definite Formen die Funktion $\varphi(a, b, c)$ angeben, für indefinite Formen ein $F(a, b, c) \geq \varphi(a, b, c)$ ausfindig machen, das für alle nicht zu $2bxy$ äquivalenten Formen jeweils eine kleinere Schranke als Satz 1 liefert und neben den zu $2bxy$ äquivalenten noch für unendlich viele nicht zueinander äquivalente Formen $F(a, b, c) = \varphi_1(a, b, c)$ ergibt.

§ 1.

Semidefinite Formen.

$ax^2 + 2bxy + cy^2; ac - b^2 = 0$. a und c können nicht gleichzeitig verschwinden, z. B. kann $c \neq 0$ vorausgesetzt werden, was sich nötigenfalls durch eine unimodulare Transformation $x = Y, y = X$ erreichen läßt (Hilfssatz 1). Daher ist

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| = |c| \left(\frac{b}{c}x + y \right)^2,$$

und nach Division durch $|c|$ erhalten wir eine Form $(mx + y)^2$.

Die Eigenschaft (1), Seite 660 bedeutet hier geometrisch: Zu jedem Punkt mit den Koordinaten $(\mu; \nu)$ liegt stets ein „homologer“ Punkt $(x; y)$ im Innern oder auf dem Rande des Parallelstreifens $(mx + y)^2 \leq C^2$.

Um die untere Grenze der C^2 zu bestimmen, unterscheiden wir die folgenden Fälle:

a) $m = 0$. Zu jedem Punkt $(\mu; \nu)$ gibt es einen homologen $(x; y)$, so daß $y^2 \leq \frac{1}{4}$, dabei ist das Gleichheitszeichen notwendig für alle $(\mu; \nu)$ mit $\nu \equiv \frac{1}{2}$.

b) $m = \frac{p}{q} \neq 0$. p und q seien ganze relativ prime Zahlen. Es gibt somit ganze Zahlen P, Q , so daß $pP + qQ = 1$. Durch die Transformation $X = Qx - Py$, $Y = px + qy$ läßt sich dieser Fall nach Hilfssatz 1 auf den vorigen zurückführen. Wir erhalten daher:

Zu jedem Punkt $(\mu; \nu)$ gibt es einen homologen $(x; y)$ für den

$$(px + qy)^2 = Y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{p}{q}x + y\right)^2 \leq \frac{1}{4q^2},$$

wobei das Gleichheitszeichen notwendig ist für Punkte $(\mu; \nu)$ mit $p\mu + q\nu \equiv \frac{1}{2}$.

c) *m irrational* $= \alpha$. Durch einen beliebigen von $(0; 0)$ verschiedenen Gitterpunkt²⁾ $(p; q)$ und alle Gitterpunkte $(np; nq)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) legen wir Parallele zur Geraden $\alpha x + y = 0$. Hierdurch wird die Ebene in kongruente Parallelstreifen zerlegt. Verschieben wir das Parallelstreifensystem parallel zu sich, bis der Gitterpunkt $(0; 0)$ auf der Mittelparallelen eines solchen Streifens liegt, so hat der den Nullpunkt enthaltende Parallelstreifen die Eigenschaft, daß zu jedem beliebig vorgegebenen Punkt $(\mu; \nu)$ ein homologer im Innern oder auf dem Rande dieses Streifens gelegen ist; denn sämtliche Punkte eines beliebigen Streifens sind homolog zu den Punkten des Streifens um 0. Also:

$\alpha x + y = 0$; Parallele hierzu durch $(p; q)$: $\alpha x + y = \alpha p + q$; verschobener Parallelstreifen um 0: $|\alpha x + y| \leq \frac{|\alpha p + q|}{2}$.

Jede Irrationalzahl α kann man nun durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen $\bar{p}, \bar{q}$ so approximieren, daß

$$\left|\alpha + \frac{\bar{q}}{\bar{p}}\right| < \frac{1}{\bar{p}^2}, \quad \text{also} \quad |\alpha \bar{p} + \bar{q}| < \frac{1}{\bar{p}}.$$

Setzen wir $p = \bar{p}$, $q = \bar{q}$, so gibt es demnach zu jedem Punkt $(\mu; \nu)$ einen homologen $(x; y)$, so daß

$$(\alpha x + y)^2 \leq \frac{1}{4} (\alpha \bar{p} + \bar{q})^2 < \frac{1}{4\bar{p}^2};$$

$\bar{p}$ kann beliebig große Werte annehmen, also $\frac{1}{4\bar{p}^2}$ beliebig klein, $< \varepsilon$, gemacht werden.

a), b), c) zusammenfassend, erhalten wir

Satz 2. Jede semidefinite Form läßt sich (nach Division durch eine Konstante und nötigenfalls mittels der Transformation $x = Y$, $y = X$) auf die Form $(mx + y)^2$ bringen; hierfür ist

$$\varphi(m^2, m, 1) = \begin{cases} \varphi_1(0, 0, 1) = \frac{1}{4}, (\mu_1, \nu_1) \text{ für } \nu_1 \equiv \frac{1}{2}; \\ \varphi_1\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2, \frac{p}{q}, 1\right) = \frac{1}{4q^2}, p, q \text{ ganze relativ prime Zahlen,} \\ (\mu_1, \nu_1) \text{ für } p\mu_1 + q\nu_1 \equiv \frac{1}{2}; \\ \varphi_2(\alpha^2, \alpha, 1) = 0, \alpha \text{ irrational.} \end{cases}$$

²⁾ D. h. einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten.

§ 2.

Definite Formen.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2; \quad ac - b^2 > 0.$$

Für definite Formen besagt (1) von Seite 660 geometrisch: Zu jedem Punkt mit den Koordinaten $(\mu; \nu)$ liegt stets ein homologer Punkt $(x; y)$ im Innern oder auf dem Rande der Ellipse $|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq C^2$.

In Analogie zu Satz 1 könnte man vermuten, daß es ein nur von der Diskriminante $ac - b^2$ abhängiges C^2 gibt. Diese Vermutung trifft aber nicht zu:

Als Flächeninhalt I der Ellipse $|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq C^2$ erhält man nämlich $I = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} C^2$. Dieser kann, z. B. bei Ellipsen mit extremem

Achsenverhältnis, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind, bei gleicher Diskriminante größer als jede beliebig vorgegebene Zahl Z sein, ohne daß (siehe Fig. 1) zu jedem Punkt (μ, ν) ein homologer $(x; y)$ im Innern der Ellipse oder auf ihrem Rand gelegen ist. Ein für alle Ellipsen gleicher Diskriminante $ac - b^2$ gültiges C^2 müßte daher der Ungleichung genügen:

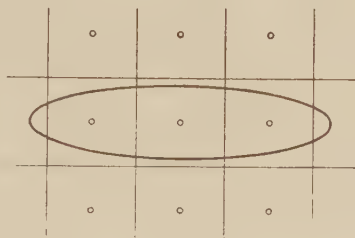


Fig. 1.

$$\frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} C^2 > Z, \quad \text{also} \quad C^2 > \frac{Z}{\pi} \sqrt{ac - b^2}.$$

Widerspruch.

Um die untere Grenze $\varphi(a, b, c)$ zu bestimmen, schlagen wir folgenden geometrischen Weg ein:

Um jeden Gitterpunkt $(p; q)$ legen wir das Parallelogramm

$$\begin{aligned} |(x - p) + k(y - q)| &\leq \frac{1}{2}, \\ |y - q| &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad 0 < k < 1,$$

und erhalten zunächst eine lückenlose einfache Überdeckung der Ebene mit Parallelogrammen (in Fig. 2 dünn ausgezeichnet).

Auf den Parallelogrammseiten $(x - p) + k(y - q) = \frac{1}{2}$ schneiden wir durch die Geraden

$$\begin{aligned} g_q &\equiv y - q - \eta = 0, & 0 < \eta < \frac{1}{2}, & \text{Punkte } E_{p,q}, \\ g'_q &\equiv y - q + \eta = 0, & 0 < \eta < \frac{1}{2}, & \text{Punkte } E'_{p,q} \end{aligned}$$

aus (g_q, g'_q in Fig. 2 gestrichelt).

Nun verbinden wir die Punkte $E_{p,q}, E_{p+1,q}$ mit $E'_{p,q+1}$ und $E'_{p,q}$, $E'_{p+1,q}$ mit $E_{p+1,q-1}$ und bekommen auf diese Weise, wegen $0 < k < 1$, $0 < \eta < \frac{1}{2}$, kongruente konvexe Sechsecke $E_{p,q} E'_{p,q} E_{p+1,q-1} E'_{p+1,q} E_{p+1,q}$

$E'_{p, q+1}$, bei denen je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind und welche die Ebene lückenlos einfach überdecken. Um diese Sechsecke lassen sich daher kongruente Ellipsen legen, die durch Translation miteinander zur Deckung gebracht werden können und die Ebene lückenlos überdecken. Nun kann aber, wie Fig. 2 zeigt, die Ellipse um $(0; 0)$ außer den Punkten $E_{-1; 0}$ $E'_{-1; 0}$

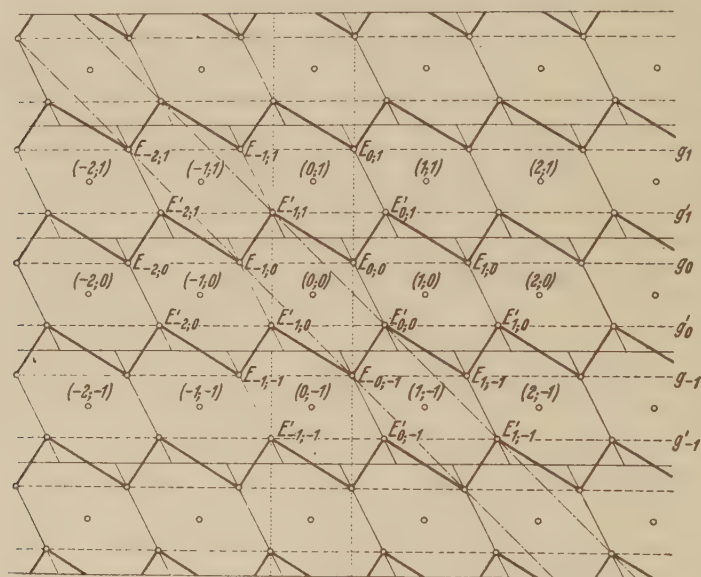


Fig. 2.

$E_{0; -1}$ $E'_{0; 0}$ $E_{0; 0}$ $E'_{-1; 1}$ keine weiteren Ecken eines Sechsecks im Innern oder auf ihrem Rand enthalten; dasselbe gilt entsprechend von den anderen Ellipsen. Wenn wir daher alle Ellipsen im gleichen Verhältnis ähnlich zu ihren Mittelpunkten verkleinern, so können demnach keine Eckpunkte eines Sechsecks mehr im Innern oder auf dem Rande dieser verkleinerten Ellipsen gelegen sein und wir hätten somit Punkte gefunden, für die kein homologer Punkt im Innern oder auf dem Rande der entsprechenden Ellipse um $(0; 0)$ vorhanden ist.

Die Ellipse um das Sechseck $E_{-1; 0}$ $E'_{-1; 0}$ $E_{0; -1}$ $E'_{0; 0}$ $E_{0; 0}$ $E'_{-1; 1}$ enthält zu jedem Punkt $(\mu; \nu)$ also einen homologen Punkt $(x; y)$ im Innern oder auf dem Rand und kann nicht, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, ähnlich zu ihrem Mittelpunkt verkleinert werden.

Wir stellen die Gleichung der Ellipse um $(0; 0)$ auf (Fig. 2): Büschel durch $E_{-1; 0}$ $E'_{-1; 0}$ $E_{0; 0}$ $E_{0; 0}$:

$$s(x + ky - \frac{1}{2})(x + ky + \frac{1}{2}) + t(y - \eta)(y + \eta) = 0;$$

die Ellipse soll durch $E'_{-1,1}$ mit den Koordinaten $(-\frac{1}{2} + k\eta; 1 - \eta)$ gehen:

$$sk(1 - k) = t(1 - 2\eta),$$

also

$$s = r(1 - 2\eta); \quad t = rk(1 - k); \quad r \neq 0.$$

Als kleinste Ellipsen bekommen wir demnach:

$$(3) \quad r(1 - 2\eta)(x + ky)^2 + rk(1 - k)y^2 \leq \frac{1}{4}r(1 - 2\eta) + rk(1 - k)\eta^2$$

mit den Bedingungen

$$0 < k < 1, \quad 0 < \eta < \frac{1}{2}.$$

Von den Sechseckpunkten greifen wir die Punkte $E_{0,0}(\frac{1}{2} - k\eta; \eta)$ und $E'_{-1,0}(-\frac{1}{2} + k\eta; -\eta)$ heraus, alle anderen sind zu diesen homolog.

Wir geben uns nun eine Form von der Gestalt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}y^2$$

$$AC - B^2 > 0; \quad \text{o. B. d. A.} \quad A > 0.$$

Aus dem Ansatz $r(1 - 2\eta) = A$, folgt $k = \frac{B}{A}$,

$$k = \frac{B}{A}, \quad r = \frac{A}{B} \frac{AC - B^2}{A - B},$$

$$rk(1 - k) = \frac{AC - B^2}{A}, \quad \eta = \frac{A}{2} \frac{C - B}{AC - B^2}.$$

Die Nebenbedingungen von (3) gehen dann über in

$$0 < B < A, \quad B < C.$$

Die rechte Seite der Ungleichung (3) lautet in A, B, C :

$$\frac{A}{4} \left(1 + \frac{(C - B)^2}{AC - B^2}\right) = \frac{AC}{4} \frac{A + C - 2B}{AC - B^2}.$$

und als Koordinaten der Punkte $E_{0,0}$, $E'_{-1,0}$ erhalten wir

$$x = \pm \frac{C}{2} \frac{A - B}{AC - B^2}, \quad y = \pm \frac{A}{2} \frac{C - B}{AC - B^2}.$$

Zusammenfassend bekommen wir demnach in der Formulierung von Satz 1 das folgende vorläufige *Ergebnis*:

Unter der Bedingung $0 < B < A$, $B < C$ gibt es zu beliebigen Zahlen μ, ν stets kongruente Zahlen x, y , $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leq \frac{AC}{4} \frac{A + C - 2B}{AC - B^2};$$

dabei ist in jeder Form das Gleichheitszeichen notwendig für

$$\mu \equiv \pm \frac{C}{2} \frac{A - B}{AC - B^2}, \quad \nu \equiv \pm \frac{A}{2} \frac{C - B}{AC - B^2}.$$

Dieses Ergebnis ist aber auch noch richtig für $B = 0$:

In diesem Falle besagt es nämlich: $Ax^2 + Cy^2 \leq \frac{A+C}{4}$, mit Gleichheit nur für $\mu \equiv \frac{1}{2}$, $\nu \equiv \frac{1}{2}$. Und das ist augenscheinlich richtig, weil man ja zu jedem Zahlenpaar μ, ν ein Zahlenpaar $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$ finden kann mit $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < y \leq \frac{1}{2}$.

Nun gilt bekanntlich der Satz:

Hilfssatz 2. Jede positiv definite Form $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ läßt sich durch eine ganzzahlige Transformation der Determinante 1 auf eine Form $\bar{Q} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ so transformieren, daß $0 \leq B < A \leq C$ ist.

Wir führen einen Beweis hier an, da er einen Weg weist, diese Transformation im allgemeinen Fall zu finden.

Beweis. Ist A das Minimum, das Q für ganzzahlige x, y annehmen kann, so lassen sich stets in endlich vielen Schritten zwei ganze Zahlen α, γ bestimmen, für die Q das Minimum annimmt: $A = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$. α und γ sind teilerfremd; daher kann man zu α, γ zwei ganze Zahlen β, δ finden, so daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Die ganzzahlige Transformation der Determinante 1

$$(T_1) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

führt dann Q über in

$$Q' = Ax'^2 + 2rx'y' + sy'^2; \quad (A \leq s).$$

Durch die Transformation

$$(T_2) \quad \begin{cases} x' = x'' + ny'' \\ y' = y'' \end{cases} \quad (n = \text{ganze Zahl})$$

geht Q' über in

$$\begin{aligned} Q'' &= Ax''^2 + 2(An + r)x''y'' + (An^2 + 2rn + s)y''^2 \\ &= Ax''^2 + 2Bx''y'' + Cy''^2. \end{aligned}$$

Nun kann man n so wählen, daß $0 \leq B < A$. Außerdem ist $C \geq A$, da C von Q' angenommen wird für $x' = n$, $y' = 1$, also nicht kleiner als das Minimum A von Q sein kann. Somit haben wir

$$0 \leq B < A \leq C,$$

was also durch die ganzzahlige Transformation der Determinante 1 $(T) = (T_1)(T_2)$ stets zu erreichen ist, w. z. b. w.

Diese nach Hilfssatz 2 reduzierten Formen erfüllen nunmehr die Bedingung $0 \leq B < A$, $B < C$ von Seite 665. Wir können somit zu jeder Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ nach Hilfssatz 1 und 2 die untere Grenze $\varphi(a, b, c) = \varphi_1(a, b, c)$ angeben.

Da die untere Grenze φ durch die Transformation $x = -X$, $y = Y$ (nach H. S. 1) nicht geändert wird, erhalten wir aus dem Ergebnis von Seite 665 (in der Formulierung (2) von Seite 660) den allgemeineren

Satz 3. Für jede definite binäre quadratische Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit $0 \leq |b| < a$, $|b| < c$, was nötigenfalls durch eine unimodulare Transformation immer erreicht werden kann, ist

$$\begin{aligned}\varphi(a, b, c) &= \varphi_1(a, b, c) = \frac{ac}{4} \frac{a+c-2|b|}{ac-b^2}, \\ \mu_1 &\equiv \varepsilon_1 \cdot \frac{c}{2} \frac{a-|b|}{ac-b^2}, \quad \nu_1 \equiv \varepsilon_2 \cdot \frac{a}{2} \frac{c-|b|}{ac-b^2}, \\ \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_2^2 = 1; \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } b > 0 \\ -1 & \text{für } b < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

§ 3.

Indefinite Formen.

$ax^2 + 2bxy + cy^2$; $ac - b^2 < 0$. (Siehe Satz 1, Seite 660 und Seite 661 oben!)

(1) von Seite 660 hat hier folgende geometrische Bedeutung:

Zu jedem Punkt mit den Koordinaten $(\mu; \nu)$ liegt stets ein homologer Punkt $(x; y)$ im Innern oder auf dem Rand des „Hyperbelkreuzes“³⁾

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq C^2.$$

Diese geometrische Deutung benutzen wir, um die untere Grenze $\varphi(a, b, c)$ nach oben abzuschätzen.

A. Zwei Schranken für gewisse Formen.

I.

Wir „parkettieren“ die Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1 in der Weise, wie nachfolgende Fig. 3 angibt:

An die Seite eines Quadrates legen wir ein kongruentes, dessen Seite gegenüber der des ersten um l im negativen Umlaufsinn verschoben ist, $0 < l \leq 1$. In derselben Weise legen wir an die (bei diesem Umlaufsinn) nächstfolgende Seite ein um m verschobenes kongruentes Quadrat, $0 < m \leq 1$. Dasselbe auf den Gegenseiten, symmetrisch zum Mittelpunkt des ursprünglichen Quadrats. Führen wir das fort, so entsteht eine Parkettierung $\mathfrak{P}_1$ der Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1, wobei noch rechteckige Lücken mit den Seitenlängen l, m bleiben.

³⁾ Wir werden hierfür auch die Abkürzung „Kreuz“ verwenden.

Die Diagonalen eines Quadrats seien die Achsen eines ξ, η -Koordinatensystems⁴⁾.

Das gleichseitige Hyperbelkreuz um das Quadrat um $(0; 0)$

$$(a) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8}$$

vergrößern bzw. verkleinern wir ähnlich zum Nullpunkt, bis der Mittelpunkt $M_1(\xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(l+m); \eta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2-l+m))$ der Lücke $\mathfrak{L}_1$ (Fig. 3) auf den Rand des Kreuzes zu liegen kommt:

$$(b) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8}(l+m)(2-l+m),$$

ebenso, bis der Mittelpunkt $M_2(\xi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2+l-m); \eta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(l+m))$ der Lücke $\mathfrak{L}_2$ auf den Rand des Kreuzes zu liegen kommt:

$$(c) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8}(l+m)(2+l-m).$$

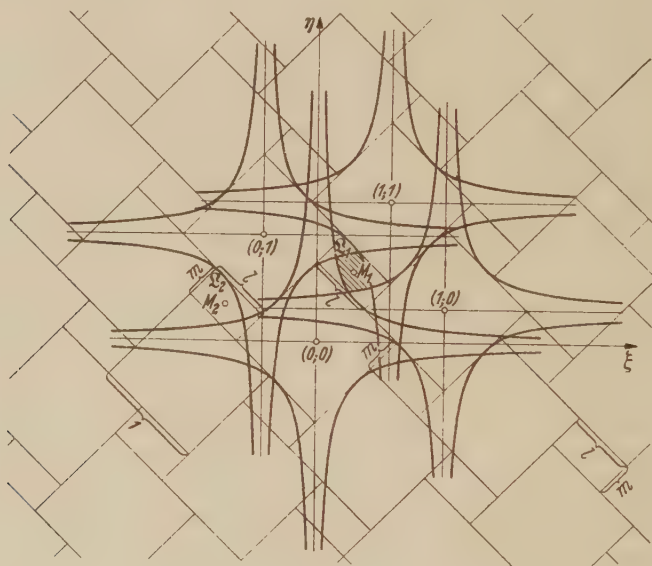


Fig. 3.

Um die vier Quadrate, welche die Lücke $\mathfrak{L}_1$ begrenzen, legen wir die zu (a) kongruenten Kreuze⁵⁾.

⁴⁾ Die bei den einzelnen Punkten der Fig. 3, 4, 5 angeschriebenen Koordinaten beziehen sich auf ein später (S. 671) einzuführendes x, y -Koordinatensystem.

⁵⁾ Unter „Kreuz um einen Quadratmittelpunkt“ verstehen wir im folgenden stets ein Kreuz mit dem Quadratmittelpunkt als Mittelpunkt und den Quadratdiagonalen als Asymptoten; unter „Kreuz um ein Quadrat“ ein solches, das außerdem noch die Quadratseiten berührt.

Sind M_1 und M_2 außerhalb des Kreuzes (a) gelegen, ist also $(l+m)(2-|l-m|) > 1$, so bedecken diese vier Kreuze die Lücke $\mathfrak{Q}_1$ nicht vollständig. Wir vergrößern daher alle Kreuze im selben Maßstab ähnlich zu ihren Mittelpunkten, bis zum erstenmal einer der Punkte M_1 (für $l \geq m$) oder M_2 (für $l \leq m$) auf den Rand des Kreuzes um $(0; 0)$ zu liegen kommt. Das ist der Fall für

$$(d) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8} (l+m) \cdot \text{Min} [2-l+m; 2+l-m] = \frac{1}{8} (l+m) (2-|l-m|).$$

Nun berühren sich die Hyperbeln zweier Kreuze in M_1 und die ursprüngliche Lücke $\mathfrak{Q}_1$ ist vollständig überdeckt. Legen wir daher um jeden Quadratmittelpunkt von $\mathfrak{P}_1$ die zu (d) kongruenten Kreuze, so wird hierdurch die ganze Ebene sicher lückenlos überdeckt.

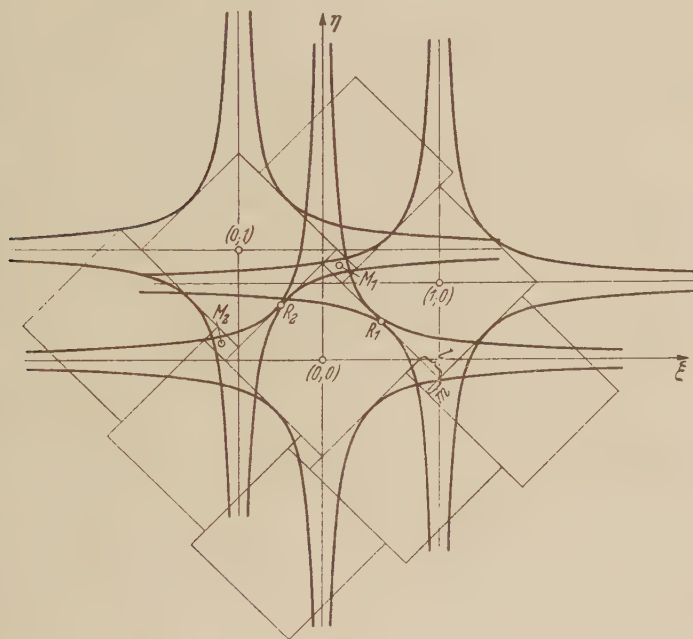


Fig. 4.

Liegt dagegen M_1 oder M_2 innerhalb oder auf dem Rand des Kreuzes (a) ist also $(l+m)(2-|l-m|) \leq 1$, so überdecken jene vier zu (a) kongruenten Kreuze die Lücke $\mathfrak{Q}_1$ schon vollständig, und die Gesamtheit der Kreuze um die Quadrate von $\mathfrak{P}_1$ die ganze Ebene lückenlos (Fig. 4⁶)).

Wir verkleinern nun die zu (a) kongruenten Kreuze im gleichen Maßstab ähnlich zu ihren Mittelpunkten, bis sich zum erstenmal zwei ursprünglich

⁶) Um die Figur nicht zu überladen, wurden nur drei Kreuze gezeichnet.

dieselbe Quadratseite berührende Hyperbeln berühren, also das Kreuz um den Nullpunkt zum erstenmal durch einen der Punkte

$$R_1\left(\xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+l); \eta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-l)\right) \quad (\text{für } l \leq m),$$

$$R_2\left(\xi_2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1-m); \eta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+m)\right) \quad (\text{für } l \geq m)$$

geht. Es ergibt sich hierfür:

$$(e) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8} \text{Max} [1-l^2; 1-m^2].$$

Ist bei dieser Verkleinerung wenigstens einer der Punkte M_1 oder M_2 innerhalb des Kreuzes (e) geblieben oder höchstens auf seinen Rand zu liegen gekommen, also

$$(l+m)(2-|l-m|) \leq \text{Max} [1-l^2; 1-m^2],$$

so ist die Überdeckung der Ebene durch die Gesamtheit der zu (e) kongruenten Kreuze um die Quadratmittelpunkte von $\mathfrak{P}_1$ sicher noch lückenlos.

Sind aber M_1 und M_2 außerhalb des Kreuzes (e) gelegen, ist also

$$\text{Max} [1-l^2; 1-m^2] < (l+m)(2-|l-m|) \leq 1,$$

so überdecken die sämtlichen zu (d) kongruenten Kreuze um die Quadratmittelpunkte von $\mathfrak{P}_1$ die Ebene lückenlos.

Wir erhalten daher das vorläufige Ergebnis:

Legt man um jeden Quadratmittelpunkt der Parkettierung $\mathfrak{P}_1$ die zu

$$(5) \quad |\xi\eta| \leq \frac{1}{8} \text{Max} [(l+m)(2-|l-m|); 1-l^2; 1-m^2]$$

kongruenten Hyperbelkreuze, so überdeckt die Gesamtheit dieser Kreuze die Ebene sicher lückenlos.

Das gilt offenbar auch noch für den Fall, daß l oder m einzeln oder gleichzeitig verschwinden, also für alle

$$0 \leq l \leq 1; \quad 0 \leq m \leq 1.$$

II.

Wir verschaffen uns eine weitere *Parkettierung* $\mathfrak{P}_2$ der Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1:

An die Seite eines Quadrats legen wir zwei kongruente Quadrate Ω_1, Ω_2 , in der Weise, wie Fig. 5 angibt. Ω_1 sei gegenüber dem ersten Quadrat im negativen Umlaufsinn um m verschoben, Ω_2 habe den Abstand l von Ω_1 , wobei $0 < l \leq m \leq 1$. Ebenso auf der Gegenseite des ersten Quadrats, symmetrisch zu seinem Mittelpunkt. Fahren wir in dieser Weise fort, so entsteht eine Parkettierung $\mathfrak{P}_2$ der Ebene mit Quadraten der Seitenlänge 1, wobei noch rechteckige Lücken mit den Seitenlängen 1, l bleiben.

Durch den Mittelpunkt eines Quadrats legen wir parallel zu den Seiten die Achsen eines ξ, η -Koordinatensystems⁷⁾.

Die Hyperbelkreuze, welche die Quadratdiagonalen durch die Punkte mit den ξ, η -Koordinaten $(0; 0)$, $(1 + l; 0)$ zu Asymptoten haben und den Mittelpunkt $M\left(\frac{1+l}{2}; 0\right)$ der Lücke $\mathfrak{L}$ auf ihrem Rand enthalten, überdecken diese Lücke sicher vollständig.

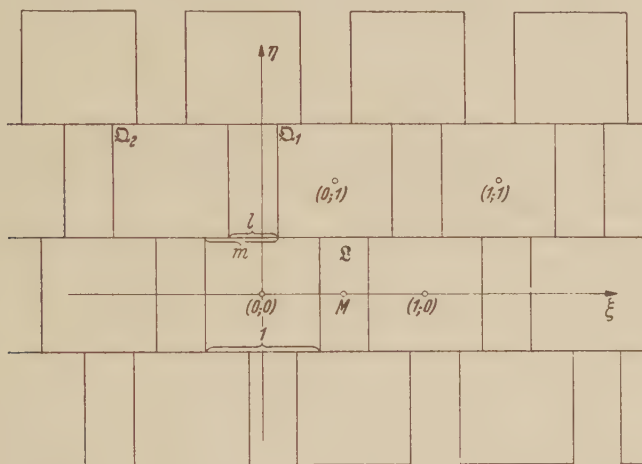


Fig. 5.

Wenn wir demnach um jeden Quadratmittelpunkt von $\mathfrak{P}_2$ das zu

$$(6) \quad |\xi^2 - \eta^2| \leq \frac{1}{4} (1 + l)^2$$

kongruente Kreuz legen, so wird die ganze Ebene sicher lückenlos überdeckt für alle $0 \leq l \leq m \leq 1$.

In den beiden Parkettierungen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ transformieren wir nun ξ, η affin so, daß die Mittelpunkte der Quadrate in Gitterpunkte eines quadratischen x, y -Gitters übergehen,

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y;$$

dabei sollen für die Parkettierung $\mathfrak{P}_1$ die folgenden Punkte einander entsprechen (vgl. Fig. 3):

$$\begin{aligned} \xi = 0 : x = 0, & \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + l) : x = 1, & \quad \xi = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - m) : x = 0, \\ \eta = 0 : y = 0, & \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - l) : y = 0, & \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + m) : y = 1. \end{aligned}$$

⁷⁾ Vgl. Fußnote ⁴⁾, S. 668.

Hieraus

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+l); & \beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-m); \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-l); & \delta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+m).\end{aligned}$$

Für die Parkettierung $\mathfrak{P}_2$ (Fig. 5):

$$\begin{aligned}\xi = 0 : x = 0, & & \xi = 1+l : x = 1, & & \xi = m : x = 0, \\ \eta = 0 : y = 0, & & \eta = 0 & : y = 0, & \eta = 1 : y = 1,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\alpha &= 1+l, & \beta &= m, \\ \gamma &= 0, & \delta &= 1.\end{aligned}$$

Nach Transformation der Formen (5) und (6) erhalten wir demnach, I und II zusammenfassend, das

Ergebnis. Zu beliebigen Zahlen μ, ν gibt es stets Zahlen x, y mit $x \equiv \mu, y \equiv \nu$, so daß

$$\begin{aligned}(7) \quad & |(1+l)x - (1-m)y| \mid (1-l)x + (1+m)y \mid \\ & \leq \frac{1}{4} \text{Max} [(l+m)(2-|l-m|); 1-l^2; 1-m^2] \\ & \text{für } 0 \leq l \leq 1; \quad 0 \leq m \leq 1.\end{aligned}$$

Zu beliebigen Zahlen μ, ν gibt es stets Zahlen x, y mit $x \equiv \mu, y \equiv \nu$, so daß

$$\begin{aligned}(8) \quad & |(1+l)x - (1-m)y| \mid (1+l)x + (1+m)y \mid \leq \frac{1}{4}(1+l)^2 \\ & \text{für } 0 \leq l \leq m \leq 1.\end{aligned}$$

In der auf Seite 660 eingeführten Schreibweise ergibt sich daher:

Satz 4.

$$(7a) \quad \varphi(1-l^2; l+m; m^2-1) \leq \frac{1}{4} \text{Max} [(l+m)(2-|l-m|); 1-l^2; 1-m^2] \quad \text{für } 0 \leq l \leq 1; \quad 0 \leq m \leq 1.$$

$$(8a) \quad \varphi((1+l)^2; (1+l)m; m^2-1) \leq \frac{1}{4}(1+l)^2 \quad \text{für } 0 \leq l \leq m \leq 1.$$

Gilt dabei in (7a) oder (8a) das Gleichheitszeichen, so ist $\varphi = \varphi_1$. In diesem Fall haben wir die folgenden Zahlenpaare $(\mu_1; \nu_1)$:

In (7a), falls $(l+m)(2-|l-m|) > \text{Max} [1-l^2; 1-m^2]$, (nach S. 669 und 670)

$$\text{für alle obigen } l, m: \mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2};$$

$$\text{falls } (l+m)(2-|l-m|) < \text{Max} [1-l^2; 1-m^2], \text{ (S. 670)}$$

$$\text{für } l < m: \mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv 0;$$

$$\text{für } l > m: \mu_1 \equiv 0, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2};$$

$$\text{für } l = m: \mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad \mu_1 \equiv 0, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2};$$

falls $(l + m)(2 - |l - m|) = \text{Max}[1 - l^2; 1 - m^2]$ aus dem vorigen

$$\begin{aligned} \text{für } l < m: \quad \mu_1 &\equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv 0; \\ \text{für } l > m: \quad \mu_1 &\equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \mu_1 \equiv 0, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}; \\ \text{für } l = m: \quad \mu_1 &\equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \equiv 0, \\ &\quad \text{und} \quad \mu_1 \equiv 0, \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es können hier jeweils auch beide Möglichkeiten eintreten.

In (8a, nach S. 671 für alle zulässigen l, m : $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \nu_1 \equiv 0$;

für $l = m = 0$ auch noch $\mu_1 \equiv 0, \nu_1 \equiv \frac{1}{2}$.

B. Vergleich dieser Schranken mit der Minkowskischen Schranke.

Für die Formen von (7) ergibt sich aus Satz 1 die Schranke:

$$\frac{1}{2}(1 + ml).$$

Vergleichen wir diese Schranke mit jener von (7), so ist wegen $0 \leq l \leq 1$, $0 \leq m \leq 1$

$$(a) \quad \frac{1}{4}(1 - l^2); \quad \frac{1}{4}(1 - m^2) < \frac{1}{2}(1 + ml);$$

außerdem aber auch

$$(b) \quad \frac{1}{4}(l + m)(2 - |l - m|) \leq \frac{1}{2}(1 + ml),$$

denn es ist

$$0 \leq l + m \leq 1 + ml \quad [\text{wegen } 0 \leq (1 - l)(1 - m)]$$

und

$$0 \leq 2 - |l - m| \leq 2.$$

Dabei gilt in (b) das Gleichheitszeichen nur für $l = m = 1$.

Ebenso ist die Schranke von (8), wegen $0 \leq l \leq m \leq 1$ höchstens gleich der entsprechenden aus Satz 1:

$$\frac{1}{4}(1 + l)^2 \leq \frac{1}{2}(1 + l),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $l = 1$ und damit zugleich $m = 1$ angenommen wird.

$$l = m = 1 \text{ liefert aber in (7)} \quad |xy| \leq \frac{1}{4},$$

$$\text{in (8)} \quad |x| |x + y| \leq \frac{1}{4},$$

also die Fälle, in denen nach Satz 1 die rechte Seite nicht mehr verkleinert werden kann. Wir erhalten daher das

Ergebnis. Die Schranken von (7) und (8) sind stets kleiner als die entsprechenden des Satzes 1 mit Ausnahme der zu $2bxy$ äquivalenten Formen.

Für diese Fälle, in denen die Schranke von Satz 1 nicht mehr verkleinert werden kann, ergeben sich dieselben Schranken.

C. Reduktion einer beliebigen indefiniten Form
auf eine der angegebenen Formen.

Hierzu benutzen wir den

Hilfssatz 3. Jede indefinite Form $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ läßt sich durch eine unimodulare Transformation auf eine Form $\bar{Q} = A x^2 + 2Bxy + Cy^2$ bringen, so daß:

1. falls $aw^2 + 2bw + c = 0$ keine rationale Wurzel hat, $\bar{Q} = A(x - w_1 y)(x - w_2 y)$ mit $0 < w_1 < 1$, $w_2 < -1$, $-1 \leq w_1 w_2 < 0$;
2. falls $aw^2 + 2bw + c = 0$ (wenigstens) eine rationale Wurzel hat, $\bar{Q} = 2B(x - w_1 y)y$ mit $0 \leq w_1 \leq \frac{1}{2}$.

Zu 1. Jede indefinite Form, welche die Bedingung von 1. erfüllt, läßt sich bekanntlich durch eine ganzzahlige Transformation der Determinante 1 auf eine „reduzierte“ Form $\bar{Q} = \bar{A}(x - \bar{w}_1 y)(x - \bar{w}_2 y)$ bringen, in der $|\bar{w}_1| > 1$, $|\bar{w}_2| < 1$, $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 < 0$ ⁸⁾. Ist in $\bar{Q}$ noch nicht $|\bar{w}_1 \bar{w}_2| \leq 1$, so ist das nach Ausführung der Transformation $x = Y$, $y = X$ der Fall: $\bar{Q} = A(X - w_1 Y)(X - w_2 Y)$, $w_1 w_2 = \frac{1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2}$. Da $w_1 \cdot w_2 < 0$, so können wir speziell annehmen, daß $w_1 > 0$, $w_2 < 0$, was sich nötigenfalls noch mit der Transformation $X = \xi$, $Y = -\eta$ erreichen läßt, so daß nun $0 < w_1 < 1$, $w_2 < -1$, $-1 \leq w_1 \cdot w_2 < 0$.

Zu 2. Sei $w' = \frac{q}{p}$ eine rationale Wurzel, p, q ganze relativ prime Zahlen, so gibt es ganze Zahlen p', q' , so daß $pp' + qq' = 1$.

$Q = (rx - sy)(px - qy)$ geht dann durch die unimodulare Transformation $X = q'x + p'y$, $Y = px - qy$ über in $Q' = (\varrho X - \sigma Y)Y$, wobei $\varrho \neq 0$ ist. Mittels der Transformation $X = \xi + k\eta$, $Y = \eta$ erhalten wir $\bar{Q} = (\varrho\xi - (\sigma - \varrho \cdot k)\eta)\eta = \varrho(\xi - w_1\eta)\eta$, wobei k so gewählt ist, daß $|w_1| \leq \frac{1}{2}$. Ist nun $-\frac{1}{2} \leq w_1 < 0$, so ersetzen wir noch η durch $-\eta$ und erhalten $\bar{Q} = 2B(\xi - w_1\eta)\eta$ mit $0 \leq w_1 \leq \frac{1}{2}$, w. z. b. w.

Wir können uns nun in (7), S. 672 auf die Zahlenpaare l, m mit $0 < l \leq m < 1$, in (8) auf die Wertepaare l, m mit $0 \leq l \leq m \leq 1$ beschränken und erhalten abgesehen von einer multiplikativen Konstanten und von äquivalenten Formen bereits alle indefiniten Formen.

Nehmen wir nämlich eine nach Hilfssatz 3, 1 reduzierte Form und setzen versuchsweise in (7)

$$(9) \quad w_1 = \frac{1-m}{1+l}, \quad w_2 = -\frac{1+m}{1-l},$$

⁸⁾ Ein kurzer Beweis, der zugleich einen Weg weist, diese Reduktion durchzuführen, findet sich z. B. bei L. E. Dickson, Introduction to the Theory of Numbers, Chicago 1936 (5. Impr.), S. 101, Beweis von Satz 76; in der deutschen Übersetzung von Bodewig, Leipzig 1931, S. 97.

so bestimmt sich daraus

$$(10) \quad l = \frac{w_1 - w_2 - 2}{-w_1 - w_2}, \quad m = \frac{w_1 - w_2 + 2w_1w_2}{-w_1 - w_2},$$

setzen wir in (8)

$$(11) \quad w_1 = \frac{1-m}{1+l}, \quad w_2 = \frac{1+m}{1+l},$$

so ergibt sich

$$(12) \quad l = \frac{-w_1 + w_2 + 2}{w_1 - w_2}, \quad m = \frac{-w_1 - w_2}{w_1 - w_2}.$$

Für die Wertepaare w_1, w_2 des Hilfssatzes 3, 1 erfüllen aber, wenn $w_1 - w_2 > 2$, die Zahlenpaare l, m von (10) die Bedingung $0 < l \leq m < 1$, wenn $w_1 - w_2 \leq 2$, die Zahlenpaare l, m von (12) die Bedingung $0 \leq l < m < 1$.

Schließlich erhalten wir aus (8) für $0 \leq l = m \leq 1$ durch die Transformation $X = x$, $Y = x + y$ die Form $(1+l)(2X - (1-l)Y)Y$, daher gerade die Formen des Hilfssatzes 3, 2 für

$$(13) \quad l = 1 - 2w_1,$$

w. z. b. w.

Ergänzend zu Satz 4 von S. 672 ergibt sich demnach der

Satz 4a. *Jede indefinite Form ist nach Division durch eine Konstante (wenigstens) einer der Formen von (7a) oder (8a) äquivalent.*

Da sich jede indefinite Form z. B. mittels Hilfssatz 3, (10), (12) und (13) auf eine dieser Formen zurückführen läßt, so können wir zu jeder beliebigen Form nach Satz 4 eine obere Schranke für φ angeben.

D. Spezialfälle, in denen die angegebene Schranke gleich der unteren Grenze ist.

I. $l = m = \frac{1}{4p+1}$, $p = 0, 1, 2, \dots$ erfüllt die Nebenbedingung zu (8), S. 672. Es gilt demnach:

Zu beliebigen Zahlen μ, ν gibt es stets Zahlen x, y mit $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$|(2p+1)x - 2py| \cdot |x+y| \leq \frac{1}{4}(2p+1).$$

Wir zeigen nun: In diesem Fall ist die Schranke nicht mehr zu verkleinern, also $\frac{1}{4}(2p+1) = \varphi = \varphi_1$ und daher nach Satz 4, S. 672 $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv 0$.

Führen wir die Transformation aus $x' = x$, $y' = x + y$, so wird es nach Hilfssatz 1 genügen zu zeigen, daß für die transformierte Ungleichung

$$(14) \quad |(4p+1)x' - 2py'| \cdot |y'| \leq \frac{1}{4}(2p+1)$$

die Schranke gleich der unteren Grenze φ_1 mit $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv \frac{1}{2}$ ist.

Das Gleichheitszeichen wird in Ungleichung (14) angenommen für $x' = \frac{1}{2}$, $y' = \frac{1}{2}$. Wir haben daher nur noch zu zeigen, daß es keine ganzen Zahlen X , Y gibt, so daß

$$|(4p+1)(X+\frac{1}{2})-2p(Y+\frac{1}{2})||Y+\frac{1}{2}| < \frac{1}{4}(2p+1)$$

oder

$$|(4p+1)(2X+1)-2p(2Y+1)||2Y+1| < 2p+1.$$

O. B. d. A. kann man $2Y+1 > 0$ annehmen. Dann kann Y höchstens im Intervall $0 \leq Y \leq p-1$ gelegen sein (also auch nur $p \geq 1$). Durch die Substitution $2X = Y + z$ bekommt man aus der obigen Ungleichung

$$|(4p+1)z + Y + 2p + 1|(2Y+1) < 2p+1.$$

Wegen $0 \leq Y \leq p-1$ kann dann höchstens $z = -1$ sein, demnach $1 \leq Y = 2X + 1 \leq p-1$. Hierfür ist aber stets

$$\begin{aligned} & |-(4p+1) + Y + 2p + 1|(2Y+1) \\ &= (2p-Y)(2Y+1) \geq (p+1) \cdot 3 > 2p+1. \end{aligned} \quad \text{Widerspruch.}$$

$$\text{II.} \quad l = \frac{4pq-1}{4pq+4p+4q+3}, \quad m = \frac{4pq+4p+1}{4pq+4p+4q+3}$$

(p, q natürliche Zahlen) erfüllen die Nebenbedingung von (8), S. 672. Es ergibt sich daher aus (8):

Zu beliebigen Zahlen μ, ν gibt es stets Zahlen x, y mit $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$|(2p+1)x - y| |(2q+1)x + 2(q+1)y| \leq \frac{1}{4}(2p+1)(2q+1).$$

Wir zeigen nun: Die Schranke ist nicht mehr zu verkleinern, also $\frac{1}{4}(2p+1)(2q+1) = \varphi = \varphi_1$ und daher nach Satz 4 $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv 0$.

Führen wir die Transformation aus

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = (2q+1)x + 2(q+1)y, \end{cases} \end{aligned}$$

so genügt es nach Hilfssatz 1 zu zeigen, daß für die transformierte Ungleichung

$$(15) \quad |(4pq+4p+4q+3)x' - 2(p+1)y'| \cdot |y'| \leq \frac{1}{4}(2p+1)(2q+1)$$

die Schranke gleich der unteren Grenze φ_1 mit $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv \frac{1}{2}$ ist.

Das Gleichheitszeichen wird in (15) angenommen für $x' = \frac{1}{2}$, $y' = q + \frac{1}{2}$. Wir haben also nur zu zeigen, daß es keine ganzen Zahlen X, Y geben kann, so daß

$$\begin{aligned} & |(4pq+4p+4q+3)(X+\frac{1}{2}) \\ & - 2(p+1)(Y+\frac{1}{2})| |Y+\frac{1}{2}| < \frac{1}{4}(2p+1)(2q+1), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & |(4pq + 4p + 4q + 3)(2X + 1) \\ & - 2(p + 1)(2Y + 1)| |2Y + 1| < (2p + 1)(2q + 1). \end{aligned}$$

O. B. d. A. kann $Y \geq 0$ angenommen werden. Dann kommt höchstens $X \geq 0$ in Frage. Setzen wir

$$(b) \quad Y = q(2X + 1) + X + z,$$

so folgt aus der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} (c) \quad & |(2p + 1)(2X + 1) - 4(p + 1)z| (2z + (2q + 1)(2X + 1)) \\ & < (2p + 1)(2q + 1), \end{aligned}$$

wobei $2z + (2q + 1)(2X + 1) = 2Y + 1 \geq 1$ ist.

$\alpha)$ $z = 0$ scheidet aus.

$\beta)$ $z \geq 1$: Wegen (c) ist $0 \leq X \leq p - 1$, ($p \geq 1$); außerdem

$$\begin{aligned} & |(2p + 2)2z - (2p + 1)(2X + 1)| \\ & = |(2p + 1)(2z - 2X - 1) + 2z| < 2p + 1. \end{aligned}$$

Es kommt dann höchstens $1 \leq z \leq X \leq p - 1$ in Frage, und zwar nur $z = X$. Die linke Seite von (c) ist dann

$$\begin{aligned} & [(2p + 1) - 2X][2X + (2q + 1)(2X + 1)] > (2p + 1)(2q + 1)(2X + 1) \\ & - 2X(2q + 1)(2X + 1) = (2p + 1)(2q + 1) + 4X(2q + 1)(p - X) \\ & > (2p + 1)(2q + 1). \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

$\gamma)$ $z < 0$, $-z = \bar{z} \geq 1$. (c) geht dann über in

$$\begin{aligned} & [(2p + 1)(2X + 1) + 4(p + 1)\bar{z}][2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z}] \\ & < (2p + 1)(2q + 1), \end{aligned}$$

wobei $(2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z} \geq 1$. Da $X \geq 0$, $\bar{z} \geq 1$, so ist jedenfalls $(2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z} < 2q + 1$, also $2\bar{z} > (2q + 1)2X$, und für $X \geq 1$ wäre daher die linke Seite der Ungleichung (c) größer als die rechte; es kann daher nur noch $X = 0$ in Frage kommen. Hierfür ist aber

$$\begin{aligned} & [2p + 1 + 4(p + 1)\bar{z}][2q + 1 - 2\bar{z}] \geq (2p + 1)(2q + 1) \\ & - 2\bar{z}(2p + 1) + 2\bar{z}(2p + 2) > (2p + 1)(2q + 1). \end{aligned}$$

Widerspruch!

$$III. \quad l = \frac{q - p}{4pq + 3p + q + 1}, \quad m = \frac{p + q + 1}{4pq + 3p + q + 1}$$

(p, q ganze Zahlen mit $q \geq p \geq 0$) erfüllen die Nebenbedingung von (8) S. 672. Wir erhalten daher in (8):

$$|(2p + 1)x - 2py| |(2q + 1)x + 2(q + 1)y| \leq \frac{1}{4}(2p + 1)(2q + 1).$$

Wir zeigen nun: Diese Schranke ist nicht mehr zu verkleinern, also $\frac{1}{4}(2p+1)(2q+1) = \varphi = \varphi_1$ und daher nach Satz 4 $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv 0$.

Nach Hilfssatz 1 genügt es zu zeigen, daß für die mit (a) von II., S. 676 transformierte Ungleichung

$$(16) \quad |(8pq + 6p + 2q + 2)x' - (4p + 1)y'| |y'| \leq \frac{1}{4}(2p + 1)(2q + 1)$$

die Schranke gleich der unteren Grenze φ_1 mit $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\nu_1 \equiv \frac{1}{2}$ ist.

Das Gleichheitszeichen wird angenommen für $x' = \frac{1}{2}$, $y' = q + \frac{1}{2}$. Ebenso wie in II. zeigen wir, daß es keine ganzen Zahlen X, Y gibt, so daß

$$|(8pq + 6p + 2q + 2)(2X + 1) - (4p + 1)(2Y + 1)| |2Y + 1| < (2p + 1)(2q + 1).$$

O. B. d. A. $Y \geq 0$; daher kann höchstens $X \geq 0$ sein. Durch die Substitution (b) von II., S. 677 geht die obige Ungleichung über in

$$(d) \quad |(2p + 1)(2X + 1) - (4p + 1)2z| [2z + (2q + 1)(2X + 1)] < (2p + 1)(2q + 1),$$

wobei $2z + (2q + 1)(2X + 1) = 2Y + 1 \geq 1$ ist.

$\alpha)$ $z = 0$ scheidet aus.

$\beta)$ $z \geq 1$. In diesem Fall kann wegen (d) X nur in den Grenzen $1 \leq X \leq p - 1$ gelegen sein (nur noch $p \geq 2$ möglich); ferner muß sein:

$$(2p + 1)(2X + 1) - (4p + 1)2z = |(2p + 1)(2X + 1 - 4z) + 2z| < 2p + 1.$$

Setzen wir hierin $4z - 2X - 1 = 2g + 1$, so kann nur $g \geq 0$ in Frage kommen; dann ist aber

$$\begin{aligned} |(2p + 1)(2X + 1) - (4p + 1)2z| &= |(2p + 1)(2g + 1) - g - (X + 1)| \\ &= |2p + 1 + (4p + 1)g - (X + 1)| \geq p + 1, \end{aligned}$$

und daher die linke Seite in (d)

$$\begin{aligned} &\geq (p + 1)[2z + (2q + 1)(2X + 1)] \\ &> (p + 1)(2q + 1) \cdot 2 > (2p + 1)(2q + 1). \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

$\gamma)$ $z < 0$, $-z = \bar{z} \geq 1$. (d) geht dann über in

$$\begin{aligned} &[(2p + 1)(2X + 1) + (4p + 1)2\bar{z}][2\bar{z} + (2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z}] \\ &< (2p + 1)(2q + 1), \end{aligned}$$

wobei $(2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z} \geq 1$. Wegen $X \geq 0$, $\bar{z} \geq 1$ ist jedenfalls $(2q + 1)(2X + 1) - 2\bar{z} < 2q + 1$, also $2\bar{z} > (2q + 1)2X$ und für $X \geq 1$

daher die linke Seite von (d) bereits größer als die rechte. Es bleibt noch $X = 0$. Hierfür ist

$$\begin{aligned} & [2p + 1 + (4p + 1)2\bar{z}] [2q + 1 - 2\bar{z}] \\ & \geq (2p + 1)(2q + 1) - (2p + 1)2\bar{z} + (4p + 1)2\bar{z} \\ & \geq (2p + 1)(2q + 1) \text{ (Gleichheit nur für } p = 0\text{)}. \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Wir bringen (14), (15) und (16) noch in die Gestalt:

$$(14') \quad \left| x - \frac{2p}{4p+1}y \right| |y| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{2 - \frac{1}{2p+1}},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(15') \quad \left| x - \frac{1}{2q+1 + \frac{2p+1}{2(p+1)}}y \right| |y| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2q+1}},$$

$$p, q \text{ natürliche Zahlen;}$$

$$(16') \quad \left| x - \frac{1}{2q+1 + \frac{2p+1}{4p+1}}y \right| |y| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{2 - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2q+1}},$$

$$p, q \text{ ganze Zahlen mit } q \geq p \geq 0.$$

I, II, III zusammenfassend, haben wir den folgenden

Satz 5.

$$\varphi(0; \tfrac{1}{2}; -w_1) = \varphi_1(0; \tfrac{1}{2}; -w_1) \text{ mit } \mu_1 \equiv \tfrac{1}{2}, \nu_1 \equiv \tfrac{1}{2} \text{ für}$$

$$(14a) \quad w_1 = \frac{2p}{4p+1}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{2 - \frac{1}{2p+1}},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(15a) \quad w_1 = \frac{1}{2q+1 + \frac{2p+1}{2(p+1)}}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2q+1}},$$

$$p, q \text{ natürliche Zahlen;}$$

$$(16a) \quad w_1 = \frac{1}{2q+1 + \frac{2p+1}{4p+1}}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{2 - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2q+1}},$$

$$p, q \text{ ganze Zahlen mit } q \geq p \geq 0.$$

Wir untersuchen nun die in (14), (15), (16) auftretenden Formen bezüglich ihrer Äquivalenz zueinander.

Nach Hilfssatz 1, S. 660, haben äquivalente Formen dieselbe untere Grenze φ . Da aber hier die zugehörigen φ_1 voneinander verschieden sind, so kann keine der Formen von (14') mit $p > 1$ einer der Formen von (15') oder (16') äquivalent sein, ebenso keine Form von (15') mit einer von (16'). Außerdem sind in (14') für verschiedenes p keine zwei Formen zueinander

äquivalent, in (15') und (16') z. B. keine zwei Formen mit gleichem p und verschiedenem q .

Zwei Formen, die nicht äquivalent sind, die aber in äquivalente übergehen, wenn man eine mit einer passenden Konstanten k multipliziert, würden in (14'), (15'), (16') im wesentlichen dieselbe Ungleichung liefern und damit keinen neuen Fall. Solche Formen kommen aber unter den obigen gar nicht vor, abgesehen von $k = \pm 1$ (wovon wir absehen können, da es nur auf die absoluten Beträge der Formen ankommt), denn es muß für äquivalente Formen die Diskriminante dieselbe sein.

Wir bekommen also hier unendlich viele wesentlich verschiedene Fälle, in denen die angegebene Schranke gleich der unteren Grenze ist.

E. Die Formen $x^2 - Dy^2$ (D natürliche Zahl) und $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - D \frac{y^2}{4}$ ($D = 4n + 1$, n natürliche Zahl).

Nach C. läßt sich zu jeder Form eine Schranke angeben. Für die obigen Formen können wir einen allgemeineren kürzeren Weg angeben.

$$\text{I.} \quad l = \frac{\sqrt{p+q^2}-1}{q}, \quad m = \frac{\sqrt{p+q^2}-p}{q},$$

p, q natürliche Zahlen mit $p \leq q$, erfüllen die Nebenbedingung von (7), S. 672. Wir bekommen daher in (7) nach Division mit $1 - l^2$

$$|x^2 + 2qxy - py^2| = |(x + qy)^2 - (p + q^2)y^2| \leq \frac{1}{4}(2q + 1 - p).$$

$$\text{II.} \quad l = \frac{p}{\sqrt{p+q^2}} - 1, \quad m = \frac{q}{\sqrt{p+q^2}},$$

p, q ganze Zahlen mit $1 \leq q + 1 \leq p \leq 2q + 1$, erfüllen die Nebenbedingung von (8); wir bekommen daher in (8) nach Division durch $1 - m^2$

$$|px^2 + 2qxy - y^2| = |(p + q^2)x^2 - (qx - y)^2| \leq \frac{p}{4}.$$

$$\text{III.} \quad l = \frac{\sqrt{p + \frac{1}{4}(2q+1)^2} - 1}{\frac{1}{2}(2q+1)}, \quad m = \frac{\sqrt{p + \frac{1}{4}(2q+1)^2} - p}{\frac{1}{2}(2q+1)},$$

p, q ganze Zahlen mit $1 \leq p \leq q + 1$, erfüllen die Nebenbedingung von (7). Wir erhalten daher in (7) nach Division durch $1 - l^2$

$$|x^2 + (2q+1)xy - py^2| = \left| \left(x + qy + \frac{y}{2}\right)^2 - (4p + (2q+1)^2) \frac{y^2}{4} \right| \leq \frac{1}{4}(2(q+1) - p).$$

$$\text{IV.} \quad l = \frac{2p}{\sqrt{4p + (2q+1)^2}} - 1, \quad m = \frac{2q+1}{\sqrt{4p + (2q+1)^2}},$$

p, q ganze Zahlen mit $2 \leq q + 2 \leq p \leq 2(q + 1)$, erfüllen die Nebenbedingung von (8). Wir erhalten daher in (8) nach Division mit $1 - m^2$

$$|px^2 + (2q + 1)xy - y^2| = |(4p + (2q + 1)^2)\frac{x^2}{4} - (qx + \frac{x}{2} - y)^2| \leq \frac{p}{4}.$$

Führen wir nun in I. und III. die Transformation aus

$$(T_1) \begin{cases} X = x + qy \\ Y = y \end{cases}, \text{ in II. und IV.: } (T_2) \begin{cases} X = qx - y \\ Y = x \end{cases}$$

so ergibt sich zusammen mit Satz 4, S. 672:

Zu beliebigen Zahlen μ, ν gibt es stets Zahlen X, Y mit $X \equiv \mu, Y \equiv \nu$, so daß

$$(17) \quad |X^2 - (p + q^2)Y^2| \leq \frac{1}{4}(2q + 1 - p),$$

p, q natürliche Zahlen mit $p \leq q$;

$$(18) \quad |X^2 - (p + q^2)Y^2| \leq \frac{p}{4},$$

p, q ganze Zahlen mit $1 \leq q + 1 \leq p \leq 2q + 1$;

$$(19) \quad \left(X + \frac{Y}{2}\right)^2 - (4p + (2q + 1)^2)\frac{Y^2}{4} \leq \frac{1}{4}(2(q + 1) - p),$$

p, q ganze Zahlen mit $1 \leq p \leq q + 1$;

$$(20) \quad \left(X + \frac{Y}{2}\right)^2 - (4p + (2q + 1)^2)\frac{Y^2}{4} \leq \frac{p}{4},$$

p, q ganze Zahlen mit $2 \leq q + 2 \leq p \leq 2(q + 1)$.

Ist dabei in (17) $\varphi(1; 0; -(p + q^2)) = \frac{1}{4}(2q + 1 - p) = \varphi_1$, so ist

$$\mu_1 \equiv \frac{1}{2}(1 + q), \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}.$$

Ist in (18) $\varphi(1; 0; -(p + q^2)) = \frac{p}{4} = \varphi_1$, so ist $\mu_1 \equiv \frac{q}{2}, \nu_1 \equiv \frac{1}{2}$,

(für $p = 1, q = 0$ auch noch $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}, \nu_1 \equiv 0$).

Ist in (19) $\varphi(1; \frac{1}{2}; -(p + q^2 + q)) = \frac{1}{4}(2(q + 1) - p) = \varphi_1$, so ist

für $q + 1 > p$: $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}(q + 1); \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2};$

$q + 1 = p > 1$: $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}(q + 1); \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}$ oder $\mu_1 \equiv \frac{q}{2}; \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}$

(bzw. beide Fälle);

$q + 1 = p = 1$: $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}; \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}$ und⁹⁾ $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}; \quad \nu_1 \equiv 0$;

$\mu_1 \equiv 0; \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}.$

Ist in (20) $\varphi(1; \frac{1}{2}; -(p + q^2 + q)) = \frac{p}{4} = \varphi_1$, so ist $\mu_1 \equiv \frac{q}{2}; \quad \nu_1 \equiv \frac{1}{2}.$

Nun betrachten wir die Formen $x^2 - Dy^2$ (D positive ganze Zahl).

⁹⁾ Vgl. S. 685, $D = 5$.

Den Fall, daß D eine Quadratzahl ist, enthält (16') von S. 679. Für $p = 0$ erhalten wir dort

$$|2(q+1)xy - y^2| \\ = |(q+1)^2 x^2 - ((q+1)x - y)^2| \leq \frac{1}{4}(2q+1), \quad (q \geq 0)$$

und hieraus mit der Substitution $X = (q+1)x - y$, $Y = x$:

$$(21) \quad |X^2 - (q+1)^2 Y^2| \leq \frac{1}{4}(2q+1).$$

In diesem Fall ist $\varphi(1; 0; -(q+1)^2) = \frac{1}{4}(2q+1) = \varphi_1$, $\mu_1 = \frac{q}{2}$, $\nu_1 = \frac{1}{2}$.

Den Fall, daß D keine Quadratzahl ist, enthält (17) oder (18) von S. 681.

Nehmen wir nämlich die größte ganze Zahl von $\sqrt{D}$, $r = [\sqrt{D}] \geq 1$, also $(r+1)^2 > D > r^2$, und setzen in (17) bzw. (18) $q = r$, $p = D - r^2$, so ist für $D - r^2 \leq r$ gerade die Nebenbedingung von (17) erfüllt. In den übrig bleibenden Fällen $D - r^2 \geq r+1$ ist aber gerade die Nebenbedingung von (18) erfüllt.

Schließlich sind die Formen $(x + \frac{y}{2})^2 - D \frac{y^2}{4}$ für $D \equiv 1 \pmod{4}$, $D > 1$, in (19) und (20), S. 681 enthalten.

Zum Beweis nehmen wir bei vorgegebenem $D = 4n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) in (19) und (20) für q diejenige ganze Zahl ≥ 0 , für die

$$(a) \quad (2q+1)^2 < 4n+1 \leq (2q+3)^2;$$

p bestimmen wir aus

$$(b) \quad 4p + (2q+1)^2 = 4n+1; \quad p = n - q^2 - q \quad (\text{wegen } (a) \ p \geq 1);$$

dann ist entweder $1 \leq p \leq q+1$, also die Bedingung von (19) erfüllt, oder $p \geq q+2$ und wegen (b) und (a) ferner

$$4p + (2q+1)^2 \leq (2q+3)^2; \quad 4p \leq 4(q+1) \cdot 2; \quad \text{also } p \leq 2(q+1)$$

und damit die Bedingung von (20) erfüllt.

Zusammenfassend ergibt sich:

Zu jeder Form $x^2 - Dy^2$ (D natürliche Zahl) erhalten wir, wenn D eine Quadratzahl, aus (21) eine Schranke, wenn D keine Quadratzahl ist und $[\sqrt{D}] = q$, $D - q^2 = p$ gesetzt wird, für $p \leq q$ aus (17), für $p > q$ aus (18) eine Schranke.

Zu jeder Form $(x + \frac{y}{2})^2 - D \frac{y^2}{4}$ ($D = 4n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$) erhalten wir, wenn man in (19) bzw. (20) für q die ganze Zahl mit der Eigenschaft $(2q+1)^2 < 4n+1 \leq (2q+3)^2$ und für p die Zahl $n - q^2 - q$ setzt, für $p \leq q+1$ aus (19), für $p > q+1$ aus (20) eine Schranke.

Wir geben nun als Beispiel zu den Formen $|x^2 - Dy^2|$ für solche D , welche keinen quadratischen Teiler haben und $\not\equiv 1 \pmod{4}$ sind, bis $D = 95$, die sich hiernach ergebenden Schranken an (Tabelle 1). Ebenso zu den Formen

$|(x + \frac{y}{2})^2 - D \frac{y^2}{4}|$, für die $D = 4n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ist und D keinen quadratischen Teiler hat, bis $D = 101$ (Tabelle 2).

Tabelle 1.

$D \not\equiv 1 \pmod{4}$	Schranke		Klassenzahl
2	$\frac{1}{2} = \varphi_1$	$(1; \frac{1}{2})$	1
3	$\frac{1}{3} = \varphi_1$	$(1; \frac{1}{3})$	1
6	$\frac{3}{4} = \varphi_1$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$	1
7	$\frac{3}{4} > \varphi$	$(1; \frac{1}{2}); [4; \frac{3}{2}]$	1
10	$\frac{5}{4} = \varphi_1$	$(2; \frac{1}{2})$	2
11	$\frac{5}{4} > \varphi$	$(2; \frac{1}{2}); [5; \frac{3}{2}]$	1
14	$\frac{5}{4} = \varphi_1$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$	1
15	$\frac{5}{3} = \varphi_1$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$	2
19	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{18}{2}; \frac{3}{2}]$	1
22	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(2; \frac{1}{2}); [7; \frac{3}{2}]$	1
23	$\frac{7}{4} = \varphi_1$	$(2; \frac{1}{2})$	1
26	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(3; \frac{1}{2})$	2
30	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(3; \frac{1}{2})$	2
31	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{39}{2}; \frac{7}{2}]$	1
34	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$	2
35	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$	2
38	$\frac{11}{4} = \varphi_1$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$	1
39	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$	2
42	$\frac{7}{4} = \varphi_1$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$	2
43	$\frac{7}{4} = \varphi_1$	$(3; \frac{1}{2})$	1
46	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(3; \frac{1}{2}); [17; \frac{5}{2}]$	1
47	$\frac{11}{4} > \varphi$	$(3; \frac{1}{2}); [72; \frac{21}{2}]$	1
51	$\frac{13}{4} > \varphi$	$(4; \frac{1}{2}); [75; \frac{21}{2}]$	2
55	$\frac{9}{4} = \varphi_1$	$(4; \frac{1}{2})$	2
58	$\frac{9}{4} > \varphi$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{23}{2}; \frac{3}{2}]$	2
59	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{23}{2}; \frac{3}{2}]$	1
62	$\frac{13}{4} = \varphi_1$	$(\frac{7}{2}; \frac{1}{2})$	1
66	$\frac{15}{4} = \varphi_1$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	2
67	$\frac{7}{2} > \varphi$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{41}{2}; \frac{5}{2}]$	1
70	$\frac{11}{4} > \varphi$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{25}{2}; \frac{13}{2}]$	2
71	$\frac{5}{2} > \varphi$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{49}{2}; \frac{7}{2}]$	1
74	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(4; \frac{1}{2})$	2
78	$\frac{7}{2} = \varphi_1$	$(4; \frac{1}{2})$	2
79	$\frac{15}{4} > \varphi$	$(4; \frac{1}{2}); [120; \frac{27}{2}]$	3
82	$\frac{9}{2} = \varphi_1$	$(5; \frac{1}{2})$	4
83	$\frac{17}{4} > \varphi$	$(5; \frac{1}{2}); [41; \frac{9}{2}]$	1
86	$\frac{7}{2} > \varphi$	$(5; \frac{1}{2}); [14; \frac{3}{2}]$	1
87	$\frac{13}{4} > \varphi$	$(5; \frac{1}{2}); [14; \frac{3}{2}]$	2
91	$\frac{5}{2} = \varphi_1$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	2
94	$\frac{13}{4} = \varphi_1$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	1
95	$\frac{7}{2} = \varphi_1$	$(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$	2

Tabelle 2.

$D \equiv 1 \pmod{4}$	Schranke		Klassenzahl
5	$\frac{1}{4} = \varphi_1$	$(\mu_1; \nu_1) \equiv (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}; 0) \text{ u. } (0; \frac{1}{2})$	1
13	$\frac{3}{4} > \varphi$	$(1; \frac{1}{2}); [2; \frac{3}{2}]$	1
17	$\frac{1}{4} = \varphi_1$	$(\mu_1; \nu_1) \equiv (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \text{ u. } (1; \frac{1}{2})$	1
21	$\frac{3}{4} > \varphi$	$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
29	$\frac{5}{4} > \varphi$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); [1; \frac{1}{2}]$	1
33	$1 > \varphi$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
37	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}), (1; \frac{1}{2})$	1
41	$1 > \varphi$	$(1; \frac{1}{2}); [2; -\frac{1}{2}]$	1
53	$\frac{7}{4} > \varphi$	$(2; \frac{1}{2}); [2; -\frac{1}{2}]$	1
57	$\frac{3}{4} > \varphi$	$(2; \frac{1}{2}); [2; -\frac{1}{2}]$	1
61	$\frac{5}{4} > \varphi$	$(2; \frac{1}{2}); [2; -\frac{1}{2}]$	1
65	$1 = \varphi_1$	$(\mu_1; \nu_1) \equiv (2; \frac{1}{2}) \text{ u. } (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$	2
69	$\frac{5}{4} > \varphi$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
73	$\frac{3}{4} > \varphi$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
77	$\frac{7}{4} > \varphi$	$(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
85	$\frac{9}{4} > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	2
89	$2 > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
93	$\frac{7}{4} > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
97	$\frac{3}{2} > \varphi$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}); [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$	1
101	$\frac{5}{4}$	$(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}), (2; \frac{1}{2})$	1

Dazu finden sich (in runden Klammern), die aus S. 681 folgenden Zahlenpaare, und zwar direkt die Zahlenpaare, welche in die obigen Formen eingesetzt, die angegebenen Schranken liefern. Gibt es zu einem solchen Paar kein kongruentes, das in die zugehörige Form eingesetzt einen kleineren Wert als die angegebene Schranke liefert, so ist diese Schranke gleich der unteren Grenze $\varphi = \varphi_1$ und das genannte Zahlenpaar ist gleich $(\mu_1; \nu_1)$. Gibt es hingegen für ein D zu allen zugehörigen Paaren (in runder Klammer) kongruente Paare, die einen kleineren Wert als die Schranke ergeben, so kann diese nicht gleich $\varphi = \varphi_1$ sein, da für $\varphi = \varphi_1$ nach S. 660 stets Zahlenpaare $(\mu_1; \nu_1)$ vorhanden sind und als solche nur die obigen in Frage kommen können. In diesem Fall ist daher die Schranke jedenfalls $> \varphi$. Für die meisten D ist entschieden, ob die Schranke $= \varphi_1$ oder $> \varphi$ ist. (Das ist in jedem Einzelfall zu untersuchen; vgl. hierzu S. 685 und 686.) Kongruente Zahlenpaare, die einen kleineren Wert als die Schranke ergeben, sind in eckigen Klammern beigelegt.

Schließlich geben wir noch im Hinblick auf § 4 in jedem Fall die Klassenzahl im Körper $\mathfrak{K}(\sqrt{D})$ an¹⁰⁾.

Wir bringen hier zu einigen D , bei denen die angegebene Schranke gleich der unteren Grenze $\varphi = \varphi_1$ ist, einen Beweis. Die übrigen in den Tabellen angeführten Fälle können ebenso bewiesen werden.

$D = 62$. Es ist zu zeigen, daß es keine ganzen Zahlen X, Y gibt, so daß

$$|(X + \frac{1}{2})^2 - 62(Y + \frac{1}{2})^2| < \frac{1}{4},$$

also

$$(2X + 1)^2 - 62(2Y + 1)^2 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11$$

oder

$$4(X + 1)X - 62 \cdot 4(Y + 1)Y = \begin{array}{cccccc} 62 & 64 & 66 & 68 & 70 & 72 \\ 60 & 58 & 56 & 54 & 52 & 50. \end{array}$$

Die linke Seite ist durch 8 teilbar, also bleibt nur

$$(2X + 1)^2 - 62(2Y + 1)^2 = 3; -5; 11.$$

Es muß also wenigstens eine der Kongruenzen bestehen:

$$(2X + 1)^2 \equiv 3; -5; 11 \pmod{31}.$$

Das ist aber nicht möglich, da 3, -5 und 11 quadratische Nichtreste von 31 sind, w. z. b. w.

$D = 5$. Es gibt offensichtlich keine ganzen Zahlen X, Y , so daß

$$|(X + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(Y + \frac{1}{2}))^2 - \frac{5}{4}(Y + \frac{1}{2})^2| < \frac{1}{4}$$

oder

$$|(X + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y)^2 - \frac{5}{4}Y^2| < \frac{1}{4}$$

oder

$$|(X + \frac{1}{2}(Y + \frac{1}{2}))^2 - \frac{5}{4}(Y + \frac{1}{2})^2| < \frac{1}{4}.$$

Sämtliche drei Zahlenpaare sind daher Paare $(\mu_1; \nu_1)$, w. z. b. w.

$D = 65$. Angenommen, es gäbe zu den angegebenen Zahlenpaaren kongruente Paare, die in die Form $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 65\frac{y^2}{4}$ eingesetzt, einen kleineren Wert als 1 liefern, so kommen nur die folgenden Gleichungen mit ganzzahligen X, Y in Frage:

$$\begin{aligned} (2X + \frac{1}{2}(2Y + 1))^2 - \frac{65}{4}(2Y + 1)^2 \\ = 2X(2X + 2Y + 1) - 16(2Y + 1)^2 = \pm 2, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (2X + 1 + \frac{1}{2}(2Y + 1))^2 - \frac{65}{4}(2Y + 1)^2 \\ = (2X + 1)(2X + 2Y + 2) - 16(2Y + 1)^2 = \pm 2, \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Nach J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie und die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Leipzig und Berlin 1907, S. 355ff. Für $D = 31$ ist dort die Klassenzahl falsch angegeben. Sie ist 1.

also

$$(4X + 2Y + 1)^2 - 65(2Y + 1)^2 = \pm 8,$$

bzw.

$$(4X + 2Y + 3)^2 - 65(2Y + 1)^2 = \pm 8.$$

Es müßte demnach eine der Kongruenzen bestehen: $Z^2 \equiv \pm 8 \pmod{5}$. Das ist jedoch unmöglich, da 8 und -8 quadratische Nichtreste von 5 sind.

Beide Zahlenpaare sind daher Paare $(\mu_1; \nu_1)$. W. z. b. w.

§ 4.

Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern.

Wenn in einem algebraischen Zahlkörper zu zwei ganzen Zahlen α, β ($\beta \neq 0$) sich stets eine dritte ganze Zahl γ finden läßt, so daß

$$|Nm(\alpha - \beta\gamma)| < |Nm\beta|,$$

oder

$$\left| Nm\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right) \right| < 1,$$

dann kann man zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ein Verfahren angeben, das dem Euklidischen Algorithmus im Körper der rationalen Zahlen ganz analog ist. Man sagt kurz: Es existiert in dem betreffenden algebraischen Körper ein Euklidischer Algorithmus (Abk.: „E. A.“). In diesem Fall ist die Klassenzahl im Körper $= 1$.

Für quadratische Körper $\mathfrak{K}(\sqrt{D})$ (D quadratfrei) kann man die obige Forderung in der folgenden Weise aussprechen:

Zu beliebigen rationalen Zahlen a, b sollen stets Zahlen x, y mit $x \equiv a$, $y \equiv b$ vorhanden sein, so daß

$$\text{für } D \not\equiv 1 \pmod{4} \quad |x^2 - Dy^2| < 1,$$

$$\text{für } D \equiv 1 \pmod{4} \quad \left| \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}y^2 \right| < 1.$$

Das in den vorigen Paragraphen behandelte Problem ist allgemeiner. Dort waren μ, ν beliebige reelle Zahlen.

Für definite Formen können wir nach Satz 3 stets die untere Grenze $\varphi = \varphi_1$ angeben. Dabei sind für die obigen Formen μ_1, ν_1 beide rational. Daher ist in imaginär quadratischen Zahlkörpern ein E. A. dann und nur dann vorhanden, wenn für die obigen Formen $\varphi < 1$ ist.

Für die reell quadratischen Zahlkörper können wir nur die folgende Aussage machen:

Falls für die obigen Formen $\varphi < 1$ ist, existiert der E. A., ebenso falls $\varphi = \varphi_1 = 1$ und in jedem der zugehörigen Zahlenpaare μ_1, ν_1 wenigstens

eine der Zahlen μ_1, ν_1 irrational ist. Sind dagegen in wenigstens einem Paar beide Zahlen μ_1, ν_1 rational, so ist für $\varphi_1 \geq 1$ kein E. A. vorhanden. Ist $\varphi_1 > 1$ und in jedem Paar wenigstens eine der Zahlen μ_1, ν_1 irrational, so bleibt die Frage offen, ebenso für $\varphi = \varphi_2 \geq 1$.

Für die obigen definiten Formen ergibt sich nach Satz 3, S. 667 mit $D = -d$ bzw. $D = 1 - 4n$:

$$\varphi(1; 0; d) = \varphi_1(1; 0; d) = \frac{1+d}{4}, \quad \left(\mu_1 \equiv \frac{1}{2}; \nu_1 \equiv \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi\left(1; \frac{1}{2}; n\right) = \varphi_1\left(1; \frac{1}{2}; n\right) = \frac{n^2}{4n-1}, \quad \left(\mu_1 \equiv \pm \frac{n}{4n-1}; \nu_1 \equiv \pm \frac{2n-1}{4n-1}\right).$$

Daher existiert in imaginär quadratischen Zahlkörpern ein E. A. nur für $D = -1, -2$ und für $D = -3, -7, -11$, wie schon Dickson¹¹⁾ bewiesen hat.

Für reell quadratische Zahlkörper ergibt sich aus den Tabellen von S. 683 und 684 die Existenz eines E. A. für

$$D = 2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 21, 33, 37, 41,$$

hingegen nicht in den Fällen $D = 11, 19, 29, 57$, in denen der E. A. existiert. Für Körper mit der Klassenzahl 1 ist nach der Tabelle ein E. A. nicht vorhanden in den Fällen $D = 14, 23, 38, 62$.

Bemerkenswert ist $D = 65$ mit $\varphi(1; \frac{1}{2}, -8) = \varphi_1 = 1$, $(\mu_1; \nu_1) \equiv (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ und der Klassenzahl 2.

Anmerkung. Die Frage nach der Existenz des E. A. im Körper $\mathfrak{R}(\sqrt{D})$ hat für $D \equiv 1 \pmod{4}$ zuerst (1934) Erik Berg¹²⁾ unter Benutzung der Untersuchungen von O. Perron¹³⁾, N. Hofreiter¹⁴⁾ und I. Schur¹⁵⁾ erledigt. Er beweist den Satz:

Wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$, dann ist in $\mathfrak{R}(\sqrt{D})$ ein Euklidischer Algorithmus nur vorhanden für $D = -2, -1, 2, 3, 6, 7, 11, 19$.

Für den Fall $D \equiv 1 \pmod{4}$ existieren bisher einige Teilergebnisse, so von O. Perron¹³⁾: Ein E. A. existiert für $D = 5, 13, 17, 21, 29$.

¹¹⁾ Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig 1927, S. 151. Der Beweis für pos. D ist falsch; vgl. Perron, Math. Annalen **107** (1933), S. 489.

¹²⁾ Über die Existenz eines Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. Kungl. Fysiografiska Sällskapet i Lund, Förhandlingar **5** (1935), Nr. 5, S. 54. Für $D = 31$ hat sich Berg auf die falsche Klassenzahl 3 berufen. In diesem Fall ist aber kein E. A. vorhanden, wie Oppenheim bewiesen hat [vgl. Fußnote ¹⁴⁾], so daß das Bergsche Ergebnis richtig bleibt.

¹³⁾ Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. Math. Annalen **107** (1933), S. 489—495.

¹⁴⁾ Quadratische Zahlkörper ohne euklidischen Algorithmus. Math. Annalen **110** (1935), S. 195—196.

¹⁵⁾ Fußnote von O. Perron, Math. Annalen **109** (1934), S. 351.

A. Oppenheim¹⁶⁾: Ein E. A. existiert außerdem für $D = 33, 37, 41$, hingegen nicht für $D = 53$.

N. Hofreiter¹⁷⁾: Ein E. A. existiert für $D = 57$ hingegen nicht für $D \equiv 21 \pmod{24}$, $D > 21$, ebenso nicht für $D = 77$.

H. Behrbohm und L. Rédei¹⁸⁾: Diese beweisen ebenfalls den Bergschen Satz und u. a. noch die Sätze:

1. In der Restklasse $D \equiv 5 \pmod{8}$ gibt es keine zusammengesetzten Zahlen derart, daß im Körper $\mathfrak{K}(\sqrt{D})$ der E. A. gilt, ausgenommen den Fall $D = 3p$; $p \equiv 3 \pmod{4}$.

2. In $\mathfrak{K}(\sqrt{D})$ mit $D \equiv 5 \pmod{24}$ existiert der E. A. nur für $D = 5$ oder $D = 29$.

¹⁶⁾ Quadratic fields with and without Euklids Algorithm. Math. Annalen **109** (1934), S. 349—352.

¹⁷⁾ Quadratische Zahlkörper mit und ohne Euklidischem Algorithmus. Mh. Math. Phys. **42**, S. 397—400.

¹⁸⁾ Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern. Journal für Math. **174** (1936), S. 192—205.

(Eingegangen am 21. Juni 1938.)

Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen.

Von

Erhard Schmidt, Berlin.

Einleitung.

In dieser Arbeit soll ein Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises und der Kugel im Raume von drei und n Dimensionen auseinander-gesetzt werden. Der Bereich der Vergleichskörper wird nicht durch die Forderung der Konvexität eingeschränkt. Denn der Verzicht auf diese Voraus-setzung drängt sich angesichts der Schwierigkeit auf, welcher im Raume von drei und mehr Dimensionen die Herstellung eines Verfahrens begegnet, um zu einem gegebenen nicht konvexen Körper einen konvexen von nicht größerer Oberfläche und nicht geringerem Volumen zu bestimmen.

Auch über die topologische Struktur der in Betracht gezogenen Körper und ihrer Oberflächen werden keinerlei Voraussetzungen gemacht.

Es wird im wesentlichen und kurz gesagt lediglich vorausgesetzt, daß die Berandung aller Dimensionenzahlen aus endlich vielen zweimal stetig dif-ferenzierbaren Stücken besteht.

Das Beweisverfahren folgt dem Wege, den H. A. Schwarz¹⁾ in seiner klassischen Abhandlung „Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens“ gewiesen hat.

Endlich darf noch auf die in den §§ 2 und 11 gegebenen Verschärfungen der isoperimetrischen Abschätzung hingewiesen werden, welche sich geo-metrisch als sehr einfach und anschaulich darstellen.

Herrn Dr. Lohan möchte ich für seine wertvolle Unterstützung bei der Darstellung meinen Dank aussprechen.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises	690
§ 2. Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene. . .	694
§ 3. Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper im Raume von n Dimensionen	696
§ 4. Vorbereitende Hilfssätze	709
§ 5. Über differenzierbare Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum	717

¹⁾ H. A. Schwarz, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. II. S. 327—340.

§ 6. Erklärung einer Klasse von Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum	723
§ 7. Einige Sätze aus der Theorie der mehrfachen Integrale	737
§ 8. Integrale über reguläre Mannigfaltigkeiten	743
§ 9. Beweis des Greenschen Lemmas im n -dimensionalen Raum und einige Anwendungen	764
§ 10. Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft für die Kugel im n -dimensionalen Raum	771
§ 11. Verschärfung der isoperimetrischen Abschätzung im n -dimensionalen Raum	779

§ 1.

Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Wir schicken zunächst folgendes voraus:

Es sei $x = x(s)$ eine stetige Funktion mit der Periode l . Die Ableitung x' sei mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Stellen bestimmt und stetig. $|x'|$ bleibe jedoch noch integrierbar. Das Maximum und das Minimum der Funktion $x(s)$ seien m_x und μ_x , und es sei

$$\frac{1}{2} (m_x - \mu_x) = \varrho_x > 0.$$

Man setze

$$(1) \quad \xi = \xi(s) = x(s) - \frac{m_x + \mu_x}{2}, \quad \xi' = \xi'(s) = \frac{d\xi}{ds} = x'.$$

Dann werden $\pm \varrho_x$ die Extrema der Funktion $\xi(s)$. Sie können natürlich beliebig oft erreicht werden. Man darf jedoch annehmen, daß etwa ist

$$(2) \quad \xi(0) = \varrho_x, \quad \xi(\sigma) = -\varrho_x \quad (0 < \sigma < l).$$

Man betrachte nun den Halbkreis

$$(3) \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho_x^2, \quad \eta \geq 0.$$

Der Flächeninhalt $\frac{\pi}{2} \varrho_x^2$ dieses Halbkreises gestattet wegen (2) die folgenden beiden Darstellungen

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} \varrho_x^2 = \int_{\sigma}^0 \eta \cdot \frac{d\xi}{ds} ds, \quad \frac{\pi}{2} \varrho_x^2 = \int_{\sigma}^l \eta \cdot \frac{d\xi}{ds} ds,$$

$$(5) \quad \frac{\pi}{2} \varrho_x^2 \leq \int_0^{\sigma} \eta \cdot \left| \frac{d\xi}{ds} \right| ds, \quad \frac{\pi}{2} \varrho_x^2 \leq \int_{\sigma}^l \eta \cdot \left| \frac{d\xi}{ds} \right| ds.$$

Die Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt wegen (1)

$$(6) \quad \pi \varrho_x^2 \leq \int_0^l \eta \cdot |x'| ds.$$

Nach dieser Vorbereitung kommen wir zur isoperimetrischen Aufgabe.

Es seien $x = x(s)$, $y = y(s)$ die laufenden Koordinaten einer geschlossenen einfachen Kurve C als Funktionen ihrer Bogenlänge. Die Länge der Kurve sei l , also $x(s)$ und $y(s)$ periodische Funktionen mit der Periode l . Die Ableitungen x' und y' seien mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Stellen bestimmt und stetig. Es gilt also

$$(7) \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Es bezeichne J den von der Kurve C umschlossenen Flächeninhalt. Dann ist, wenn die Kurve C so durchlaufen wird, daß die äußere Normale zur Durchlaufungsrichtung so liegt wie die positive X -Achse zur positiven Y -Achse,

$$(8) \quad J = \int_0^l x y' ds = \int_0^l \xi y' ds.$$

Nun ist das innere Produkt des Vektors, dessen erste Komponente ξ , zweite η und Länge ϱ_x ist, mit dem Einheitsvektor, dessen erste Komponente y' und zweite $|x'|$ ist, nicht größer als das Produkt der Längen der beiden Vektoren, d. h. es ist

$$(9) \quad \xi y' + \eta |x'| \leq \varrho_x,$$

$$(10) \quad \xi y' \leq \varrho_x - \eta |x'|.$$

Aus (8) und (10) folgt

$$(11) \quad J \leq \int_0^l (\varrho_x - \eta |x'|) ds = \varrho_x l - \int_0^l \eta |x'| ds,$$

also ist wegen (6)

$$(12)^2) \quad J \leq \varrho_x l - \pi \varrho_x^2 = \frac{l^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho_x \right)^2,$$

$$(13) \quad J \leq \frac{l^2}{4\pi}.$$

Es sei noch auf das Folgende hingewiesen. $x(s)$ und $y(s)$ sind Funktionen von beschränkter Schwankung. Der obige Beweis wird daher von jeder Differenzierbarkeitsvoraussetzung befreit, wenn man durchweg anstatt

²⁾ Diese Ungleichung ist auch in einer für ebene konvexe Bereiche gültigen Identität von Santaló enthalten, zu welcher er mit den Methoden der Integralgeometrie gelangt. (Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Heft I, Leipzig 1935, S. 26.)

des Riemannschen Integrals das Stieltjessche benutzt, in dem unter den Integralzeichen die Ausdrücke

$$\frac{d\xi}{ds} ds, \quad \left| \frac{d\xi}{ds} \right| ds, \quad |x'| ds, \quad y' ds$$

ersetzt werden durch

$$d\xi(s), \quad |d\xi(s)|, \quad |dx(s)|, \quad dy(s).$$

Der Beweis bleibt dabei ohne jede Änderung bestehen, nur treten an die Stelle von (9) und (10) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \xi \Delta y + \eta |\Delta x| &\leq \varrho_x \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y} \leq \varrho_x \Delta s, \\ \xi \Delta y &\leq \varrho_x \Delta s - \eta |\Delta x|. \end{aligned}$$

Jetzt soll noch bewiesen werden, daß der *Kreis die einzige Figur* ist, für welche in der isoperimetrischen Ungleichung (13) das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis. Das Gleichheitszeichen in (13) fordert a fortiori das Gleichheitszeichen in (12) und dieses das Gleichheitszeichen in (10) und (9). Letzteres bedingt aber

$$(14) \quad \xi : y' = \eta : |x'| = \varrho_x : 1.$$

Mithin ist

$$(15) \quad y'^2 = \frac{1}{\varrho_x^2} \cdot \xi^2 = \frac{1}{\varrho_x^2} \left(x - \frac{m_x + \mu_x}{2} \right)^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$(16) \quad x'^2 = \frac{1}{\varrho_y^2} \left(y - \frac{m_y + \mu_y}{2} \right)^2,$$

wobei m_y und μ_y das Maximum und das Minimum von $y(s)$ bedeuten und

$$\varrho_y = \frac{m_y - \mu_y}{2} > 0$$

ist. Die Addition von (15) und (16) ergibt

$$(17) \quad \frac{1}{\varrho_x^2} \left(x - \frac{m_x + \mu_x}{2} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_y^2} \left(y - \frac{m_y + \mu_y}{2} \right)^2 = 1.$$

Nun folgt aus der Ungleichung (12) und der ihr entsprechenden Ungleichung

$$(18) \quad J \leq \frac{l^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho_y \right)^2,$$

$$\varrho_x = \varrho_y = \frac{l}{2\pi}$$

Also zeigt (17), daß die Kurve ein Kreis ist, w. z. b. w.

Da $2\varrho_x$ die Breite eines der Kurve C umschriebenen Parallelstreifens bedeutet, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, daß die Y -Achse dem Streifen parallel wird, so hat die Ungleichung (12) ein gewisses selbständiges

Interesse, indem sie eine Schranke für den Inhalt gibt, wenn der Umfang und eine Breite vorgeschrieben sind.

Die durch die Ungleichung (12) gegebene Abschätzung bei festem ϱ_x und l kann für $2\varrho_x \leq \frac{l}{\pi}$ nicht verschärft werden. Denn ersetzt man in einem den Koordinatenachsen parallel orientierten Rechteck mit den Seiten $2\varrho_x$ und $\gamma = \frac{1}{2}l - \pi\varrho_x$ die der X -Achse parallelen Seiten $2\varrho_x$ durch auf diesen als Durchmesser ruhende, nach außen gewandte Halbkreise mit dem Radius ϱ_x , so ergibt sich eine Figur mit dem vorgeschriebenen Umfang l und der vorgeschriebenen Breite $2\varrho_x$. Dabei wird

$$l = 2\pi\varrho_x + 2\gamma,$$

$$J = \pi\varrho_x^2 + 2\varrho_x\gamma$$

und es gilt mithin in der Ungleichung (12) das Gleichheitszeichen.

Der Beweis dafür, daß diese Figur die einzige ist, für welche in der Ungleichung (12) das Gleichheitszeichen besteht, ist an Hand des Beweisganges für (12) trivial und bedarf an dieser Stelle um so weniger einer Ausführung, als der § 3 II durchgeführte Beweis für den entsprechenden Satz bei Rotationskörpern ganz ähnlich verläuft.

Für den Fall $2\varrho_x > \frac{l}{\pi}$ liefert die Ungleichung (12) bei vorgeschriebenem l und ϱ_x nicht die genaue Schranke für den Inhalt. Diese kann folgendermaßen ermittelt werden:

Es sei $2\varrho_x \geq \frac{l}{\pi}$ und α^* der Radius desjenigen Kreises, bei welchem der zur Sehne $2\varrho_x$ gehörige kleinere Bogen die Länge $\frac{l}{2}$ hat. Verdoppelt man das zu diesem Bogen gehörige Kreissegment durch Spiegelung an der Sehne, so erhält man eine Figur vom Umfang l und der Breite $2\varrho_x$. Diese und nur diese Figur liefert bei vorgeschriebenem l und ϱ_x das Maximum des Inhalts. Der doppelte Inhalt des von der Sehne $2\varrho_x$ und dem Bogen l gebildeten Kreissegments als Funktion von l und ϱ_x betrachtet, liefert also die genaue Schranke. Der äußerst einfache Beweis kann an dieser Stelle unterdrückt werden, da er ganz analog dem in § 3 III durchgeführten Beweise der entsprechenden Sätze für Rotationskörper im Raume von n Dimensionen verläuft.

Bezeichnet endlich $2\varrho'$ die kleinste und $2\varrho''$ die größte Breite der Kurve C , so gelten gemäß (12) die Ungleichungen

$$(20) \quad J \leq \frac{l^3}{4\pi} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho' \right)^2, \quad J \leq \frac{l^3}{4\pi} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho'' \right)^2.$$

Nun ist

$$2\varrho'' - 2\varrho' = \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho' \right) - \left(\frac{l}{\pi} - 2\varrho'' \right) \leq \left| \frac{l}{\pi} - 2\varrho' \right| + \left| \frac{l}{\pi} - 2\varrho'' \right|,$$

$$\varrho'' - \varrho' \leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{l}{\pi} - 2\varrho' \right| + \left| \frac{l}{\pi} - 2\varrho'' \right| \right).$$

Also ist $\varrho'' - \varrho'$ nicht größer als der größere der beiden Summanden in der Klammer auf der rechten Seite, und es ergibt sich aus der entsprechenden Ungleichung (20) a fortiori

$$J \leq \frac{l^2}{4\pi} - \frac{\pi}{16} (2\varrho'' - 2\varrho')^2.$$

Das ist die Ungleichung von Bonnesen³⁾.

§ 2.

Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene.

Die isoperimetrische Ungleichung läßt sich auch folgendermaßen verschärfen:

$$(21) \quad J^2 \leq \left(\frac{l^2}{4\pi}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} - \vartheta^2\right)^2 - \frac{l^2}{4} \overline{MS}^2 - \frac{1}{4} (r_2^2 - r_1^2)^2.$$

Hierbei bedeuten S den Schwerpunkt der Kurve, r_1 und r_2 ihre kleinste und größte Entfernung vom Schwerpunkt, M den Mittelpunkt eines beliebigen, der Kurve umschriebenen Rechtecks und ϑ seine halbe Diagonale. $\frac{1}{2} \frac{l^2}{\pi^2} - \vartheta^2$ ist also die Differenz des Quadrats der halben Diagonale des umschriebenen Rechtecks und des Quadrats der halben Diagonale des dem Vergleichskreise vom Umfang l umschriebenen Quadrats. Diese Ungleichung enthält den Isoperimetriesatz und wegen des letzten Gliedes auf ihrer rechten Seite auch den Satz, daß das Gleichheitszeichen nur für den Kreis erreicht wird.

Beweis. Setzt man

$$\xi^* = y - \frac{m_y + \mu_y}{2}, \quad \eta^* = + \sqrt{\varrho_y^2 - \xi^{*2}},$$

so gilt zunächst die der Ungleichung (6) entsprechende Ungleichung

$$\pi \varrho_y^2 \leq \int_0^l \eta^* \cdot |y'| ds.$$

Durch Addition mit der Ungleichung (6) ergibt sich

$$\pi (\varrho_x^2 + \varrho_y^2) \leq \int_0^l (\eta \cdot |x'| + \eta^* \cdot |y'|) ds,$$

also gemäß der Schwarzschen Ungleichung nach Multiplikation mit $\frac{1}{4}$

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} (\varrho_x^2 + \varrho_y^2)^2 &\leq \frac{1}{4} \int_0^l 1 \cdot ds \int_0^l (\eta \cdot |x'| + \eta^* \cdot |y'|)^2 ds \\ &= \frac{l}{4} \int_0^l (\eta \cdot |x'| + \eta^* \cdot |y'|)^2 ds. \end{aligned}$$

³⁾ T. Bonnesen, Problèmes des Isopérimètres, Paris 1929, S. 67.

Nun ist

$$J = \int_0^l \frac{xy' - yx'}{2} ds,$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(23) \quad J^2 \leq l \int_0^l \left(\frac{xy' - yx'}{2} \right)^2 ds.$$

Ferner gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} (xy' - yx')^2 + (xx' + yy')^2 &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = x^2 + y^2 \\ (\eta \cdot |x'| + \eta^* \cdot |y'|)^2 + (\eta \cdot |y'| - \eta^* \cdot |x'|)^2 &= (\eta^2 + \eta^{*2})(x'^2 + y'^2) \\ &= \varrho_x^2 + \varrho_y^2 - \xi^2 - \xi^{*2} = \varrho_x^2 + \varrho_y^2 - \left(x - \frac{m_x + \mu_x}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{m_y + \mu_y}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt, wenn r die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt bedeutet,

$$\begin{aligned} (24) \quad (xy' - yx')^2 + (\eta \cdot |x'| + \eta^* \cdot |y'|)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dr^2}{ds} \right)^2 \\ \leq \varrho_x^2 + \varrho_y^2 - \left\{ \left(\frac{m_x + \mu_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_y + \mu_y}{2} \right)^2 \right\} + (m_x + \mu_x)x + (m_y + \mu_y)y. \end{aligned}$$

Jetzt denke man sich den Schwerpunkt S der Kurve zum Koordinatenanfangspunkt gewählt. Dann ist zunächst

$$\int_0^l x ds = \int_0^l y ds = 0.$$

Es bezeichne ferner M den Mittelpunkt des achsenparallelen, der Kurve umschriebenen Rechtecks und ϑ seine halbe Diagonale. Dann gilt

$$\left(\frac{m_x + \mu_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_y + \mu_y}{2} \right)^2 = \overline{MS}^2, \quad \varrho_x^2 + \varrho_y^2 = \vartheta^2.$$

Multipliziert man jetzt die Ungleichung (24) mit $\frac{l}{4}$ und integriert, so ergibt sich bei Einführung von (22) und (23):

$$J^2 + \pi^2 \frac{\vartheta^4}{4} + \frac{l}{16} \int_0^l \left(\frac{dr^2}{ds} \right)^2 ds \leq l^2 \frac{\vartheta^2}{4} - \frac{1}{4} l^2 \overline{MS}^2,$$

$$J^2 \leq \frac{1}{4} (l^2 \vartheta^2 - \pi^2 \vartheta^4) - \frac{1}{4} l^2 \overline{MS}^2 - \frac{l}{16} \int_0^l \left(\frac{dr^2}{ds} \right)^2 ds,$$

$$(25) \quad J^2 \leq \left(\frac{l^2}{4\pi} \right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\pi^2} - \vartheta^2 \right)^2 - \frac{1}{4} l^2 \overline{MS}^2 - \frac{l}{16} \int_0^l \left(\frac{dr^2}{ds} \right)^2 ds.$$

Es sei nun r_1 die kleinste und r_2 die größte Entfernung der Kurve von ihrem Schwerpunkt. Man kann annehmen, daß für $s = 0$ $r = r_1$ und $s = s_2$ $r = r_2$ wird ($0 < s_2 < l$).

Dann ist

$$\begin{aligned} r_2^2 - r_1^2 &= \int_0^{s_2} \frac{dr^2}{ds} ds, \quad (r_2^2 - r_1^2)^2 \leq \int_0^{s_2} 1 \cdot ds \int_0^{s_2} \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds \leq s_2 \int_0^{s_2} \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds, \\ r_1^2 - r_2^2 &= \int_{s_2}^l \frac{dr^2}{ds} ds, \quad (r_1^2 - r_2^2)^2 \leq (l - s_2) \int_{s_2}^l \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds, \\ \int_0^{s_2} \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds &\geq \frac{1}{s_2} (r_2^2 - r_1^2)^2, \quad \int_{s_2}^l \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds \geq \frac{1}{l - s_2} (r_1^2 - r_2^2)^2, \\ \int_0^l \left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 ds &\geq (r_2^2 - r_1^2)^2 \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{l - s_2}\right) \geq \frac{4}{l} (r_2^2 - r_1^2)^2. \end{aligned}$$

Führt man diese Ungleichung in (25) ein, so ergibt sich die Ungleichung (21), w. z. b. w.

§ 3.

Die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper im Raum von n Dimensionen.

I. Es bezeichne E_n das Volumen der Einheitskugel im n -dimensionalen Raum. Dann ist ihre Oberfläche $n E_n$ und $E_n R^n$, $n E_n R^{n-1}$ geben das Volumen und die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R an.

Es seien nun $z = z(s)$, $r = r(s)$ die laufenden rechtwinkligen Koordinaten einer einfachen ebenen Kurve C als Funktionen der Bogenlänge. Die Kurve verlaufe ganz in der Halbebene $r \geq 0$ und treffe die Z -Achse nur in zwei Punkten, ihrem Anfangs- und Endpunkt, die auch zusammenfallen können. Die Ableitungen z' und r' seien bestimmt und stetig mit höchstens endlich vielen Ausnahmestellen. Das Maximum von $r(s)$ sei ϱ und es sei $s = \sigma$ die erste Stelle, wo dieser Wert angenommen wird. Dann ist, wenn l die Länge der Kurve bedeutet,

$$(26) \quad r(0) = 0, \quad r(\sigma) = \varrho, \quad r(l) = 0 \quad \text{und für } 0 < s < \sigma, \quad 0 < r(s) < \varrho.$$

Es sei nun K ein Rotationskörper im n -dimensionalen Raum $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$, dessen Oberfläche O durch die Gleichungen gegeben ist:

$$(27) \quad z = z(s), \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = r(s)^2, \quad 0 \leq s \leq l.$$

Die inneren Punkte des Rotationskörpers K sind also durch die Gleichungen gegeben:

$$z = z_i, \quad \sum_1^{n-1} x_v^2 = r_i^2.$$

wobei der Punkt (z_i, r_i) in der (z, r) -Ebene alle inneren Punkte des von der Kurve C und der Z -Achse umschlossenen Gebiets durchläuft. Es sei ferner noch hervorgehoben, daß die über die Kurve C gemachten Annahmen die Voraussetzung enthalten, daß der Rotationskörper K mit der Rotationsachse mindestens einen Punkt gemein hat. Nur auf solche Rotationskörper beziehen sich also die nachfolgenden Entwicklungen.

Es bezeichne O_1 denjenigen Teil der Oberfläche, für welchen $0 \leq s \leq \sigma$ ist, und O_2 denjenigen, für welchen $\sigma \leq s \leq l$ ist.

Man betrachte jetzt die Halbkugel

$$\sum_1^{n-1} x_v^2 + \zeta^2 = \varrho^2, \quad \zeta \geq 0.$$

Ihr Volumen V_0 gestattet dann die folgenden beiden Abschätzungen:

$$(28) \quad V_0 = \frac{1}{2} E_n \varrho^n \leq \int_{O_1} \xi |\cos(Nz)| d\omega,$$

$$(29) \quad V_0 = \frac{1}{2} E_n \varrho^n \leq \int_{O_2} \zeta |\cos(Nz)| d\omega,$$

wobei $d\omega$ das Flächenelement des Rotationskörpers K bedeutet und N die zugehörige Richtung der äußeren Normale. Durch Addition folgt

$$(30) \quad E_n \varrho^n \leq \int_0 \zeta |\cos(Nz)| d\omega.$$

Für das Volumen V des Körpers K hat man die $n-1$ Darstellungen

$$V = \int_0 x_v \cos(Nx_v) d\omega, \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Durch Addition folgt

$$(31) \quad V = \frac{1}{n-1} \int_0 \sum_1^{n-1} x_v \cos(Nx_v) d\omega.$$

Nun ist das innere Produkt des Vektors mit den Komponenten $x_1, \dots, x_{n-1}$, ζ und der Länge ϱ mit dem Einheitsvektor mit den Komponenten

$$\cos(Nx_1), \dots, \cos(Nx_{n-1}), |\cos(Nz)|$$

nicht größer als das Produkt der Längen dieser beiden Vektoren, d. h. es ist

$$(32) \quad \sum_1^{n-1} x_v \cos(Nx_v) + \zeta |\cos(Nz)| \leq \varrho,$$

$$\sum_1^{n-1} x_v \cos(Nx_v) \leq \varrho - \zeta |\cos(Nz)|.$$

Die Einführung dieses Resultats in die Gleichung (31) ergibt

$$V \leq \frac{1}{n-1} \int_0 (\varrho - \zeta |\cos(Nz)|) d\omega = \frac{1}{n-1} \left(\varrho \cdot |O| - \int_0 \zeta |\cos(Nz)| d\omega \right),$$

wobei $|O|$ den Flächeninhalt von O bedeuten soll.

Hieraus folgt wegen (30)

$$(33) \quad V \leq \frac{1}{n-1} (|O| \varrho - E_n \varrho^n).$$

Nun erreicht die Funktion

$$\frac{1}{n-1} (|O| \cdot t - E_n t^n)$$

bei festem $|O|$ für $t \geq 0$ ihr Maximum M an der Stelle $t = P$, wobei

$$n E_n P^{n-1} = |O|$$

ist, also P den Radius der sogenannten *Vergleichskugel*, d. h. der Kugel mit dem Oberflächeninhalt $|O|$ bedeutet. Man erhält

$$M = \frac{1}{n-1} (n E_n P^{n-1} \cdot P - E_n P^n) = E_n P^n = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{E_n^{\frac{1}{n-1}}} \cdot |O|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Also ergibt (33)

$$(34) \quad V \leq \frac{1}{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{E_n^{\frac{1}{n-1}}} \cdot |O|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Das ist die isoperimetrische Ungleichung.

Daß die Kugel der einzige Rotationskörper ist, für welchen das Gleichheitszeichen gilt, findet am Schluß von II seinen Beweis.

II. Die Ungleichung (33) hat ein gewisses selbständiges Interesse, indem sie eine Abschätzung des Volumens des Rotationskörpers gibt bei vorgeschriebener Oberfläche und vorgeschriebenem Radius ϱ des größten „Breitenkreises“ (eigentlich der größten $(n-1)$ -dimensionalen „Breitenkugel“).

Wir wollen jetzt feststellen, wann in der Ungleichung (33) das Gleichheitszeichen stehen kann.

Das Gleichheitszeichen in (33) fordert zunächst auch das Gleichheitszeichen in (30) und mithin auch in (28) und (29). Hieraus folgt, daß die Projektion von O_1 auf die $(n-1)$ -dimensionale Ebene $z=0$ die $(n-1)$ -dimensionale Kugel $\sum_{r=1}^{n-1} x_r^2 = \varrho^2$ überall nur einmal bedeckt. Dasselbe muß für die

Projektion von O_2 gelten. Ist also $s = \sigma'$ die letzte Stelle, für welche $r(s)$ den Maximalwert ϱ annimmt, so muß gelten:

$$\begin{aligned}
 & r(0) = 0 \\
 (36) \quad & \begin{array}{lll} \text{für } (0 < s < \sigma) & 0 < r(s) < \varrho & r'(s) \geq 0, \\ \text{für } (\sigma < s < \sigma') & r(s) \equiv \varrho & r'(s) = 0, \\ \text{für } (\sigma' < s < l) & \varrho > r(s) > 0 & r'(s) \leq 0, \end{array} \\
 & r(l) = 0.
 \end{aligned}$$

Nun liegt die äußere Normale N in einem Punkt der Oberfläche unseres Rotationskörpers in der zweidimensionalen durch diesen Punkt und durch die Z -Achse gehenden Meridianebene, und zwar senkrecht auf der Meridiankurve $z = z(s)$, $r = r(s)$. Denkt man sich die Kurve C so durchlaufen, daß die äußere Normale in bezug auf das von ihr und der Z -Achse umschlossene Gebiet zur Durchlaufungsrichtung so liegt, wie die Richtung der positiven r -Achse zur Richtung der positiven Z -Achse, so hat man zunächst wegen $z'^2 + r'^2 = 1$

$$(37) \quad z' = \frac{dz}{ds} = \cos(Nr).$$

Diese Gleichung gilt natürlich nur mit Ausnahme der höchstens endlich vielen Stellen, an welchen z' und r' nicht beide bestimmt und stetig sind.

Das Gleichheitszeichen in (33) fordert ferner auch das Gleichheitszeichen in (32) und dieses fordert bekanntlich das Bestehen der Gleichungen

$$(39) \quad x_r = \varrho \cos(Nx_r), \quad \zeta = \varrho |\cos(Nz)|, \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Nun ist

$$(40) \quad z' = \cos(Nr) = \sum_1^{n-1} \cos(rx_r) \cos(Nx_r) = \sum_1^{n-1} \frac{x_r}{r} \frac{x_r}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}.$$

Hieraus folgt

$$(41) \quad r' = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varrho^2}},$$

wobei auf der rechten Seite wegen (36) für $0 < s < \sigma$ das positive und für $\sigma' < s < l$ das negative Vorzeichen gilt. Die Gleichungen (40) und (41) sichern wegen der Stetigkeit von $r(s)$, der Festlegung des Vorzeichens der Quadratwurzel in (41) und wegen ihres Verschwindens an den Stellen σ und σ' die ausnahmslose Bestimmtheit und Stetigkeit von z' und r' . Wegen $r(0) = 0$ folgt also für $0 \leq s \leq \sigma$

$$r(s) = \varrho \sin \frac{s}{\varrho}.$$

Wegen $r(\sigma) = \varrho$ ergibt sich $\sigma = \frac{\pi}{2} \cdot \varrho$.

Ebenso folgt bei Berücksichtigung der Gleichung $r(\sigma') = \varrho$

$$\text{für } \sigma' \leq s \leq l$$

$$r(s) = \varrho \cdot \cos \frac{s - \sigma'}{\varrho}$$

und wegen $r(l) = 0$

$$l = \sigma' + \frac{\pi}{2} \varrho.$$

Wegen (40) folgt jetzt bei Berücksichtigung von (36), wenn der Koordinatenanfangspunkt so gewählt wird, daß $z(0) = -\varrho$ wird,

$$\text{für } 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2} \varrho, \quad r = \varrho \sin \frac{s}{\varrho}, \quad z = -\varrho \cos \frac{s}{\varrho},$$

$$\text{für } \frac{\pi}{2} \varrho \leq s \leq \sigma', \quad r \equiv \varrho, \quad z = s - \frac{\pi}{2} \varrho,$$

$$\begin{aligned} \text{für } \sigma' \leq s \leq l = \sigma' + \frac{\pi}{2} \varrho, \quad r &= \varrho \cos \frac{s - \sigma'}{\varrho}, \quad z = \varrho \sin \frac{s - \sigma'}{\varrho} + z(\sigma') \\ &= \varrho \sin \frac{s - \sigma'}{\varrho} + \sigma' - \frac{\pi}{2} \varrho. \end{aligned}$$

Wenn also in der Ungleichung (33) das Gleichheitszeichen gelten soll, so muß die Kurve C folgende Gestalt haben: Sie besteht aus einem Viertel-Kreisbogen mit dem Mittelpunkt ($z = 0, r = 0$) und dem Radius ϱ , der vom Punkte ($z = -\varrho, r = 0$) zum Punkte ($z = 0, r = \varrho$) führt, einem der Z -Achse parallelen Geradenstück von der Länge $\gamma = \sigma' - \frac{\pi}{2} \varrho \geq 0$, das vom Punkte ($z = 0, r = \varrho$) zum Punkte ($z = \gamma, r = \varrho$) führt und einem zweiten Viertel-Kreisbogen mit dem Mittelpunkt ($z = \gamma, r = 0$) und dem Radius ϱ , der vom Punkte ($z = \gamma, r = \varrho$) zum Punkte ($z = \gamma + \varrho, r = 0$) führt. Für den entsprechenden Rotationskörper erhält man

$$\begin{aligned} V &= E_n \varrho^n + E_{n-1} \varrho^{n-1} \cdot \gamma, \\ |O| &= n E_n \varrho^{n-1} + (n-1) E_{n-1} \varrho^{n-2} \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Es gilt also in der Ungleichung (33) in der Tat das Gleichheitszeichen. Nun ergibt sich für γ die Gleichung

$$\gamma = \frac{|O| - n E_n \varrho^{n-1}}{(n-1) E_{n-1} \varrho^{n-2}} = \frac{n E_n (P^{n-1} - \varrho^{n-1})}{(n-1) E_{n-1} \varrho^{n-2}}.$$

Die Figur existiert mithin nur für $\varrho \leq P$. Damit haben wir also bewiesen:

Für $\varrho \leq P$ gilt in der Ungleichung (33) das Gleichheitszeichen *nur* für die angegebene Figur. *Darin ist auch der Beweis dafür enthalten, daß in der isoperimetrischen Ungleichung (34), welche ja dem Fall $\varrho = P, \gamma = 0$ entspricht, das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt.*

III. Im vorigen Abschnitt II ist bewiesen worden, daß die Ungleichung (33) als Abschätzung des Volumens eines Rotationskörpers bei vorgeschriebenem

Oberflächeninhalt $|O|$ und vorgeschriebenem Maximum ϱ des Radius seiner Breitenkugel im Falle $\varrho \leq P$ nicht verbessert werden kann, mit anderen Worten, daß sie die genaue Schranke liefert. In diesem Abschnitt soll auch für den Fall $\varrho > P$ die genaue Schranke ermittelt werden. Diese ist kleiner als die durch die Ungleichung (33) gegebene, erweist sich aber trotz ihrer ganz elementaren und einfachen geometrischen Darstellung in ihrem analytischen Ausdruck als wesentlich komplizierter.

Es bezeichne K'_a die durch die Gleichung

$$(1') \quad \sum_1^{n-1} x_v^2 + \zeta^2 = a^2$$

gegebene Kugel, $|K'_a|$ ihr Volumen, O'_a ihre Oberfläche, $|O'_a|$ deren Flächeninhalt. Es bezeichne ferner für $a \geq \varrho$ $K'_{a,\varrho}$ und $O'_{a,\varrho}$ denjenigen Teil der Kugel und denjenigen Teil ihrer Oberfläche, für welchen

$$(2') \quad \zeta \geq +\sqrt{a^2 - \varrho^2}$$

ist. Dementsprechend bezeichne $|K'_{a,\varrho}|$ das Volumen von $K'_{a,\varrho}$, $|O'_{a,\varrho}|$ den Flächeninhalt von $O'_{a,\varrho}$; ferner bezeichne $S'_{a,\varrho}$ den zu $O'_{a,\varrho}$ gehörigen Sektor und $|S'_{a,\varrho}|$ sein Volumen. Dann ist zunächst

$$|S'_{a,\varrho}| = \frac{a}{n} |O'_{a,\varrho}|$$

$$(3') \quad |K'_{a,\varrho}| = \frac{a}{n} |O'_{a,\varrho}| - \frac{1}{n} E_{n-1} \varrho^{n-1} \sqrt{a^2 - \varrho^2}.$$

Andererseits ist, wenn $\zeta \geq 0$ durch (1') bestimmt wird,

$$(5') \quad |K'_{a,\varrho}| = \int_{\sum_1^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} - E_{n-1} \varrho^{n-1} \sqrt{a^2 - \varrho^2}.$$

Die Subtraktion dieser Gleichung von der mit n multiplizierten Gleichung

(3') ergibt

$$(6') \quad (n-1) |K'_{a,\varrho}| = a \cdot |O'_{a,\varrho}| - \int_{\sum_1^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Man bezeichne nun mit $K''_{a,\varrho}$ den Rotationskörper, der aus der Kugelkalotte $K'_{a,\varrho}$ entsteht, indem man sie durch Spiegelung an der Schnittebene verdoppelt. Dementsprechend bezeichne man mit $|K''_{a,\varrho}|$ das Volumen von $K''_{a,\varrho}$, mit $O''_{a,\varrho}$ die Oberfläche und mit $|O''_{a,\varrho}|$ deren Flächeninhalt.

Dann ist

$$(7') \quad |K''_{a,\varrho}| = 2 \cdot |K'_{a,\varrho}|, \quad |O''_{a,\varrho}| = 2 |O'_{a,\varrho}|.$$

Also ist wegen (6')

$$(8') \quad |K''_{a,\varrho}| = \frac{1}{n-1} \left\{ a \cdot |O''_{a,\varrho}| - 2 \int_{\sum_1^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} \right\}.$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von I und der Voraussetzung $a \geq \varrho$ gilt nun offenbar, wenn ζ der Gleichung (1') genügt und größer oder gleich Null bleibt, entsprechend (28), (29):

$$\begin{aligned} \int_{\sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} &\leq \int_{O_1} \zeta \cdot |\cos(Nz)| d\omega, \\ \int_{\sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} &\leq \int_{O_2} \zeta \cdot |\cos(Nz)| d\omega, \\ (9') \quad \int_{\sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} &\leq \int_O \zeta \cdot |\cos(Nz)| d\omega. \end{aligned}$$

Ferner ist entsprechend (32)

$$\sum_{v=1}^{n-1} x_v \cos(Nx_v) \leq a - \zeta \cdot |\cos(Nz)|.$$

Wegen (31) ist daher

$$V = \frac{1}{n-1} \int_O \sum_{v=1}^{n-1} x_v \cos(Nx_v) d\omega \leq \frac{1}{n-1} (a \cdot |O| - \int_O \zeta \cdot |\cos(Nz)| d\omega).$$

Hieraus folgt wegen (9')

$$(10') \quad V \leq \frac{1}{n-1} (a \cdot |O| - 2 \int_{\sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1}) = \Phi(a, |O|, \varrho).$$

Man wähle nun, was im Falle $\varrho \geq P$, wie nachher gezeigt werden wird, stets möglich ist, a^* so, daß

$$|O'_{a^*, \varrho}| = |O|$$

wird. Dann ergibt sich wegen (8')

$$(11') \quad V \leq |K'_{a^*, \varrho}|.$$

Damit ist bewiesen, daß bei vorgeschriebenem Oberflächeninhalt $|O|$ und vorgeschriebenem Maximum ϱ des Radius der Breitenkugel im Falle $\varrho \geq P$ kein Rotationskörper ein größeres Volumen hat als die durch Spiegelung an der Schnittebene verdoppelte Kugelkalotte $K'_{a^*, \varrho}$.

Es erübrigt noch zu zeigen, daß für $\varrho \geq P$ die zur Bestimmung von a^* dienende Gleichung

$$(12') \quad |O'_{a^*, \varrho}| = |O|, \quad \text{also} \quad |O'_{a^*, \varrho}| = \frac{1}{2} |O|$$

eine Lösung $a^* \geq \varrho$ besitzt.

Man erhält

$$|O'_{a, \varrho}| = \int_{\sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \varrho^2} \frac{1}{\cos(\bar{N}\zeta)} dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad \zeta \geq 0,$$

wobei $\bar{N}$ die äußere Normalenrichtung auf der Kugel (1') bedeutet. Es ist also

$$\cos(\bar{N}, \zeta) = \frac{\zeta}{a} = \frac{+\sqrt{a^2 - r^2}}{a}, \quad r^2 = \sum_1^{n-1} x_v^2.$$

Daher ist

$$(13') \quad |O'_{a, \varrho}| = \int_{r \leq \varrho} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad \zeta \geq 0.$$

Nun ist definitionsmäßig für $a = \varrho$ $|O'_{a, \varrho}|$ gleich dem Oberflächeninhalt der n -dimensionalen Halbkugel mit dem Radius ϱ , d. h. es ist

$$(14') \quad \begin{cases} |O'_{\varrho, \varrho}| = \frac{n}{2} E_n \varrho^{n-1} \geq \frac{n}{2} E_n P^{n-1} = \frac{1}{2} |O|, \\ |O'_{\varrho, \varrho}| \geq \frac{1}{2} |O|. \end{cases}$$

Ferner folgt aus der Darstellung (13'), daß $|O'_{a, \varrho}|$ für $a \geq \varrho$ mit wachsendem a monoton stetig abnimmt, und daß

$$(15') \quad \lim_{a \rightarrow \infty} |O'_{a, \varrho}| = E_{n-1} \varrho^{n-1}$$

ist. Da nun offenbar

$$(16') \quad \frac{1}{2} |O| > E_{n-1} \varrho^{n-1}$$

sein muß, so folgt aus (14'), (15'), daß die Gleichung (12') eine, und zwar nur eine Lösung $a^* \geq \varrho$ besitzt, w. z. b. w.

Nun ist

$$(17') \quad |K''_{a^*, \varrho}| = \Phi(a^*, |O|, \varrho),$$

wobei die Funktion auf der rechten Seite durch (10') definiert ist, während a^* sich vermöge (12') als Funktion von $|O|$ und ϱ darstellt. Also ergibt sich $|K''_{a^*, \varrho}|$ als Funktion von $|O|$ und ϱ :

$$(18') \quad |K''_{a^*, \varrho}| = \Gamma(|O|, \varrho).$$

Im folgenden soll der Verlauf dieser Funktion diskutiert werden.

Zunächst ergibt die Ausführung der partiellen Differentiation nach a in (10') bei Berücksichtigung von (2') und (13')

$$(19') \quad \Phi_a(a, |O|, \varrho) = \frac{1}{n-1} (|O| - 2|O'_{a, \varrho}|).$$

Also ist wegen (14')

$$(20') \quad \Phi_a(a, |O|, \varrho) < 0 \quad \text{für} \quad \varrho \leq a < a^*,$$

$$(21') \quad \Phi_a(a^*, |O|, \varrho) = 0.$$

Gemäß (10'), (2') wird

$$(22') \quad \Phi(\varrho, |O|, \varrho) = \frac{1}{n-1} (|O| \varrho - E_n \varrho^n).$$

Aus (17'), (20'), (18') folgt für $\varrho > P$

$$(23') \quad \Gamma(|O|, \varrho) = |K''_{a^*, \varrho}| < \frac{1}{n-1} (|O| \varrho - E_n \varrho^n).$$

Die durch die Ungleichung (11') dargestellte Schranke ist also für $\varrho > \mathbf{P}$ in der Tat kleiner als die durch die Ungleichung (33) gegebene, während für $\varrho = \mathbf{P}$ die beiden Schranken gemäß (14') zusammenfallen.

Nun ist im Raum $(x_1 \dots x_{n-1})$ der $(n-1)$ -dimensionale Flächeninhalt derjenigen Punktmenge, für welche $r_1 \leq r \leq r_1 + \Delta r_1$ ist, gegeben durch den Ausdruck

$$E_{n-1}(r_1 + \Delta r_1)^{n-1} - E_{n-1} r_1^{n-1}.$$

Daraus folgt leicht

$$(24') \quad \int_{r \leq \varrho} \zeta dx_1 \dots dx_{n-1} = (n-1) E_{n-1} \int_0^{\varrho} r^{n-2} \sqrt{a^2 - r^2} dr.$$

Ferner ist wegen (8')

$$\Gamma(|O|, \varrho) = \frac{1}{n-1} \{ a^* |O| - 2(n-1) E_{n-1} \int_0^{\varrho} r^{n-2} \sqrt{a^{*2} - r^2} dr \} = \Phi(a^*, |O|, \varrho).$$

Man erhält wegen (21')

$$(25') \quad \frac{\partial \Gamma(|O|, \varrho)}{\partial \varrho} = \Phi_a(a^*, |O|, \varrho) \frac{\partial a^*}{\partial \varrho} + \Phi_{\varrho}(a^*, |O|, \varrho) = \Phi_{\varrho}(a^*, |O|, \varrho) \\ = -2 E_{n-1} \varrho^{n-2} \sqrt{a^{*2} - \varrho^2},$$

Ebenso folgt

$$(26') \quad \frac{\partial \Gamma(|O|, \varrho)}{\partial |O|} = \Phi_{|O|}(a^*, |O|, \varrho) = \frac{1}{n-1} a^*.$$

Man definiere nun $\bar{\mathbf{P}}$ durch die Gleichung

$$(27') \quad 2 E_{n-1} \bar{\mathbf{P}}^{n-1} = |O|.$$

Da, wie aus der Definition von E_{n-1} und E_n unmittelbar folgt, $n E_n > 2 E_{n-1}$ ist, so ergibt die $\mathbf{P}$ definierende Gleichung

$$n E_n \mathbf{P}^{n-1} = |O|$$

in Verbindung mit der Gleichung (27')

$$\bar{\mathbf{P}} > \mathbf{P}.$$

Gemäß Voraussetzung und den Ungleichungen (16') und (27') durchläuft also ϱ das Gebiet

$$\mathbf{P} \leq \varrho < \bar{\mathbf{P}}.$$

Dabei nimmt die Funktion $\Gamma(|O|, \varrho)$ wegen (25') bei festem $|O|$ und wachsendem ϱ ab, während sie wegen (26') bei festem ϱ und wachsendem $|O|$ zunimmt. Nun ist wegen (5'), da $a^* > \zeta$ ist:

$$(28') \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(|O|, \varrho) &= 2 |K_{a^*, \varrho}| < 2 (a^* - \sqrt{a^{*2} - \varrho^2}) E_{n-1} \varrho^{n-1} \\ &= \frac{2 \varrho^2}{a^* + \sqrt{a^{*2} - \varrho^2}} E_{n-1} \varrho^{n-1} < 2 E_{n-1} \cdot \frac{\bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{a^* + \sqrt{a^{*2} - \bar{\mathbf{P}}^2}}, \end{aligned} \right.$$

gültig für $a^* > \bar{\mathbf{P}}$.

Ebenso erhält man aus (3') und (27')

$$(29') \quad \begin{cases} \Gamma(|O|, \varrho) = \frac{a^*}{n} |O| - \frac{2}{n} E_{n-1} \bar{P}^{n-1} \left(\frac{\varrho}{\bar{P}} \right)^{n-1} \sqrt{a^{*2} - \varrho^2} \\ \quad = \frac{|O|}{n} \left(a^* - \left(\frac{\varrho}{\bar{P}} \right)^{n-1} \sqrt{a^{*2} - \varrho^2} \right). \end{cases}$$

Gemäß (28') folgt bei festem $|O|$ aus

$$(30') \quad a^* \rightarrow \infty,$$

$$(31') \quad \Gamma(|O|, \varrho) \rightarrow 0.$$

Bei Berücksichtigung von (31') ergibt (29') bei festem $|O|$ aus (30') auch noch

$$(32') \quad \varrho \rightarrow \bar{P}.$$

Da bei festem $|O|$ und wachsendem ϱ a^* wegen (12'), (13') monoton wächst und wegen (25') $\Gamma(|O|, \varrho)$ monoton abnimmt, so folgen aus jeder der drei Konvergenzen (30'), (31'), (32') die beiden anderen. Endlich wird wegen (14') für $\varrho = \bar{P}$ auch $a^* = \bar{P}$ und mithin

$$(33') \quad \Gamma(|O|, \bar{P}) = 2 |K'_{\bar{P}, \bar{P}}| = E_n \bar{P}^n.$$

Als Schlußresultat erhält man die gemäß (11'), (18') für $\varrho \geq \bar{P}$ gültige Ungleichung

$$(34') \quad V \leq \Gamma(|O|, \varrho).$$

Diese Schranke kann bei festem $|O|$ und ϱ nicht verbessert werden, da für den mit $K''_{a^*, \varrho}$ bezeichneten Rotationskörper das Gleichheitszeichen gilt.

$K''_{a^*, \varrho}$ ist der einzige Rotationskörper, für welchen das Gleichheitszeichen statthat.

Beweis⁴⁾: Aus der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (34') schließt man wie in II auf das Bestehen der Relationen (36) und der Gleichungen

$$x_\nu = a^* \cos(Nx_\nu), \quad \zeta = a^* |\cos(Nz)|, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Hieraus folgen wiederum ganz wie in II

$$(35') \quad z' = \frac{r}{a^*},$$

$$(36') \quad r' = \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^{*2}}}.$$

Wegen $r \leq \varrho < a^*$ bleibt $|r'| > 0$, und es fallen mithin in (36) σ und σ' zusammen.

Das Vorzeichen auf der rechten Seite von (36') ist also wegen (36) für $0 < s < \sigma$ positiv und für $\sigma < s < l$ negativ.

Die Gleichungen (35') und (36') sichern wegen der Stetigkeit von $r(s)$ und der Festlegung des Vorzeichens der Quadratwurzel von (36') die Be-

⁴⁾ Da der Fall $\varrho = \bar{P}$, d. h. der Fall der Kugel schon in II erledigt ist, darf hier die Annahme $\varrho > \bar{P}$ und mithin wegen (14') auch $a^* > \varrho$ gemacht werden.

stimmtheit und Stetigkeit von z' und r' an allen Stellen mit Ausnahme von $s = \sigma$, wo z' zwar auch noch bestimmt und stetig bleibt, aber die vordere und hintere Derivierte von r durch Vorzeichenwechsel einen Sprung bilden.

Führt man in (36') im Intervall $\sigma \leq s \leq l - s$ statt s ein, so folgt wegen $r(0) = r(l) = 0$, $r(s) = r(l - s)$, $r(\sigma) = r(l - \sigma) = \varrho$, $l = 2\sigma$. Da jetzt z durch (35') bis auf eine Konstante bestimmt ist, so ist die Gestalt der Meridiankurve eindeutig festgelegt, das heißt, es gibt nur einen einzigen Rotationskörper, für welchen in (34') das Gleichheitszeichen gilt und dieser ist gemäß (18') die Doppelkalotte $K'_{\alpha', \varrho}$.

IV. Unser Beweisgang benutzt die Gleichung (31), die ihrerseits mit Hilfe des sogenannten Greenschen Lemmas hergeleitet wird. Da der Beweis dieses Lemmas im n -dimensionalen Raum nicht einfach erscheint, so soll hier noch ein anderer Beweis der Gleichung (31) angegeben werden.

Man setze im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$

$$(1'') \quad \sum_1^{n-1} x_v^2 = r^2, \quad r \geq 0.$$

Das Volumen derjenigen Punktmenge, welche den Ungleichungen

$$(2'') \quad r_1 \leq r \leq r_1 + \Delta r_1, \quad z_1 \leq z \leq z_1 + \Delta z_1$$

genügt, ist gegeben durch den Ausdruck

$$(3'') \quad \Delta z_1 \{E_{n-1}(r_1 + \Delta r_1)^{n-1} - E_{n-1}r_1^{n-1}\}$$

wobei E_{n-1} dieselbe Bedeutung hat wie in I.

Mit anderen Worten: Dem durch die Ungleichungen (2'') in der Meridianebene (r, z) definierten Rechteck entspricht bei Rotation um die z -Achse im n -dimensionalen Raum ein Körper, dessen Volumen durch die Formel (3'') gegeben wird. Dem Element $dr dz$ in der Meridianebene entspricht daher bei der Rotation um die z -Achse das Volumenelement

$$(n-1) E_{n-1} r^{n-2} dr dz.$$

Bezeichnet man also in der Meridianebene mit T das von der Meridiankurve C und der Rotationsachse z begrenzte Gebiet, so erhält man für das Volumen V des Rotationskörpers K die Gleichung

$$(4'') \quad V = \int_T (n-1) E_{n-1} r^{n-2} dr dz.$$

Um einen passenden Ausdruck für das Oberflächenelement von K zu finden, setze man

$$(5'') \quad x_v = r(s) \eta_v, \quad v = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dann ist wegen (1'')

$$(6'') \quad \sum_1^{n-1} \eta_v^2 = 1.$$

Man beziehe auf einem Teilgebiet der Oberfläche der durch diese Gleichung gegebenen Einheitskugel $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ auf $(n-2)$ Parameter $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$.

Man bezeichne ferner mit W_0 den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial s} \frac{dz}{ds}$$

und mit W_m , $m = 1, 2, \dots, n-2$, die Vektoren mit den Komponenten

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau_m} \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \tau_m}, \quad 0.$$

Man setze

$$D_0 = \|\alpha_{\lambda\mu}\| \quad \begin{array}{l} \lambda = 0, 1, \dots, n-2, \\ \mu = 0, 1, \dots, n-2, \end{array}$$

$$D_1 = \|\alpha_{\lambda\mu}\|, \quad \begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \dots, n-2, \\ \mu = 1, 2, \dots, n-2, \end{array}$$

wobei die Symbole rechts die aus den inneren Produkten

$$\alpha_{\lambda\mu} = (W_\lambda, W_\mu)$$

gebildeten Determinanten bedeuten. Dann ist D_0 gleich der Summe der Quadrate aller aus den Komponenten der Vektoren $W_0, W_1, \dots, W_{n-2}$ gebildeten Unterdeterminanten $(n-1)$ -ter Ordnung und D_1 gleich der Summe der Quadrate aller aus den Komponenten der Vektoren $W_1, \dots, W_{n-2}$ gebildeten Unterdeterminanten $(n-2)$ -ter Ordnung.

Mithin gilt für das Oberflächenelement von K

$$d\omega = +\sqrt{D_0} ds d\tau_1 \dots d\tau_{n-2}.$$

Für das Oberflächenelement dS der Oberfläche S der Einheitskugel (6'') gilt wegen

$$\frac{\partial \eta_\nu}{\partial \tau_m} = \frac{1}{r(s)} \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau_m}, \quad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n-1, \\ m = 1, 2, \dots, n-2, \end{array}$$

$$dS = \frac{+\sqrt{D_1}}{(r(s))^{n-2}} \cdot d\tau_1 \dots d\tau_{n-2}.$$

Nun ist

$$\alpha_{00} = \sum_1^{n-1} \left(\frac{dr}{ds} \eta_\nu \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$$

und für $\mu = 1, 2, \dots, n-2$ wegen (6'')

$$\alpha_{0\mu} = r(s) \frac{dr}{ds} \sum_1^{n-1} \eta_\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \tau_\mu} = 0.$$

Mithin ist

$$D_0 = D_1.$$

Also gilt die übrigens auch infinitesimalgeometrisch evidente Gleichung

$$d\omega = (r(s))^{n-2} ds dS.$$

Man erhält daher zunächst für den Oberflächeninhalt von K die Gleichung

$$(7'') \quad |O| = \int_0^l ds \int_S r(s)^{n-2} dS = (n-1) E_{n-1} \int_0^l r(s)^{n-2} ds,$$

wobei l die Länge der Meridiankurve C bedeutet.

Nun ist

$$\frac{1}{n-1} \int_0^l \left(\sum_1^{n-1} x_v \cos(x_v, N) \right) d\omega = \frac{1}{n-1} \int_0^l r \cos(r, N) d\omega$$

$$= \frac{1}{n-1} \int_0^l ds \int_S r \cos(r, N) r^{n-2} dS = \frac{1}{n-1} (n-1) E_{n-1} \int_0^l r^{n-1} \cos(r, N) ds.$$

Also ist

$$(8'') \quad \frac{1}{n-1} \int_0^l \left(\sum_1^{n-1} x_v \cos(x_v, N) \right) d\omega = E_{n-1} \int_0^l r^{n-1} \cos(r, N) ds.$$

Man transformiere jetzt den Ausdruck auf der rechten Seite durch Anwendung des Greenschen Lemmas für das von der Kurve C und der z -Achse in der Meridianebene (r, z) begrenzte Gebiet T , für welchen Fall der Beweis des Lemmas keine Schwierigkeiten bietet. Dann folgt

$$(9'') \quad E_{n-1} \int_0^l r^{n-1} \cos(r, N) ds = (n-1) E_{n-1} \int_T r^{n-2} dr dz.$$

Die beiden letzten Gleichungen (8'') und (9'') ergeben wegen (4'') die Gleichung (31), die zu beweisen war.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Sätze dieses Paragraphen in der Folge nur für solche Rotationskörper gebraucht werden, bei welchen, abgesehen von zwei der r -Achse parallelen Geradenstücken, welche in den Anfangs- und Endpunkt der Meridiankurve C auf der z -Achse einmünden, längs dieser Kurve $r = r(z)$ eine eindeutige Funktion von z ist. Für diesen Fall ist aber die Umformung (9'') völlig trivial.

V. Die in diesem Paragraphen gegebene Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen I (33), (34) und III (34') macht von der Voraussetzung, daß der betrachtete Körper ein Rotationskörper ist, eigentlich keinen Gebrauch. Es wird vielmehr lediglich die Voraussetzung benutzt, daß die senkrechte Projektion des Körpers auf eine gewisse Ebene, der die Gleichung $z = 0$ beigelegt wird, eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel ausfüllt, deren Radius mit ρ bezeichnet wird. Das ist auch der Grund der genauen Übereinstimmung der in diesem Paragraphen gegebenen Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen mit den in § 1 entwickelten Beweisen für die entsprechenden Ungleichungen in der Ebene. Denn die senkrechte Projektion eines von einer geschlossenen Kurve begrenzten Gebietes auf eine Gerade füllt eine Strecke aus. Eine Strecke aber ist ein eindimensionaler Kreis mit ihrem Mittelpunkt als Zentrum und ihrer halben Länge als Radius.

Ich habe im vorliegenden Paragraphen bei der Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen von der Verallgemeinerung im obigen Sinn abgesehen, weil ich dann auf den Vorteil hätte verzichten müssen, das Greensche Lemma nur in einer Form zu benutzen, die, wie hier unter IV geschehen, sich auf den Fall von zwei Dimensionen zurückführen läßt.

§ 4.

Vorbereitende Hilfssätze.

I. Ein Satz von Schwarz⁵⁾.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetige Funktionen von x . Dann ist

$$(42) \quad \int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \cdot dx \geq \sqrt{\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x) dx\right)^2}.$$

Beweis. Wegen der Identität

$$(43) \quad (f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y))^2 + (f(x)g(y) - g(x)f(y))^2 = (f^2(x) + g^2(x))(f^2(y) + g^2(y))$$

ist

$$(44) \quad f(x)f(y) + g(x)g(y) \leq \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \cdot \sqrt{f^2(y) + g^2(y)}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \int_a^b [\sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \cdot \sqrt{f^2(y) + g^2(y)} - (f(x)f(y) + g(x)g(y))] dx dy \\ &= \int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \cdot dx \int_a^b \sqrt{f^2(y) + g^2(y)} \cdot dy \\ &\quad - \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy - \int_a^b g(x) dx \int_a^b g(y) dy \\ &= \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2 - \left(\int_a^b g(x) dx\right)^2, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Wie aus der Identität (43) hervorgeht, gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ linear abhängig sind und ihr Vorzeichen nicht wechseln. Die lineare Abhängigkeit ist notwendig und hinreichend, damit in der Ungleichung (44) die Quadrate der beiden Seiten gleich werden. Bei schon bestehender linearer Abhängigkeit ist aber die Ausschaltung eines Vorzeichenwechsels notwendig und hinreichend, damit auf der linken Seite das Vorzeichen positiv bleibt.

Das Analogon der Schwarzschen Relation für endliche Summen lautet

$$(45) \quad \sum_1^n \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \geq \sqrt{\left(\sum_1^n \alpha_r\right)^2 + \left(\sum_1^n \beta_r\right)^2}$$

und besagt also weiter nichts, als daß die Entfernung des Anfangs- und Endpunktes eines ebenen Streckenzuges, der von den n Strecken mit den Kom-

⁵⁾ l. c., S. 331.

ponenten α_v, β_v gebildet wird, seine Länge nicht übertreffen kann. Auch hier gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn keine der beiden Zahlenreihen α_v und β_v , $v = 1, 2, \dots, n$, einen Vorzeichenwechsel enthält und beide linear abhängig sind.

Es seien nun die n Funktionenpaare $f_v(x_v), g_v(x_v)$ stetig für $a_v \leq x_v \leq b_v$, $v = 1, 2, \dots, n$. Setzt man jetzt

$$\int_{a_v}^{b_v} f_v(x_v) dx_v = \alpha_v, \quad \int_{a_v}^{b_v} g_v(x_v) dx_v = \beta_v,$$

$$\int_{a_v}^{b_v} \sqrt{f_v^2(x_v) + g_v^2(x_v)} \cdot dx_v = \gamma_v,$$

so ist wegen der Relation (42)

$$\gamma_v \geq \sqrt{\alpha_v^2 + \beta_v^2},$$

und mithin wegen (45)

$$\sum_1^n \gamma_v \geq \sqrt{\left(\sum_1^n \alpha_v\right)^2 + \left(\sum_1^n \beta_v\right)^2}.$$

Also explizite

$$\sum_1^n \left(\int_{a_v}^{b_v} \sqrt{f_v^2(x_v) + g_v^2(x_v)} \cdot dx_v \right) \geq \sqrt{\left(\sum_1^n \int_{a_v}^{b_v} f_v(x_v) dx_v \right)^2 + \left(\sum_1^n \int_{a_v}^{b_v} g_v(x_v) dx_v \right)^2}.$$

Diese Relation bleibt unverändert bestehen, wenn x_v einen Punkt in einem beschränkten, abgeschlossenen Raumstück von m_v Dimensionen bedeutet und dx_v das entsprechende Raumelement. Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn sowohl das Verhältnis der Funktionen

$$f(x_v) : g(x_v)$$

als auch ihr Vorzeichen von x_v und von v unabhängig sind.

Jetzt folgen einige Hilfssätze, von denen die ersten trivial und bekannt und nur zur Bequemlichkeit des Lesers mit kurzen Beweisen versehen sind.

Ich schicke voraus, daß, wenn hier und in der Folge vom äußeren und inneren Inhalt einer Punktmenge die Rede ist, immer der Inhalt im Sinne von Riemann-Peano-Jordan gemeint ist.

II. Es seien $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ als einmal stetig differenzierbare Funktionen in einem Rechteck der (x, y) -Ebene definiert. Es bezeichne R den Inhalt des Rechtecks, $\bar{J}$ den äußeren Inhalt der von den Punkten (u, v) in der (u, v) -Ebene bedeckten Punktmenge und m das Maximum des absoluten Betrages der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

Dann ist $\bar{J} \leq m \cdot R$.

Der Satz gilt auch für $m = 0$, d. h. für den Fall des identischen Verschwindens der Funktionaldeterminante.

Beweis. Teilt man das Rechteck durch Halbierung der Seiten in vier kongruente Teilrechtecke und bedeutet $\bar{J}_v$, $v = 1, \dots, 4$, den äußeren Inhalt des Bildes jedes dieser Teilrechtecke in der (u, v) -Ebene, so ist zunächst

$$\bar{J} \leq \sum_{v=1}^4 \bar{J}_v,$$

$$\frac{\bar{J}}{R} \leq \frac{1}{4} \sum_{v=1}^4 \frac{\bar{J}_v}{R}.$$

Es sei nun $\bar{J}_\lambda$ der äußere Inhalt des Bildes eines derjenigen der vier Teilrechtecke, für welches $\frac{\bar{J}_v}{R}$ den größten Wert annimmt. Dann ist

$$\frac{\bar{J}}{R} \leq \frac{\bar{J}_\lambda}{R}.$$

Teilt man nun dieses Rechteck durch Halbierung der Seiten wiederum in vier kongruente Teilrechtecke, deren Bilder in der (u, v) -Ebene etwa die äußeren Inhalte $\bar{J}'_v$ haben, so ergibt sich

$$\frac{\bar{J}}{R} \leq \frac{\bar{J}_\lambda}{R} \leq \frac{\bar{J}'_\lambda}{R}.$$

Durch unbeschränkte Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man eine Folge ineinander eingeschachtelter Rechtecke, deren Seitenlängen gegen Null konvergieren und für welche der Quotient des äußeren Inhalts des Bildes, dividiert durch den Inhalt des Rechtecks nicht abnimmt, also insbesondere nicht unter $\frac{\bar{J}}{R}$ sinkt. Es bezeichne nun x_0, y_0 den Grenzpunkt dieser Rechtecksfolge und D_0 den Wert des absoluten Betrages der Funktionaldeterminante in diesem Punkte. Dann folgt aus dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Stetigkeit der Ableitungen leicht, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß das Bild eines Rechtecks vom Inhalt R^* , welches ganz in dem um den Punkt x_0, y_0 mit dem Radius ε beschriebenen Kreise liegt, sich in der (u, v) -Ebene in ein Parallelogramm einbetten läßt, dessen Inhalt kleiner als $(D_0 + \delta) R^*$ ist. Das gilt auch, wenn D_0 verschwindet. Also gilt auch für den äußeren Inhalt $\bar{J}^*$ des Bildes des Rechtecks R^*

$$\frac{\bar{J}^*}{R^*} < (D_0 + \delta).$$

In Verbindung mit dem vorigen ergibt sich hieraus

$$\frac{\bar{J}}{R} < D_0 + \delta$$

und mithin

$$\frac{\bar{J}}{R} \leq D_0 \leq m,$$

w. z. b. w.

III. Es seien $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ als einmal stetig differenzierbare Funktionen in einem Rechteck der (x, y) -Ebene definiert. Dann entspricht der Gesamtheit derjenigen Punkte in der (x, y) -Ebene, für welche $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ wird, in der (u, v) -Ebene zunächst gewiß eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge, die natürlich auch leer sein kann. *Diese Punktmenge hat den äußeren Inhalt Null.*

Beweis. Es sei $\delta > 0$. Man zerlege das Definitionsrechteck durch Parallelen zu den Seiten in ein Netz so kleiner, miteinander kongruenter Teilrechtecke, daß die Differenz des Wertes der Funktionaldeterminante für irgend zwei Punkte im Innern oder auf dem Rande ein und desselben Teilrechtecks kleiner als δ bleibt. Dann ist für jedes Teilrechteck, das im Innern oder auf dem Rande eine Nullstelle der Funktionaldeterminante enthält, der absolute Betrag dieser Determinante kleiner als δ . Bezeichnet R , den Inhalt eines solchen Teilrechtecks, so ist nach Satz II der äußere Inhalt des Bildes dieses Teilrechtecks in der (u, v) -Ebene kleiner als $\delta \cdot R$. Der äußere Inhalt des Bildes der Gesamtheit dieser Teilrechtecke ist mithin kleiner oder gleich $\delta \cdot R$, wobei R wie früher den Inhalt des Definitionsrechtecks bezeichnet.

Da das Bild der Nullstellen der Funktionaldeterminante von eben dem Bilde der Gesamtheit dieser Teilrechtecke überdeckt wird, und δ beliebig klein angenommen werden kann, ist der zu führende Beweis erbracht.

IV. Es seien $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ als einmal stetig differenzierbare Funktionen in einem Rechteck der (x, y) -Ebene definiert.

Es sei nun (u, v) ein Bildpunkt, dem unendlich viele Originalpunkte in der (x, y) -Ebene entsprechen. Diese haben im Definitionsrechteck der (x, y) -Ebene einen Häufungspunkt, dem derselbe Wert (u, v) entsprechen und in welchem die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ werden muß. Mithin ist die Gesamtheit derjenigen Punkte in der (u, v) -Ebene, welchen in der (x, y) -Ebene unendlich viele Punkte entsprechen, enthalten in der Gesamtheit der Bildpunkte der Nullstellen der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$. Gemäß III ist also die Gesamtheit derjenigen Bildpunkte in der (u, v) -Ebene, welchen in der (x, y) -Ebene unendlich viele Originalpunkte entsprechen, einschließlich der Häufungspunkte dieser Bildpunkte eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge vom äußeren Inhalt Null.

V. Die Sätze II, III, IV und ihre Beweise bleiben unverändert bestehen, wenn es sich um n Funktionen von n Variablen handelt, welche in einem n -dimensionalen rechtwinkligen Parallelotop definiert sind.

Aus der Verallgemeinerung von II ziehen wir noch die triviale Folgerung:

V (A). Es sei im k -dimensionalen Raum eine $(k - 1)$ -dimensionale Fläche gegeben durch die Gleichungen

$$x_\lambda = x_\lambda(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) \quad \lambda = 1, 2, \dots, k,$$

wobei der Punkt $(t_1, \dots, t_{k-1})$ im Parameterraum etwa ein rechtwinkliges Parallelotop durchläuft und die Funktionen einmal stetig differenzierbar sind.

Dann ist der k -dimensionale Inhalt der Fläche gleich Null.

Man kann nämlich einen k -ten Scheinparameter t_k , $0 \leq t_k \leq 1$, hinzufügen, von welchem die x_λ gar nicht abhängen. Dann ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \equiv 0$$

und der Satz II für k Variable ergibt die zu beweisende Aussage.

Dieser Satz läßt sich noch folgendermaßen erweitern.

V (B). Es sei im n -dimensionalen Raum eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben durch die Gleichungen

$$x_\nu = f_\nu(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

wobei der Punkt $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ im Parameterraum etwa ein rechtwinkliges Parallelotop durchläuft, und die Funktionen einmal stetig differenzierbar sind. Es sei ferner $k < l \leq n$. *Dann ist im n -dimensionalen Raum der l -dimensionale Flächeninhalt der Mannigfaltigkeit gleich Null.*

Man kann nämlich $l - k$ Scheinparameter t_μ , $\mu = k + 1, \dots, l$ hinzufügen, welche die Intervalle $0 \leq t_\mu \leq 1$ durchlaufen, und von welchen die Funktionen f_ν gar nicht abhängen. Der l -dimensionale Flächeninhalt der Mannigfaltigkeit wird dann gegeben durch das Integral

$$\int \Delta dt_1, dt_2, \dots, dt_l,$$

wobei die Parameter $t_1, t_2, \dots, t_l$ das durch die obigen Festsetzungen bestimmte l -dimensionale rechtwinklige Parallelotop durchlaufen, und Δ den nicht negativen Wert der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Unterdeterminanten l -ter Ordnung in der Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial f_\nu}{\partial t_\lambda} \right\} \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda = 1, 2, \dots, l$$

bedeutet. Da nun alle diese Determinanten identisch verschwinden, so verschwindet auch Δ identisch, was die zu beweisende Aussage nach sich zieht.

VI. Es seien im k -dimensionalen Raum $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ endlich viele Mannigfaltigkeiten $T^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \dots, l$, gegeben durch Gleichungen von der Gestalt

$$x_\lambda = f_\lambda^{(\mu)}(t_1, t_2, \dots, t_{k-2}) \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \mu = 1, 2, \dots, l$$

wobei der Punkt $(t_1, t_2, \dots, t_{k-2})$ im $(k-2)$ -dimensionalen Parameterraum für jedes μ etwa ein rechtwinkliges Parallelotop durchlaufen möge, und die Funktionen einmal stetig differenzierbar sind.

Sind dann Q und $\bar{Q}$ zwei auf keiner der Mannigfaltigkeiten gelegene Punkte, so lassen sie sich auf einem aus zwei geraden Strecken bestehenden Wege verbinden, der keine der Mannigfaltigkeiten schneidet. Dabei kann die eine der beiden geraden Wegstrecken beliebig klein gewählt werden, so daß also der Verbindungsweg in beliebiger Nähe der Strecke $\overline{Q\bar{Q}}$ verläuft ^{5a)}.

Beweis. Die Koordinaten von Q seien $x_\lambda^{(0)}$, $\lambda = 1, 2, \dots, k$. Verbindet man Q mit jedem Punkte von $T^{(\mu)}$ durch eine gerade Strecke, so wird die aus diesen Strecken gebildete Punktmenge $V^{(\mu)}$ gegeben durch die Gleichungen

$$x_\lambda = x_\lambda^{(0)} \cdot (1 - t) + t \cdot f_\lambda^{(\mu)}(t_1, t_2, \dots, t_{k-2}) \quad 0 \leq t \leq 1, \lambda = 1, 2, \dots, k,$$

und hat mithin gemäß V (A) den äußeren Inhalt Null. Mithin hat auch die Vereinigungsmenge V aller $V^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \dots, l$, den äußeren Inhalt Null.

Es seien nun K und $\bar{K}$ zwei k -dimensionale Vollkugeln um Q und $\bar{Q}$ als Mittelpunkte, welche keinen Punkt miteinander und keinen Punkt mit einem $T^{(\mu)}$ gemein haben. Die Vereinigungsmenge der geraden Verbindungsstrecken zwischen Q und allen Punkten von $\bar{K}$ hat offenbar mit K einen Durchschnitt, dessen Inhalt > 0 ist. Dieser Durchschnitt kann daher nicht von V überdeckt werden. Also gibt es in $\bar{K}$ Punkte, deren gerade Verbindungsstrecke mit Q keines der $T^{(\mu)}$ schneidet. Verbindet man einen solchen Punkt durch ein Geradenstück mit $\bar{Q}$, so erhält man einen Verbindungsweg zwischen Q und $\bar{Q}$ von den in dem zu beweisenden Satze verlangten Eigenschaften. Da der Radius von $\bar{K}$ beliebig klein angenommen werden kann, so läßt sich auch die zusätzliche Forderung erfüllen, daß die in $\bar{Q}$ endende gerade Wegstrecke beliebig klein ausfällt.

VII. Es sei eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Raum definiert durch die Gleichungen

$$(46) \quad x_v = x_v(t_1, t_2, \dots, t_k), \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

wobei der Punkt $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ des Parameterraumes etwa ein k -dimensionales rechtwinkliges Parallelotop durchlaufe, und die Funktionen zweimal stetig

^{5a)} Der Satz und der Beweis bleiben unverändert bestehen, wenn die Anzahl der Mannigfaltigkeiten $T^{(\mu)}$ abzählbar unendlich ist. Nur muß dann im Beweise der Riemann-Peano-Jordansche Inhaltsbegriff durch das Borelsche Maß ersetzt werden.

differenzierbar sind. Es werde ferner vorausgesetzt, daß die Funktionalmatrix

$$(47) \quad \left\{ \frac{\partial x_\nu}{\partial t_\lambda} \right\} \begin{matrix} \nu = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda = 1, 2, \dots, k \end{matrix}$$

in jedem Punkt den Rang k habe.

Die linearen Gleichungen

$$(48) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x_\nu}{\partial t_\lambda} \xi_\nu = 0 \quad \lambda = 1, 2, \dots, k$$

haben dann in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein Lösungssystem vom Range $(n - k)$, welches die Normalenrichtungen in diesem Punkte angibt.

Man betrachte nun die auf der Einheitskugel im n -dimensionalen Raum fixierten Richtungspunkte der Gesamtheit aller Normalen der Mannigfaltigkeit. Dann gilt der folgende Satz:

Die durch Hinzuziehung ihrer Häufungspunkte abgeschlossene Menge derjenigen Richtungspunkte auf der Einheitskugel, welchen Normalen in unendlich vielen Punkten der Mannigfaltigkeit entsprechen, hat — auf der Einheitskugel gemessen — den äußeren Inhalt Null. Man setze dabei fest, daß jeder Normalen ihre beiden diametralen Richtungspunkte auf der Einheitskugel entsprechen.

Beweis. Zunächst läßt sich jedem Punkte P des Definitionsparallelotops ein diesem parallel orientiertes den Punkt P als Mittelpunkt enthaltendes Parallelotop π_P von folgenden Eigenschaften zuordnen:

Es sei P ein innerer Punkt des Definitionsparallelotops; dann ist π_P so klein gewählt, daß es ebenfalls ganz im Innern desselben liegt, und daß ferner eine der in P voraussetzungsgemäß nicht verschwindenden Unterdeterminanten k -ter Ordnung der Funktionalmatrix (47) in π_P einschließlich des Randes $\neq 0$ bleibt.

Es sei P ein Randpunkt des Definitionsparallelotops; dann ist π_P so klein gewählt, daß eine der voraussetzungsgemäß in P nicht verschwindenden Unterdeterminanten k -ter Ordnung der Funktionalmatrix (47) im Parallelotop π'_P einschließlich des Randes $\neq 0$ bleibt, wobei π'_P den Durchschnitt von π_P mit dem Definitionsparallelotop darstellt.

Nach dem Borelschen Satze läßt sich jetzt das ganze Definitionsparallelotop von endlich vielen der Parallelotope π_P bedecken. Man ersetze nun unter diesen diejenigen, für welche der Punkt P ein Randpunkt des Definitionsparallelotops ist, durch die entsprechenden Parallelotope π'_P . Das Ergebnis ist eine Überdeckung des Definitionsparallelotops durch endlich viele parallel orientierte Teilparallelotope, dergestalt, daß es für jedes derselben eine Unterdeterminante k -ter Ordnung der Funktionalmatrix gibt, welche in diesem einschließlich des Randes $\neq 0$ bleibt. Es genügt daher offenbar, die zu beweisende Behauptung für solche Teilparallelotope darzutun.

Wir dürfen daher voraussetzen, daß etwa

$$\frac{\partial (x_1, \dots, x_k)}{\partial (t_1, \dots, t_k)} \neq 0$$

bleibt.

Dann können im Gleichungssystem (48) für eine Normale nicht sämtliche ξ_ϱ , $\varrho = k + 1, \dots, n$ verschwinden. Für jede Normale muß es also unter den Koordinaten ξ_ϱ eine dem absoluten Betrage nach größte geben, und diese kann nicht verschwinden. Man betrachte nun diejenigen Normalen, für welche etwa ξ_μ dem absoluten Betrage nach von keinem ξ_ϱ übertroffen werde, μ fest, $k + 1 \leq \mu \leq n$. Alle diese Normalenrichtungen erhält man, wenn man setzt

$$\xi_\mu = 1, \quad |\xi_\varrho| \leq 1, \quad k + 1 \leq \varrho \leq n,$$

oder

$$\xi_\mu = -1, \quad |\xi_\varrho| \leq 1, \quad k + 1 \leq \varrho \leq n,$$

und die übrigen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ durch die Auflösung der linearen Gleichungen (48) bestimmt. Auf diese Weise erhält man für jedes μ zwei, also im ganzen $2(n - k)$, Systeme von Normalenrichtungen, deren Gesamtheit jede Normalenrichtung mindestens einmal überdeckt. Man betrachte nun eines dieser Systeme, etwa das System

$$(49) \quad \xi_n = 1, \quad |\xi_\varrho| \leq 1, \quad k + 1 \leq \varrho \leq n - 1.$$

Die Gesamtheit dieser Punkte liegt auf der $(n - 1)$ -dimensionalen, die Einheitskugel berührenden Ebene $\xi_n = 1$ und wird durch Gleichungen gegeben von der Gestalt

$$\xi_\lambda = f_\lambda(t_1, \dots, t_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n-1}) \quad \lambda = 1, 2, \dots, k,$$

$$\xi^\varrho = \xi_\varrho \quad \varrho = k + 1, k + 2, \dots, n - 1,$$

wobei die f_λ einmal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente sind. Betrachtet man jetzt die $t_1, \dots, t_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n-1}$ als die unabhängig Veränderlichen und die $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n-1}$ als die abhängig Veränderlichen, so sind die Voraussetzungen des Satzes IV in seiner Verallgemeinerung V erfüllt. Also ist der auf der $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene $\xi_n = 1$ gemessene äußere Inhalt der durch Hinzuziehung ihrer Häufungspunkte abgeschlossenen Menge derjenigen dieser Punkte, welchen Normalen in unendlich vielen Punkten entsprechen, gleich Null. Der äußere Inhalt der Menge der entsprechenden Richtungspunkte auf der Einheitskugel ist mithin auch Null, und da das für jede der oben definierten $2(n - k)$ Systeme von Richtungspunkten gilt, ist der zu führende Beweis für den Satz VII erbracht.

§ 5.

Über differenzierbare Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum.

I. Wir wollen uns der folgenden Bezeichnungsweise bedienen:

Die Gesamtheit derjenigen Punkte einer Punktmenge, die von einem ihrer Punkte um weniger als ein $\delta > 0$ entfernt sind, soll die δ -Umgebung dieses Punktes auf der Punktmenge heißen.

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Sätze:

I (1). Es sei P ein gemeinsamer Punkt der Punktmengen π, π_1, π_2 ; es werde die δ -Umgebung von P auf π von π_1 bedeckt und die δ_1 -Umgebung von P auf π_1 von π_2 bedeckt. Dann wird auch die δ' -Umgebung von P auf π von π_2 bedeckt, wobei δ' die nicht-größere unter den beiden Zahlen δ und δ_1 bedeutet.

I (2). Es sei P ein gemeinsamer Punkt der Punktmengen π und π_1 ; es werde die δ -Umgebung von P auf π von π_1 bedeckt. Es sei Q ein Punkt der δ -Umgebung von P auf π . Dann wird die δ_1 -Umgebung von Q auf π ebenfalls von π_1 überdeckt, wobei $\delta_1 = \delta - \overline{PQ} > 0$ ist.

II. Es sei im n -dimensionalen Raum eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ($1 \leq k \leq n - 1$) definiert durch die Gleichungen

$$(50) \quad x_v = x_v(t_1, t_2, \dots, t_k), \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

$$(51) \quad \tau''_\lambda \leq t_\lambda \leq \tau'_\lambda, \quad \tau''_\lambda < \tau'_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k.$$

Es seien ferner die Funktionen $x_v(t_1, t_2, \dots, t_k)$ zweimal stetig differenzierbar.

Die Funktionalmatrix $\left\{ \frac{\partial x_v}{\partial t_\lambda} \right\}$ habe in jedem Punkt des Definitionsbereiches (51) den Rang k . Endlich sei noch die durch die obigen Funktionen vermittelte Abbildung eindeutig umkehrbar und mithin auch die Umkehrung stetig. Eine solche Mannigfaltigkeit soll im folgenden kurz als ein *k-dimensionales Grundgebilde* bezeichnet werden. Liegt der Punkt $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ im Innern des Definitionsparallelotops (51), so soll der entsprechende Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein *innerer*⁶⁾ Punkt des Grundgebildes heißen.

Es sei hier noch vorausgeschickt, daß alle in diesem und im folgenden Paragraphen entwickelten Definitionen, Sätze und Beweise unverändert gültig bleiben, wenn für das Grundgebilde statt der *zweimaligen* stetigen Differenzierbarkeit nur die *einmalige* stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Eine Ausnahme bilden lediglich die Sätze § 6 V (1) und V (2), die sich auf den Satz § 4 VII und damit wesentlich auf die *zweimalige* stetige Differenzierbarkeit stützen.

⁶⁾ Auf den Beweis der Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl des Parametersystems $t_1, t_2, \dots, t_k$ kann hier verzichtet werden, da in der Folge kein Gebrauch davon gemacht wird.

II (1). Es sei das Grundgebilde G_k gegeben durch die Gleichungen

$$x_v = f_v(t_1, \dots, t_k), \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

und das Grundgebilde G_k^* durch die Gleichungen

$$x_v = f_v^*(t_1^*, \dots, t_k^*), \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Es sei Q ein gemeinsamer innerer Punkt von G_k und G_k^* . *Liegt dann eine gewisse δ^* -Umgebung von Q auf G_k^* im Innern von G_k , so liegt auch eine gewisse δ -Umgebung von Q auf G_k im Innern von G_k^* .*

Beweis. In Q muß zunächst mindestens eine der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(f_{v_1}, f_{v_2}, \dots, f_{v_k})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \neq 0$$

sein. Wir können annehmen, daß

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_k)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \neq 0$$

ist. Daher läßt sich ein neues im Innern von G_k enthaltenes Grundgebilde G'_k bestimmen, das Q im Innern behält, auf $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ als Parameter bezogen ist, und dessen Inneres eine δ -Umgebung von Q auf G_k enthält. G'_k werde gegeben durch die Gleichungen

$$(52) \quad x_\mu = g_\mu(x_1, \dots, x_k), \quad \mu = k+1, \dots, n.$$

Dann liegt gemäß I (1) auch eine gewisse Umgebung von Q auf G_k^* im Innern von G'_k . Es wird daher innerhalb dieser Umgebung G_k^* auch gegeben durch die Gleichungen (52) in Verbindung mit den Gleichungen

$$(53) \quad x_\lambda = f_\lambda^*(t_1^*, \dots, t_k^*), \quad \lambda = 1, 2, \dots, k.$$

Nun muß in Q die Funktionaldeterminante

$$(54) \quad \frac{\partial(f_1^*, \dots, f_k^*)}{\partial(t_1^*, \dots, t_k^*)} \neq 0$$

sein, weil sonst in Q der Rang der Funktionalmatrix $\left\{ \frac{\partial x_v}{\partial t_\lambda^*} \right\}$ $v = 1, 2, \dots, n$;

$\lambda = 1, 2, \dots, k$ kleiner als k ausfiele. Es sei nun für den Punkt Q $x_\lambda = x_\lambda^0$, $\lambda = 1, 2, \dots, k$. Dann lassen sich wegen (54) die Gleichungen (53) in genügender Nähe des Punktes $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ umkehren, w. z. b. w.

II (2). Es sei π eine im Innern des Grundgebildes G_k liegende Punktmenge. Dann soll die Punktmenge π *relativ-offen* zu G_k heißen, wenn es zu jedem Punkte Q von π ein $\delta > 0$ gibt, so daß die δ -Umgebung von Q im Innern von G_k π angehört.

Diese Definition ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden:

II (3). Eine im Innern des Grundgebildes G_k liegende Punktmenge π heißt *relativ-offen* zu G_k , wenn im Definitionsparallelotop des k -dimensionalen Parameterraums von G_k die π entsprechende und demgemäß im Innern des Parallelotops liegende Punktmenge in bezug auf den Parameterraum eine *offene*, d. h. nur aus inneren Punkten bestehende Punktmenge darstellt.

II (4). Es bezeichne G_k^* ein vom Innern von G_k überdecktes Grundgebilde; es sei π^* der Durchschnitt der zu G_k relativ-offenen Punktmenge π mit dem Innern von G_k^* . Dann ist π^* relativ-offen zu G_k^* .

Beweis. Es sei Q ein Punkt von π^* . Dann ist Q auch ein Punkt von π ; daher gibt es ein $\delta > 0$, so daß im Innern von G_k die δ -Umgebung von Q π angehört. A fortiori gehört auch im Innern von G_k^* die δ -Umgebung von Q π an, definitionsgemäß gehört sie daher auch zu π^* , w. z. b. w.

III. Den Gegenstand dieses Abschnitts bilden im n -dimensionalen Raum $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gelegene Punktmenge M_k , $1 \leq k \leq n - 1$, von folgenden Eigenschaften:

a) M_k ist beschränkt und abgeschlossen.

b) Zu jedem Punkt von M_k läßt sich ein Grundgebilde G_k bestimmen, dessen Inneres diesen Punkt einschließlich einer gewissen Umgebung des Punktes auf M_k bedeckt.

Läßt sich das Grundgebilde G_k so wählen, daß es ganz von M_k bedeckt wird, so heißt der Punkt ein innerer Punkt von M_k , sonst ein Randpunkt.

c) Die Menge der inneren Punkte von M_k ist nicht leer.

d) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.

Es darf hier hervorgehoben werden, daß die Voraussetzung, daß M_k eine zusammenhängende Punktmenge bildet, hier nicht gemacht wird.

Ferner sei bemerkt, daß (c) aus (d) folgt, wenn vorausgesetzt wird, daß M_k nicht leer ist.

Folgerungen. Es sei vorausgeschickt, daß die nachstehenden Folgerungen III (1, 2, ..., 11) sich lediglich aus den Voraussetzungen III (a) und III (b) ergeben. Erst die Folgerung III (12) bedarf noch der Voraussetzung III (d).

III (1). Die Menge der Randpunkte von M_k ist abgeschlossen.

Beweis. Es sei P ein innerer Punkt von M_k und G_k gemäß III (b) ein Grundgebilde, das ganz auf M_k liegt, und dessen Inneres den Punkt P einschließlich seiner δ -Umgebung auf M_k bedeckt. Es sei Q ein Punkt der δ -Umgebung von P auf M_k . Dann wird gemäß I (2) auch eine gewisse Umgebung von Q auf M_k vom Innern von G_k überdeckt. Nach der Definition III (b) ist daher auch Q ein innerer Punkt von M_k . Also besteht die δ -Umgebung von P auf M_k aus inneren Punkten von M_k . P kann mithin nicht Häufungspunkt von Randpunkten von M_k sein, w. z. b. w.

Korollar. Die Randpunktmenge kann leer sein. Dann soll M_k geschlossen heißen.

III (2). Es sei P ein beliebiger Punkt von M_k , und es sei G_k gemäß III (b) ein Grundgebilde, dessen Inneres den Punkt P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k bedeckt.

Dann enthält jedes vom Innern von G_k überdeckte Grundgebilde G_k^* , das P noch als inneren Punkt besitzt, ebenfalls in seinem Innern eine gewisse Umgebung von P auf M_k .

Beweis. Gemäß II (1) folgt aus den über G_k^* gemachten Voraussetzungen a fortiori, daß P nebst einer gewissen Umgebung von P auf G_k vom Innern von G_k^* bedeckt wird. Da nun voraussetzungsgemäß P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k von G_k bedeckt wird, so wird auch gemäß I (1) P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k^* bedeckt. w. z. b. w.

III (3). Es sei P ein innerer Punkt von M_k , und es seien G_k und $\bar{G}_k$ gemäß III (b) zwei auf M_k liegende P in ihrem Innern enthaltende Grundgebilde; G_k bedecke die δ -Umgebung von P auf M_k , $\bar{G}_k$ die $\bar{\delta}$ -Umgebung.

Man grenze im Innern von G_k — etwa durch Zusammenziehung des Definitionsparallelotops im k -dimensionalen Parameterraum von G_k — ein P noch im Inneren enthaltendes Teilgrundgebilde G_k^* dergestalt ab, daß es nur aus Punkten besteht, die von P um weniger als $\bar{\delta}$ entfernt sind. Da G_k^* von M_k bedeckt wird, so liegt es ganz in der $\bar{\delta}$ -Umgebung von P auf M_k und mithin auch im Innern von $\bar{G}_k$.

Andererseits zeigt Satz III (2), angewandt auf G_k und G_k^* , daß auch das Innere von G_k^* eine gewisse Umgebung von P auf M_k überdeckt. Wir haben also das folgende Ergebnis:

Es sei P ein innerer Punkt von M_k . Dann läßt sich zu zwei gemäß III (b) P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k im Innern enthaltenden Grundgebilden, die beide ganz auf M_k liegen, stets ein drittes Grundgebilde von denselben Eigenschaften bestimmen, das im Innern von beiden liegt.

III (4). Der Punkt P ist schon dann als innerer Punkt von M_k sichergestellt, wenn sich ein P im Innern enthaltendes Grundgebilde G_k^* bestimmen läßt, das ganz auf M_k liegt.

Beweis. Es bedarf lediglich des Nachweises, daß auch eine gewisse Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k^* bedeckt wird.

Nun gibt es gemäß III (b) ein Grundgebilde G_k , dessen Inneres P nebst einer δ -Umgebung auf M_k bedeckt. Diese bedeckt wiederum, weil G_k^* auf M_k liegt, die δ -Umgebung von P auf G_k^* . Also wird a fortiori die δ -Umgebung von P auf G_k^* vom Innern von G_k bedeckt. Gemäß II (1) wird daher auch eine gewisse Umgebung von P auf G_k vom Innern von G_k^* bedeckt. Hieraus und aus der Definitionseigenschaft von G_k , eine gewisse Umgebung von P auf M_k zu bedecken, folgt gemäß I (1), daß auch eine gewisse Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k^* bedeckt wird, w. z. b. w.

Dieser Satz III (4) läßt sich auch so aussprechen:

Liegt ein Grundgebilde G_k^* auf M_k , so ist jeder innere Punkt von G_k^* auch ein innerer Punkt von M_k .

III (5). Der Satz III (4) läßt sich folgendermaßen verschärfen:

Der Punkt P ist schon dann als innerer Punkt von M_k sichergestellt, wenn sich ein P im Innern enthaltendes Grundgebilde G_k bestimmen läßt, so daß eine δ -Umgebung von P auf G_k von M_k bedeckt wird.

Beweis. Wir können, wie beim Beweise von III (3), im Innern von G_k ein P noch im Innern enthaltendes Teilgrundgebilde G_k^* so abgrenzen, daß es ganz in die δ -Umgebung von P auf G_k hineinfällt und mithin voraussetzungsgemäß auf M_k liegt. Damit ist der zu beweisende Satz III (5) auf den Satz III (4) zurückgeführt.

III (6). Beschränkt man sich nur auf solche, in ihrer Existenz durch III (b) gesicherten Grundgebilde G_k , bei welchen von vornherein vorausgesetzt wird, daß ihr Inneres den Punkt P einschließlich einer gewissen Umgebung von P auf M_k enthält, so läßt der Satz III (5) sich folgendermaßen umkehren:

Ist P ein innerer Punkt von M_k , so besteht auch eine gewisse Umgebung von P auf G_k nur aus inneren Punkten von M_k .

Beweis. Definitionsgemäß gibt es jedenfalls ein P im Innern enthaltendes Grundgebilde G'_k , das von M_k bedeckt wird. Da nun eine δ -Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k bedeckt wird, so wird a fortiori auch die δ -Umgebung von P auf G'_k vom Innern von G_k bedeckt. Gemäß II (1) wird daher auch eine gewisse Umgebung von P auf G_k vom Innern von G'_k bedeckt. Sie besteht daher nur aus Punkten von M_k , und zwar gemäß dem Schlußsatz von III (4) nur aus inneren Punkten von M_k , w. z. b. w.

III (7). Die Folgerungen III (5) und III (6) lassen sich so zusammenfassen:

Es sei P ein Punkt von M_k ; es sei G_k gemäß III (b) ein Grundgebilde, dessen Inneres P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k bedeckt.

Unter dieser Voraussetzung ist P dann und nur dann ein Randpunkt von M_k , wenn P relativ zu G_k ein Randpunkt des Durchschnitts der Punktmenge M_k und G_k ist, d. h. wenn in jeder Umgebung von P auf G_k Punkte liegen, die nicht zu M_k gehören.

III (8). Es sei P ein Randpunkt von M_k . Dann gibt es ein P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_k im Innern enthaltendes Grundgebilde $\bar{G}_k$ von der Eigenschaft, daß die Gesamtheit der im Innern von $\bar{G}_k$ gelegenen inneren Punkte von M_k eine zu $\bar{G}_k$ im Sinne von II (2) relativ offene Punktmenge bildet.

Daß diese Punktmenge nicht leer ist, wird erst durch Heranziehung von III (d) gesichert.

Ferner kann dabei noch verlangt werden, daß $\bar{G}_k$ im Innern eines vorgegebenen Grundgebildes G_k liegt, dessen Inneres den Punkt P einschließlich einer δ -Umgebung von P auf M_k bedeckt.

Beweis. Es sei Q ein in der δ -Umgebung von P auf M_k gelegener Punkt. Gemäß I (2) wird dann eine gewisse Umgebung von Q auf M_k ebenfalls vom Innern von G_k bedeckt. Ist nun Q ein innerer Punkt von M_k , so folgt hieraus gemäß III (6), daß auch eine gewisse Umgebung von Q auf G_k nur aus inneren Punkten von M_k besteht.

Also bildet die Gesamtheit der in der δ -Umgebung von P gelegenen inneren Punkte von M_k eine zu G_k relativ-offene Punktmenge.

Man grenze nun im Innern von G_k etwa wie in III (3), ein P noch im Innern enthaltendes Teilgrundgebilde $\bar{G}_k$ so ab, daß es ganz in die δ -Umgebung von P auf G_k fällt. Das Grundgebilde $\bar{G}_k$ hat dann wegen II (4) die im Satze III (8) geforderten Eigenschaften, w. z. b. w.

III (9). Ist P ein Randpunkt von M_k und $\bar{G}_k$ ein Grundgebilde von den unter III (8) angegebenen Eigenschaften, so hat jedes im Innern von $\bar{G}_k$ liegende, P noch im Innern enthaltende Grundgebilde, dieselben Eigenschaften.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus den Sätzen III (2) und II (4).

III (10). Es sei ω eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge im n -dimensionalen Raum. Es sei jedem Punkt P von ω eine n -dimensionale Kugel von beliebig veränderlichem Radius $\delta_P > 0$ zugeordnet. Dann besagt der Borelsche Satz, daß sich unter diesen Kugeln schon endlich viele so auswählen lassen, daß jeder Punkt von ω im Innern mindestens einer der ausgewählten Kugeln liegt.

Das läßt sich in unserer Terminologie auch so ausdrücken:

Ist jedem Punkte P von ω eine δ_P -Umgebung von P auf ω zugeordnet, so genügen schon endlich viele dieser Umgebungen, um ω zu überdecken.

Wegen III (a) und III (b) läßt sich daher M_k schon vom Innern von endlich vielen der Grundgebilde G_k überdecken.

III (11). Wegen III (b) und III (3) gibt es zu jedem inneren Punkt von M_k eine eindeutig bestimmte Tangentenschar vom Range k , welche die k -dimensionale Tangentialebene bildet, und senkrecht zu dieser eine eindeutig bestimmte Normalenschar vom Range $n - k$, welche die Normalebene bildet. Wegen III (1) ändern sich die k -dimensionale Tangentialebene und die $(n - k)$ -dimensionale Normalebene stetig mit dem Punkte, zu welchem sie gehören.

III (12). Auch zu jedem Randpunkt P von M_k erhält man eine Tangentenschar vom Range k , welche die k -dimensionale Tangentialebene bildet, und senkrecht zu dieser eine Normalenschar vom Range $n - k$, welche die $(n - k)$ -dimensionale Normalebene bildet, indem man die k -dimensionale

Tangentialebene und die $(n - k)$ -dimensionale Normalebene in bezug auf ein beliebiges Grundgebilde G_k konstruiert, dessen Inneres gemäß III (b) den Punkt P nebst einer δ -Umgebung von ihm auf M_k bedeckt.

Diese Konstruktion ist eindeutig, d. h. von der Wahl des Grundgebildes G_k unabhängig.

Beweis. Es genügt, die Unabhängigkeit der $(n - k)$ -dimensionalen Normalebene von der Wahl von G_k nachzuweisen.

Wie im Laufe des Beweises von III (8) gezeigt, bildet die Gesamtheit der in der δ -Umgebung von P gelegenen inneren Punkte von M_k eine zu G_k relativ-offene Punktmenge. Ist daher Q ein innerer Punkt von M_k in der δ -Umgebung von P , so erhält man in Q die Normalebene zu M_k , indem man die Normalebene zu G_k bildet. Es sei nun P^m eine unendliche Folge von inneren Punkten von M_k , welche gegen P konvergiert. Die Existenz einer solchen Punktfolge ist durch III (d) sichergestellt. Man kann annehmen, daß alle Punkte P^m innerhalb der δ -Umgebung von P auf M_k liegen. Die Normalebene des Punktes P^m zu M_k ist dann identisch mit seiner Normalebene zu G_k , und letztere konvergiert gegen die Normalebene von P zu G_k . Also konvergiert die in P^m als innerem Punkt von M_k gemäß III (11) eindeutig bestimmte Normalebene zu M_k gegen die Normalebene in P zu G_k . Letztere ist daher ebenfalls eindeutig bestimmt, d. h. unabhängig von der Wahl von G_k , w. z. b. w.

Es sei, wie oben, P ein Randpunkt von M_k und G_k ein Grundgebilde, dessen Inneres den Punkt P einschließlich einer δ -Umgebung von ihm auf M_k bedeckt. Ist dann P' ein beliebiger innerer oder Randpunkt von M_k innerhalb der δ -Umgebung von P , so wird gemäß I (2) auch der Punkt P' nebst einer gewissen Umgebung von ihm auf M_k von G_k bedeckt. Infolgedessen ist in jedem Punkt P' die Normalebene zu M_k identisch mit der Normalebene zu G_k . Daraus folgt:

Die Stetigkeit der Änderung der $(n - k)$ -dimensionalen Normalebene und damit auch der k -dimensionalen Tangentialebene zu M_k bleibt auch erhalten, wenn der Bezugspunkt auf dem Rande von M_k liegt.

§ 6.

Erklärung einer Klasse von Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum.

Wir wollen im n -dimensionalen Raum eine Klasse von Mannigfaltigkeiten definieren.

I. Eine *reguläre 0-dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein Punkt. Jede Gerade durch diesen Punkt gilt als Normale der Mannigfaltigkeit.

II. Eine *reguläre 1-dimensionale Mannigfaltigkeit* M_1 wird in folgender Weise definiert:

M_1 genügt den Definitionsforderungen § 5 III (a, b, c, d) für $k = 1$. Dazu kommt noch die Forderung:

II (e). *Die Gesamtheit der inneren Punkte von M_1 ist zusammenhängend*, d. h. je zwei innere Punkte von M_1 sind auf einem nur durch innere Punkte laufendem Wege verbindbar. Unter einem „Wege“ wird dabei, wie üblich, das eindeutige stetige Bild einer abgeschlossenen endlichen geraden Strecke verstanden — ohne die Voraussetzung der eindeutigen Umkehrbarkeit der Abbildung.

Folgerungen. Es gelten zunächst alle Folgerungen § 5 III (1, 2, . . . , 12). Den Folgerungen § 5 III (11, 12) entspricht insbesondere der Satz:

§ 6 II (11, 12). In jedem Punkte von M_1 , auch in jedem Randpunkte, gibt es eine wohlbestimmte Tangente und eine wohlbestimmte Normalschar vom Range $n - 1$, welche die $(n - 1)$ -dimensionale Normalebene bildet. Tangente und Normalebene ändern sich stetig mit dem Bezugspunkte.

In jedem Randpunkte von M_1 , den wir als 0-dimensionale reguläre Randmannigfaltigkeit ansehen, gibt es noch in bezug auf diese Randmannigfaltigkeit gemäß § 6 I eine Normalschar vom Range n , die aus allen Geraden durch diesen Punkt besteht.

Die Gesamtheit *aller* dieser Normalen heißt das *vollständige* Normalsystem der Mannigfaltigkeit M_1 .

Da gemäß § 5 III (10) auf Grund des Borelschen Satzes M_1 sich schon vom Innern von endlich vielen Grundgebilden G_1 bedecken läßt, so folgt aus § 6 II (e) leicht, daß M_1 entweder *keinen Randpunkt* hat, d. h. *geschlossen* ist, oder *zwei*.

II (13). Es werde M_1 von einer $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene geschnitten. Es finde nirgends eine Berührung statt, und zwar in folgendem Sinne: In keinem Schnitte liege die Ebene senkrecht zu einer der zu diesem Punkte gehörenden Normalen des *vollständigen* Normalsystems von M_1 . In der letzten Voraussetzung ist also insbesondere auch die Annahme inbegriffen, daß die Ebene durch keinen der Randpunkte (Endpunkte) von M_1 geht.

Dann besteht der Schnitt der Ebene mit M_1 aus endlich vielen regulären 0-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, d. h. aus endlich vielen Punkten.

Gäbe es nämlich unendlich viele Schnittpunkte, so müßten diese einen Häufungspunkt haben. In einem solchen müßte aber eine Berührung stattfinden — gegen die Voraussetzung.

II (14). *Unter den Voraussetzungen von II (13) wird M_1 durch die Schnittebene in endlich viele reguläre 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten zerlegt.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Ebene die Gleichung $x_1 = c$ hat. Es genügt dann, den zu beweisenden Sachverhalt für diejenige Punktmenge T festzustellen, für welche $x_1 \leq c$ ist.

Zunächst ist T beschränkt und abgeschlossen, erfüllt also die Definitionsforderung § 5 III (a). Auch § 5 III (b) bleibt für T erfüllt, und zwar dergestalt, daß für $x_1 < c$, ein innerer Punkt von M_1 ein innerer Punkt von T bleibt und ein Randpunkt von M_1 ein Randpunkt von T . Auch § 5 III (d) bleibt, wie zunächst erhellt, für die Randpunkte von T , für welche $x_1 < c$ ist, erfüllt.

Es sei nun P ein Schnittpunkt von M_1 mit der Ebene, also ein Punkt, für welchen $x_1 = c$ ist. Dann kann, wie bei den Voraussetzungen über die Schnittebene ausdrücklich hervorgehoben, P kein Randpunkt von M_1 sein. Es gibt also ein auf M_1 liegendes Grundgebilde G_1 , dessen Inneres P nebst einer gewissen Umgebung von P auf M_1 enthält. Gemäß II (13) gibt es nur endlich viele Schnittpunkte von M_1 mit der Ebene. Wir können daher G_1 so klein wählen, daß kein weiterer Schnittpunkt und auch kein Randpunkt von M_1 auf G_1 liegt. Da voraussetzungsgemäß G_1 die Ebene nicht berührt, so zerlegt der Punkt P G_1 in zwei nicht leere Stücke. In dem einen gilt $x_1 < c$ und es besteht nur aus inneren Punkten von M_1 und mithin auch von T , in dem anderen Stück gilt $x_1 > c$ und es enthält mithin keinen Punkt von T . Gemäß § 5 III (7) ist daher P ein Randpunkt von T , und da P Häufungspunkt von inneren Punkten von T ist, so ist die Forderung § 5 III (d) nunmehr für alle Randpunkte von T erfüllt. Damit ist auch bewiesen, daß die Menge der inneren Punkte von T nicht leer ist, d. h. daß auch die Forderung § 5 III (c) erfüllt ist.

Es sei nun II ein innerer Punkt von M_1 , für welchen $x_1 > c$ ist und den wir festhalten. Es sei Q ein beliebiger innerer Punkt von T , also auch ein innerer Punkt von M_1 . Gemäß II (e) ist Q mit II auf einem Wege verbindbar, der nur aus inneren Punkten von M_1 besteht. In der Durchlaufungsrichtung von Q nach II muß dieser Weg einen ersten Schnittpunkt mit der Ebene $x_1 = c$ haben. Es sei P dieser Schnittpunkt. Dann ist Q auf einem nur aus inneren Punkten von T bestehenden Wege verbindbar mit dem zu T gehörenden der beiden zusammenhängenden Stücke von G_1 , in welche, wie oben gezeigt, G_1 durch P zerlegt wird.

Da es gemäß II (13) nur endlich viele solche Schnittpunkte gibt, so zerfallen die inneren Punkte von T in endlich viele zusammenhängende Komponenten. T zerfällt daher auch in endlich viele reguläre 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten, w. z. b. w.

III. Wir definieren jetzt *rekursiv* in aufsteigender Dimensionenzahl, indem wir die Folgerungen aus den Definitionen unter Heranziehung des Induktionsschlusses beweisen:

Eine *reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeit* M_k im n -dimensionalen Raum, $2 \leq k \leq n - 1$, wird durch folgende Eigenschaften definiert: M_k genügt zunächst den Forderungen § 5 III (a, b, c, d).

Dazu kommen noch die Eigenschaften:

III (e). *Die Gesamtheit der inneren Punkte von M_k ist zusammenhängend* — im üblichen, unter II (e) schon erklärten Sinn dieses Ausdrucks.

III (f). Wenn überhaupt Randpunkte vorhanden sind, d. h. wenn M_k nicht geschlossen ist, so besteht der Rand aus endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemein haben können, die für beide wiederum Randpunkte sind.

Folgerungen. Es gelten zunächst alle Folgerungen § 5 III (1, 2, ..., 11, 12). Den Folgerungen § 5 III (11, 12) entspricht insbesondere der Satz:

III (11, 12). In jedem Punkte von M_k , auch in jedem Randpunkte, gibt es eine wohlbestimmte Tangentschar vom Range k , welche die k -dimensionale Tangentialebene bildet, und desgleichen eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range $(n - k)$, welche die $(n - k)$ -dimensionale Normalebene bildet. Tangentialebene und Normalebene ändern sich stetig mit dem Bezugspunkte.

Fügt man zu diesen Normalen die vollständigen Normalensysteme hinzu, welche zu jeder der endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von M_k gehören, so erhält man das vollständige Normalensystem von M_k .

III (13). M_k werde von einer $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene geschnitten. Es finde nirgends eine Berührung statt, und zwar in folgendem Sinne: In keinem Schnittpunkt liege die Ebene senkrecht zu einer zu diesem Punkte gehörenden Normalen des vollständigen Normalensystems von M_k .

Dann besteht der Schnitt aus endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Mannigfaltigkeiten Randpunkte sein — und zwar für beide Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer ihrer $(k - 2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen.

Endlich geht jeder innere Punkt von M_k in einen inneren Punkt einer der endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Schnittmannigfaltigkeiten über, jeder Randpunkt von M_k in einen Randpunkt des Schnittes.

Beweis. Wir schicken dem Beweise dieses Satzes eine Disposition voraus, welche angibt, in welcher Folge die einzelnen Aussagen zu Beweis kommen:

Zunächst werden für die Schnittmannigfaltigkeit unter (A) die Eigenschaften § 5 III (a) und III (b) bewiesen.

Unter (B) wird bewiesen, daß auf dem Schnitt ein innerer Punkt von M_k in einen inneren Punkt des Schnittes übergeht.

(C) beschäftigt sich mit denjenigen auf dem Schnitt gelegenen Randpunkten von M_k , welche innere Punkte einer der regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten R_{k-1} von M_k sind. Es wird bewiesen, daß ein solcher Randpunkt auch in einen Randpunkt des Schnittes übergeht, und daß

für diesen auch § 5 III (d) erfüllt ist, und zwar dergestalt, daß in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes alle inneren Punkte des Schnittes zusammenhängen.

(D) behandelt endlich diejenigen Randpunkte von M_k , welche nicht innere Punkte eines R_{k-1} sind, d. h. welche auf dem Rande von endlich vielen der R_{k-1} liegen. Erst an dieser Stelle wird von dem Verfahren des Induktionsschlusses Gebrauch gemacht, indem der zu beweisende Satz III (13) für die R_{k-1} vollinhaltlich als gültig vorausgesetzt wird. Und zwar ergibt sich auf diesem Wege zunächst, daß § 5 III (d) auch für *diese* Randpunkte des Schnittes gilt, womit die Gültigkeit von § 5 III (d) für *alle* Randpunkte des Schnittes bewiesen ist. Gleichlaufend ergibt sich auch die Aussage des Satzes III (13), daß auf dem Schnitt ein Randpunkt von M_k in einen Randpunkt des Schnittes übergeht, als für *alle* Randpunkte von M_k gültig.

Unter (E) wird gezeigt, daß an Stelle der Gültigkeit von § 6 III (e) der Satz tritt, daß der Schnitt aus endlich vielen Komponenten besteht, deren jede eine reguläre $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Endlich wird hier auch die Aussage des Satzes III (13) bewiesen, laut welcher zwei verschiedene Komponenten keinen Punkt gemein haben können, der im Innern einer ihrer $(k-2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegt.

(A) Zunächst ist die Menge der Schnittpunkte beschränkt und abgeschlossen. Also ist § 5 III (a) erfüllt.

Die Ebene habe die Gleichung $x_1 = c$. Es sei P ein beliebiger innerer oder Randpunkt von M_k und G_k ein gemäß § 5 III (b) P im Innern enthaltendes Grundgebilde, dessen Inneres eine δ -Umgebung von P auf M_k enthält. G_k werde gegeben durch die Gleichungen

$$x_v = x_v(t_1, t_2, \dots, t_k), \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Da M_k in P von der Ebene nicht berührt wird, so ist dort mindestens eine der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_1, x_{v_2}, x_{v_3}, \dots, x_{v_k})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \neq 0.$$

Wir können annehmen, daß etwa ist

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \neq 0.$$

Daher läßt sich ein neues in G_k enthaltendes Grundgebilde G'_k bestimmen, das P im Innern enthält, auf $x_1, x_2, \dots, x_k$ als Parameter bezogen ist und eine δ' -Umgebung von P auf M_k im Innern enthält. Bei festgehaltenem $x_1 = c$ wird P innerer Punkt eines G'_{k-1} , das auf $x_2, x_3, \dots, x_k$ als Parameter bezogen ist und eine δ' -Umgebung von P in bezug auf den Schnitt der Ebene mit M_k im Innern enthält.

Die Eigenschaft § 5 III (b) ist also für jeden Punkt des Schnittes erfüllt.

(B) Ist P innerer Punkt von M_k , so kann man annehmen, daß G_k und mithin auch G'_k nur aus Punkten von M_k bestehen. Also besteht auch G'_{k-1} nur aus Punkten des Schnittes. Damit ist also auch bewiesen, daß ein innerer Punkt von M_k in einen inneren Punkt des Schnittes übergeht.

(C) Es sei nun P ein Randpunkt von M_k , und zwar ein innerer Punkt einer der Randmannigfaltigkeiten R_{k-1} . Wegen § 6 III (f) kann dann P auf keiner anderen Randmannigfaltigkeit liegen. Wir können daher das oben Definierte auf $x_1, x_2, \dots, x_k$ als Parameter bezogene G'_k so klein wählen, daß die auf G'_k liegenden Randpunkte von M_k ein und derselben Randmannigfaltigkeit R_{k-1} angehören. G'_k enthalte in seinem Innern die δ' -Umgebung von P auf M_k .

In P ist $x_1 = c$; ferner seien in P $x_\lambda = x_\lambda^0$, $\lambda = 2, 3, \dots, k$. Dann wird G'_k gegeben durch die Gleichungen

$$(55) \quad \begin{aligned} x_r &= f_r(x_1, x_2, \dots, x_k), & v &= k+1, k+2, \dots, n, \\ a''_1 &\leq x_1 \leq a'_1, & a''_\lambda &\leq x_\lambda \leq a'_\lambda, & \lambda &= 2, 3, \dots, k. \\ a''_1 &< c < a'_1, & a''_\lambda &< x_\lambda^0 < a'_\lambda, \end{aligned}$$

Gemäß § 5 III (b) gibt es ein P im Innern enthaltendes Grundgebilde Γ_{k-1} , das nur aus Punkten von R_{k-1} besteht und dessen Inneres eine gewisse Umgebung von P in bezug auf R_{k-1} enthält. Man kann annehmen, daß Γ_{k-1} ganz im Innern von G'_k enthalten ist. Γ_{k-1} ist also gegeben durch die Gleichungen (55) in Verbindung mit Gleichungen von der Form

$$x_\mu = x_\mu(t_1, \dots, t_{k-1}), \quad \mu = 1, 2, \dots, k.$$

Gemäß Voraussetzung wird Γ_{k-1} in P von der Ebene $x_1 = c$ nicht berührt. Daher ist in P eine der Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_1, x_{v_2}, x_{v_3}, \dots, x_{v_{k-1}})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_{k-1})} \neq 0,$$

wobei $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ $k-2$ Indizes unter den $k-1$ Indizes $2, 3, \dots, k$ bedeuten. Man kann annehmen, daß etwa ist

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_{k-1})} \neq 0.$$

Man kann daher ein neues, im Innern von Γ_{k-1} enthaltenes Grundgebilde Γ'_{k-1} bestimmen, das gegeben wird durch die Gleichungen (55) in Verbindung mit einer Gleichung

$$(56) \quad \begin{aligned} x_k &= f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), & c'' &\leq x_1 \leq c', & b''_q &\leq x_q \leq b'_q, \\ a''_1 &< c'' < c < c' < a'_1, & a''_q &< b''_q < x_q^0 < b'_q < a'_q, & q &= 2, 3, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Γ'_{k-1} enthält dann in seinem Innern eine gewisse η -Umgebung von P in bezug auf den ganzen Rand von M_k . Man wähle nun die Schranken

$$\begin{aligned} d_1'', d_1', d_2'', d_2', \dots, d_k'', d_k' \\ c'' < d_1'' < c < d_1' < c', \quad b_\varrho'' < d_\varrho'' < x_\varrho^0 < d_\varrho' < b_\varrho', \quad (\varrho = 2, 3, \dots, k-1), \\ a_k'' < d_k'' < x_k^0 < d_k' < a_k' \end{aligned}$$

dergestalt, daß das dem Teilparallelotop

$$(57) \quad d_\mu'' \leq x_\mu \leq d_\mu', \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

durch die Gleichungen (55) entsprechende Grundgebilde G_k'' nur Punkte enthält, die von P um weniger als das oben festgestellte η entfernt sind. G_k'' enthalte die δ'' -Umgebung von P auf M_k . In dem Teilparallelotop (57) entsprechen den auf G_k'' liegenden Randpunkten von M_k nur diejenigen Punkte, welche gleichzeitig auch auf der Fläche

$$(58) \quad \begin{aligned} x_k &= f_k(x_1, \dots, x_{k-1}), & d_\varrho'' &\leq x_\varrho \leq d_\varrho', & \varrho &= 1, 2, \dots, k-1, \\ x_k^{(0)} &= f_k(c, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0) \end{aligned}$$

liegen.

Nun ist $d_k'' < x_k^0 < d_k'$. Man kann daher bei festgehaltenem d_k'' und d_k' die übrigen Schranken d_ϱ'' , d_ϱ' , $\varrho = 1, 2, \dots, k-1$ sich so nahe aneinander gerückt denken, daß für $d_\varrho'' \leq x_\varrho \leq d_\varrho'$, $d_k'' < f_k(x_1, \dots, x_{k-1}) < d_k'$ bleibt. Dann zerlegt die Fläche (58) das Parallelotop (57) in zwei zusammenhängende Gebiete $x_k > f_k(x_1, \dots, x_{k-1})$ und $x_k < f_k(x_1, \dots, x_{k-1})$.

Nun können wir gemäß § 5 III (8) G_k' von vornherein so wählen, daß die im Innern von G_k' gelegenen inneren Punkte von M_k eine relativ-offene Punktmenge zu G_k' bilden, welche wegen § 5 III (d) nicht leer ist. Da G_k'' ganz im Innern von G_k' liegt, so hat gemäß § 5 III (9) G_k'' dieselbe Eigenschaft. Gemäß § 5 II (3) bildet daher im Innern des Definitionsparallelotops (57) von G_k'' die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen auf G_k'' innere Punkte von M_k entsprechen, im Raume $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ eine offene, nicht leere Punktmenge.

Es müssen daher in jedem der beiden Gebiete, in welche das Parallelotop (57) durch die Fläche (58) zerlegt wird, entweder alle oder kein einziger Punkt der obigen offenen Punktmenge angehören; denn den im Innern von G_k'' liegenden Randpunkten von M_k entsprechen, wie oben hervorgehoben, im Innern des Parallelotops (57) ausschließlich die Punkte der Fläche (58). Da nun die offene Punktmenge nicht leer ist, so muß eines der beiden Gebiete nur aus solchen Punkten bestehen, welchen auf G_k'' innere Punkte von M_k entsprechen. Das andere Gebiet kann dann keinen einzigen solchen Punkt enthalten, weil andernfalls der Punkt P sich gegen die Voraussetzung als innerer Punkt von M_k erwiese.

Es bezeichne nun $\bar{G}_{k-1}$ dasjenige $(k-1)$ -dimensionale Grundgebilde, in welches G_k'' übergeht, wenn $x_1 = c$ festgehalten wird. Dann ist $\bar{G}_{k-1}$ bezogen auf das Definitionsparallelotop

$$(59) \quad d_\lambda'' \leq x_\lambda \leq d_\lambda', \quad \lambda = 2, 3, \dots, k$$

und enthält P als inneren Punkt. Da ferner das Innere von G_k'' die δ' -Umgebung von P auf M_k überdeckt, so überdeckt auch das Innere von $\bar{G}_{k-1}$ die δ'' -Umgebung von P auf dem Schnitt. Endlich entsprechen entweder denjenigen Punkten im Innern des Parallelotops (59), für welche

$$x_k > f_k(c, x_2, \dots, x_k)$$

ist, auf $\bar{G}_{k-1}$ innere Punkte von M_k und daher auch, wie unter (B) bewiesen auch innere Punkte des Schnittes, während allen Punkten, für welche

$$x_k < f_k(c, x_2, \dots, x_k)$$

ist, auf $\bar{G}_{k-1}$ Punkte entsprechen, die nicht auf M_k liegen; oder es ist das Umgekehrte der Fall.

Gemäß § 5 III (7) wird daher der Punkt P auch ein Randpunkt des Schnittes im Sinne von § 5 III (b).

Ferner ist auch § 5 III (d) für den Punkt P in bezug auf den Schnitt erfüllt; denn P ist Häufungspunkt von inneren Punkten des Schnittes.

Endlich ergibt sich aus dem Obigen, daß alle inneren Punkte des Schnittes in genügender Nähe von P auf Wegen miteinander verbindbar sind, die nur aus inneren Punkten des Schnittes bestehen.

(D) Da wir den hier zu beweisenden Satz § 6 III (13) für $k-1$ als vollständig gültig annehmen dürfen, so ergibt sich, daß die Ebene $x_1 = c$ jede der Randmannigfaltigkeiten R_{k-1} von M_k gar nicht oder in endlich vielen regulären $(k-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten R'_{k-2} schneidet. Dabei geht jeder innere Punkt eines R_{k-1} in einen inneren Punkt eines R'_{k-2} über und jeder Randpunkt in einen Randpunkt.

Ist nun endlich P ein Randpunkt von M_k , der nicht innerer Punkt von einem R_{k-1} ist, so gehen durch P höchstens endlich viele R_{k-1} und mithin auch endlich viele R'_{k-2} und P wird Randpunkt von diesen. Da § 5 III (d) gemäß dem Verfahren des Induktionsschlusses für den Schnitt mit jedem R_{k-1} als gültig betrachtet werden darf, so ist P Häufungspunkt von inneren Punkten der Mannigfaltigkeiten R'_{k-2} , d. h. von inneren Punkten der R_{k-1} , welche auf der Ebene $x_1 = c$ liegen. Da nun diese Punkte, wie am Schluß von (C) auseinandergesetzt, Häufungspunkte von inneren Punkten des Schnittes der Ebene mit M_k sind, so ist nunmehr § 5 III (d) auch für P und damit für alle Randpunkte des Schnittes mit M_k bewiesen. Ferner ist jetzt auch die Aussage des zu beweisenden Satzes III (13), daß ein auf dem Schnitt

gelegener Randpunkt von M_k in einen Randpunkt des Schnittes übergeht, für *alle* Randpunkte von M_k bewiesen.

(E) § 6 III (e) braucht natürlich nicht erfüllt zu sein; es bleibt vielmehr noch zu zeigen, daß der Schnitt aus *endlich* vielen Komponenten besteht, d. h. aus endlich vielen abgeschlossenen Punktmengen, deren innere Punkte zusammenhängen. Das soll jetzt bewiesen werden:

Ist zunächst P innerer Punkt einer der Randmannigfaltigkeiten des Schnittes R'_{k-2} , so hängen alle Punkte des Schnittes in genügender Nähe von P miteinander zusammen, denn P ist dann auch innerer Punkt eines R_{k-1} und für diese ist das am Schluß von (C) klargelegt. Da nun wegen der Gültigkeit von § 6 III (e) für jedes R'_{k-2} je zwei innere Punkte eines und desselben R'_{k-2} auf einem Wege, der nur aus inneren Punkten desselben besteht, sich verbinden lassen, so folgt leicht, daß die inneren Punkte eines R'_{k-2} nur Randpunkte einer einzigen Komponente sein können. Da es nur endlich viele R'_{k-2} gibt, so ist jetzt bewiesen, daß es nur endlich viele Komponenten gibt, auf deren Rand ein innerer Punkt eines R'_{k-2} liegt. Gleichzeitig ist damit auch die Aussage des zu beweisenden Satzes III (13) bewiesen, laut welcher zwei verschiedene Komponenten keinen inneren Punkt eines R'_{k-2} gemein haben können.

Wir haben jetzt noch zu beweisen:

(F) Es gibt auf dem Schnitt nur endlich viele randlose, d. h. geschlossene Komponenten.

(G) Ist P ein auf dem Rande eines R_{k-1} und mithin auch eines R'_{k-2} gelegener Randpunkt einer Komponente des Schnittes, so enthält der Rand dieser Komponente mindestens eines der R'_{k-2} , auf welchen P liegt, vollständig.

Diese beiden letzten Aussagen ergeben, daß der Schnitt nur endlich viele Komponenten besitzt, und daß für jede derselben auch § 6 III (f) erfüllt ist. Mit dem noch zu führenden Beweise der Aussagen (F) und (G) ist also der Beweis des Satzes III (13) in allen Stücken erbracht.

Um nun die Gültigkeit von (F) und (G) einzusehen, genügt es, die folgende Aussage (H) zu beweisen:

(H) Ist P ein auf dem Rande eines R_{k-1} und mithin auch auf dem Rande eines R'_{k-2} gelegener Punkt des Schnittes, so gehört jeder innere Punkt des Schnittes in genügender Nähe von P einer Komponente an, deren Rand eines der R'_{k-2} , auf deren Rande P liegt, vollständig enthält.

Daß aus (H) (G) folgt, ist klar. Aus (H) folgt aber auch (F). Denn zunächst ergibt (H), daß in einer gewissen Umgebung eines auf dem Rande eines R_{k-1} gelegenen Schnittpunktes P kein Punkt einer geschlossenen Komponente angehören kann. Dasselbe gilt aber auch, wie unter (C) gezeigt, für jeden Randpunkt P , der im Innern eines R_{k-1} liegt. Also gibt es für

jeden Randpunkt des Schnittes eine gewisse Umgebung, innerhalb welcher kein Punkt einer geschlossenen Komponente angehören kann. Die Vereinigungsmenge aller geschlossenen Komponenten kann also keinen Häufungspunkt auf dem Rande des Schnittes haben. Gäbe es nun unendlich viele geschlossene Komponenten, so nehme man aus jeder einen Punkt heraus. Diese Punkte müßten einen Häufungspunkt haben, der, wie eben gezeigt, nicht auf dem Rande des Schnittes liegen kann. Er kann aber natürlich auch nicht im Innern des Schnittes liegen, da in einer gewissen Umgebung eines inneren Punktes alle Punkte des Schnittes ein und derselben Komponente angehören müssen.

Damit ist also gezeigt, daß aus (H) auch (F) folgt. Es erübrigt sich also nur noch der Beweis von (H), der nunmehr geführt werden soll:

Zunächst können wir, wie in (A) gezeigt, ein P im Innern enthaltendes, eine gewisse Umgebung von P auf dem Schnitt überdeckendes Grundgebilde G'_{k-1} bestimmen, welches auf $k-1$ unter den Koordinaten $x_2, x_3, \dots, x_n$ also etwa auf $x_2, x_3, \dots, x_k$ als Parameter bezogen ist. Man betrachte nun die Gesamtheit derjenigen R'_{k-2} , welche P nicht enthalten und auf denjenigen R'_{k-2} , welche P enthalten, wiederum diejenigen ihrer Randmannigfaltigkeiten R'_{k-3} , welche P nicht enthalten. Da jede dieser endlich vielen Mannigfaltigkeiten, auf welchen P nicht liegt, abgeschlossen ist, so läßt sich G'_{k-1} von vornherein so klein abgrenzen, daß es keinen Punkt einer dieser Mannigfaltigkeiten enthält. Damit ist erreicht, daß die Gesamtheit der Randpunkte des Schnittes, welche auf G'_{k-1} liegen, nur den Randmannigfaltigkeiten R'_{k-2} , R'_{k-3} angehört, welche P enthalten. Zu jedem der P enthaltenden R'_{k-3} gibt es ein P im Innern enthaltendes Grundgebilde I'_{k-3} , welches eine gewisse Umgebung von P in bezug auf dieses R'_{k-3} enthält. Die Gesamtheit dieser endlich vielen I'_{k-3} enthält also eine gewisse δ'' -Umgebung von P in bezug auf die Gesamtheit der genannten R'_{k-3} . Man kann sich nun G'_{k-1} wiederum so klein abgegrenzt denken, daß es nur aus Punkten besteht, die von P um weniger als δ'' entfernt sind. Die Gesamtheit der den R'_{k-3} angehörenden Randpunkte des Schnittes, welche auf G'_{k-1} liegen, wird also von den endlich vielen I'_{k-3} überdeckt.

Es werde nun G'_{k-1} gegeben durch die Gleichungen

$$(60) \quad x_\mu = x_\mu(x_2, x_3, \dots, x_k), \quad \mu = k+1, k+2, \dots, n,$$

$$(61) \quad \begin{aligned} \alpha''_\lambda &\leq x_\lambda \leq \alpha'_\lambda, \\ \alpha''_\lambda &< x_\lambda^0 < \alpha'_\lambda, \end{aligned} \quad \lambda = 2, 3, \dots, k,$$

wobei dem Punkte P im Definitionsparallelotop (61) der Punkt $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_k^0)$ entsprechen möge.

Jedes der Grundgebilde I'_{k-3} wird dann, solange es auf G'_{k-1} verläuft, durch Gleichungen von der Gestalt

$$(62) \quad x_\lambda = \varphi_{\lambda\varrho}(t_1, \dots, t_{k-3}), \quad \lambda = 2, 3, \dots, k$$

in Verbindung mit den Gleichungen (60) gegeben, wobei der Index ϱ die verschiedenen Grundgebilde markiert.

Nun haben wir unter (A), (B), (C), (D) schon bewiesen, daß der Schnitt die Forderungen § 5 III (a, b, c, d) erfüllt. Daher gelten für den Schnitt auch die Sätze § 5 III (8) und § 5 III (9). Wir können uns daher das Definitions-parallelotop (61) so gewählt denken, daß die im Innern von G'_{k-1} gelegenen inneren Punkte des Schnittes eine relativ-offene Punktmenge zu G'_{k-1} bilden, welche nicht leer ist.

Gemäß § 5 II (3) bilden dann auch im Innern des Parallelotops (61) diejenigen Punkte, welchen auf G'_{k-1} innere Punkte des Schnittes entsprechen, im Raume $(x_2, x_3, \dots, x_k)$ eine offene Punktmenge, welche nicht leer ist.

Es sei Q einer ihrer Punkte, $\bar{Q}$ sei ein Punkt im Innern des Parallelotops, welchem auf G'_{k-1} ein nicht auf dem Schnitt gelegener Punkt entspricht.

Nun kann man gemäß § 4 VI Q und $\bar{Q}$ durch einen nur aus zwei geraden Strecken bestehenden, ganz im Innern des Parallelotops verlaufenden Weg verbinden, der keines der Grundgebilde (62) schneidet. Auf diesem Wege müssen Randpunkte der oben erwähnten offenen Punktmenge liegen.

Es sei Q^* von Q aus gesehen der erste dieser Randpunkte. Dem Punkte Q^* muß dann auf G'_{k-1} ein Randpunkt des Schnittes entsprechen, und da dieser Randpunkt auf keinem der Grundgebilde (62) und mithin auch auf keinem der R'_{k-3} liegen kann, so ist er ein innerer Punkt eines der R'_{k-2} , w. z. b. w.

III (14). *Unter den Voraussetzungen von III (13) wird M_k durch die Schnittebene in endlich viele reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeiten zerlegt.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Schnittebene die Gleichung

$$x_1 = c$$

hat. Es genügt dann den zu beweisenden Sachverhalt für diejenige Punktmenge T festzustellen, für welche

$$x_1 \leq c$$

ist.

Zunächst ist T beschränkt und abgeschlossen, erfüllt also die Forderung § 5 III (a).

Auch § 5 III (b) bleibt für T offenbar erfüllt und zwar dergestalt, daß für $x_1 < c$ ein innerer Punkt von M_k ein innerer Punkt von T bleibt und ein Randpunkt von M_k ein Randpunkt von T .

Auch § 5 III (d) bleibt, wie zunächst erhellt, für die Randpunkte von T , für welche $x_1 < c$ ist, erfüllt.

Nun wird gemäß dem eben bewiesenen Satze III (13) M_k von der Ebene $x_1 = c$ in endlich vielen $(k - 1)$ -dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten

M'_{k-1} geschnitten, von denen je zwei nur Punkte gemein haben können, die auf beiden Randpunkte sind. Dabei geht ein innerer Punkt von M_k in einen inneren Punkt eines der M'_{k-1} über und ein Randpunkt von M_k in einen Randpunkt von einem oder einigen der M'_{k-1} .

Es sei nun P ein auf der Ebene $x_1 = c$ gelegener innerer Punkt von M_k . Dann gibt es, wie beim Beweis von III (13) unter (A) und (B) ausgeführt, ein den Punkt P nebst einer δ' -Umgebung von P auf M_k im Innern enthaltendes Grundgebilde G'_k , das nur aus Punkten von M_k besteht, und auf $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ als Parameter bezogen ist. Im Innern von G'_k entsprechen den Punkten, in welchen $x_1 < c$ ist, innere Punkte von T und den Punkten, für welche $x_1 > c$ ist, nicht zu T gehörende Punkte. Da G'_k den Punkt P nebst seiner δ' -Umgebung auf T a fortiori im Innern enthält, so ist P nach § 5 III (7) ein Randpunkt von T . Ferner sehen wir, daß je zwei in der δ' -Umgebung von P auf T gelegene innere Punkte von T auf einem nur aus inneren Punkten von T bestehenden Wege verbindbar sind.

Da gemäß § 6 III (e) je zwei innere Punkte eines und desselben M'_{k-1} auf einem nur aus inneren Punkten dieses M'_{k-1} bestehenden Wege verbindbar sind, so folgt jetzt leicht, daß die inneren Punkte von M'_{k-1} nur Randpunkte einer und derselben Komponente von T sein können.

Da ferner, wie eben gezeigt, jeder innere Punkt P eines M'_{k-1} Häufungspunkt von inneren Punkten von T ist, und da wegen § 5 III (d) jeder Randpunkt eines M'_{k-1} Häufungspunkt von inneren Punkten dieses M'_{k-1} ist, so ist jetzt die Gültigkeit von § 5 III (d) für alle Punkte von T bewiesen, welche auf der Schnittebene $x_1 = c$ liegen.

Es sei nun Π ein innerer Punkt von M_k , für welchen $x_1 > c$ ist, und den wir festhalten. Es sei Q ein beliebiger innerer Punkt von T und also auch ein innerer Punkt von M_k . Gemäß § 6 III (e) ist Q mit Π auf einem ganz im Innern von M_k verlaufenden Wege verbindbar. In der Durchlaufungsrichtung von Q nach Π muß dieser Weg einen ersten Schnittpunkt mit der Ebene $x_1 = c$ haben. Dieser Schnittpunkt muß innerer Punkt eines der M'_{k-1} sein. Also gehört Q derjenigen, wie oben gezeigt, einzigen Komponente von T an, welche dieses M'_{k-1} als Randgebilde besitzt. Also besteht T aus nur endlich vielen Komponenten in dem Sinne, daß die inneren Punkte einer und derselben Komponente auf inneren Wegen miteinander verbindbar sind, während das für innere Punkte zweier verschiedener Komponenten unmöglich ist.

Nun zerlegt gemäß der allgemeinen Voraussetzung des Induktionsschlusses die Ebene $x_1 = c$ jede der regulären $(k-1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten R_{k-1} von M_k in endlich viele reguläre $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Hieraus folgt leicht, daß für T auch § 6 III (f) erfüllt ist, und daß jede Komponente von T einschließlich ihres Randes eine reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeit bildet, w. z. b. w.

IV. Im n -dimensionalen Raum wird eine *reguläre n -dimensionale Mannigfaltigkeit*, die auch als *regulärer Körper* bezeichnet werden soll, in folgender Weise definiert.

- a) Der Körper ist eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge.
- b) Innere Punkte und Randpunkte werden wie gewöhnlich in bezug auf den n -dimensionalen Raum definiert.
- c) Die Menge der inneren Punkte ist nicht leer.
- d) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.
- e) Die inneren Punkte hängen zusammen im üblichen § 6 II (e) schon erklärten Sinne dieses Ausdrucks.
- f) Der Rand besteht aus endlich vielen regulären $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemein haben können, die auf beiden Randpunkte sind.

Das *vollständige* Normalensystem des Körpers wird dann durch die Gesamtheit der *vollständigen* Normalensysteme seiner endlich vielen regulären $(n - 1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten gebildet.

Dem Satze III (13) entspricht der folgende Satz, der daher auch mit IV (13) markiert werden möge:

IV (13). Der Körper werde von einer $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene geschnitten. Es finde dabei nirgends eine Berührung statt, und zwar in folgendem Sinne: In keinem Schnittpunkte mit dem Rande des Körpers liege die Ebene senkrecht zu einer der zu diesem Punkte gehörenden Normalen des *vollständigen* Normalensystems des Körpers.

Dann besteht der Schnitt aus endlich vielen regulären Körpern in bezug auf den $(n - 1)$ -dimensionalen Raum der Schnittebene. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Körper Randpunkte sein — und zwar für beide Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer ihrer regulären $(n - 2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen.

Endlich geht jeder *innere Punkt* von K über in einen *inneren Punkt* eines der endlich vielen regulären Körper in bezug auf den $(n - 1)$ -dimensionalen Raum der Schnittebene, aus welchen der Schnitt besteht, und jeder *Randpunkt* in einen *Randpunkt*.

Der Beweis ergibt sich gemäß und entsprechend dem Satze und Beweise III (13).

IV (14). Unter den Voraussetzungen von IV (13) wird der Körper durch die Schnittebene in endlich viele reguläre Körper zerlegt.

Der Beweis ergibt sich wie in III (14).

V (1). Es bezeichne im n -dimensionalen Raum M_k ($0 \leq k \leq n - 1$) eine reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Gemäß § 5 III (10) läßt sich M_k sowohl wie jede der endlich vielen Randmannigfaltigkeiten von M_k auf Grund des Borelschen Satzes durch endlich viele Grundgebilde entsprechender Dimensionenzahl überdecken. Gemäß § 4 VII ist für jedes dieser endlich vielen Überdeckungsgrundgebilde der auf der Einheitskugel im n -dimensionalen Raum gemessene äußere Inhalt der durch Zuziehung der Häufungspunkte abgeschlossenen Menge derjenigen Richtungspunkte, welchen Normalen in unendlich vielen Punkten des Grundgebildes entsprechen, gleich Null. Also ist wegen § 5 III (11, 12), § 6 II (11, 12), § 6 III (11, 12) auch der auf der Einheitskugel im n -dimensionalen Raum gemessene äußere Inhalt der durch Zuziehung ihrer Häufungspunkte abgeschlossenen Menge derjenigen Richtungspunkte, welchen Normalen des vollständigen Normalensystems von M_k in unendlich vielen Punkten von M_k entsprechen, gleich Null.

Nun besteht das vollständige Normalensystem eines regulären Körpers im n -dimensionalen Raum aus den vollständigen Normalensystemen seiner endlich vielen regulären $(n - 1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten.

Daher ist auch der auf der Einheitskugel gemessene äußere Inhalt der durch Zuziehung ihrer Häufungspunkte abgeschlossenen Menge derjenigen Richtungspunkte, welchen Normalen des vollständigen Normalensystems eines regulären Körpers in unendlich vielen Punkten des Randes entsprechen, gleich Null.

Dieser Satz läßt sich noch folgendermaßen verallgemeinern:

Gegeben sei im n -dimensionalen Raum eine endliche Zahl von regulären Körpern und regulären Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionenzahl. Dann ist der auf der Einheitskugel im n -dimensionalen Raum gemessene äußere Inhalt der durch die Zuziehung ihrer Häufungspunkte abgeschlossenen Menge derjenigen Richtungspunkte, welchen in der Gesamtheit der vollständigen Normalensysteme dieser regulären Körper und regulären Mannigfaltigkeiten Normalen in unendlich vielen Punkten entsprechen, gleich Null.

Diese Richtungspunkte einschließlich ihrer Häufungspunkte und die ihnen entsprechenden Richtungen sollen als *singulär* in bezug auf das gegebene System von regulären Körpern und regulären Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden.

Wir sehen also, daß die *nichtsingulären Richtungspunkte auf der Einheitskugel als Komplementärmenge einer abgeschlossenen Punktmenge eine offene Punktmenge bilden, deren Inhalt bestimmt und gleich der Oberfläche der Kugel ist. A fortiori gibt es daher in beliebiger Nähe jedes singulären Richtungspunktes nichtsinguläre. In der Schar der zu einer nichtsingulären Richtung senkrechten $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen gibt es, wie unmittelbar aus der*

Definition folgt, nur endlich viele, welche einen der Körper oder eine der Mannigfaltigkeiten des gegebenen Systems berühren und jede dieser endlich vielen Berührungsebenen enthält nur endlich viele Berührungspunkte. Dabei wird, wie nochmals betont sei, unter einer Berührung der Ebene mit einem regulären Körper oder einer regulären Mannigfaltigkeit das Senkrechtstehen der Ebene zu einer der zum Berührungspunkt gehörenden Normalen des vollständigen Normalensystems des regulären Körpers oder der regulären Mannigfaltigkeit verstanden.

V (2). Es sei im n -dimensionalen Raum ein System von endlich vielen regulären Körpern und regulären Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionenzahl gegeben. Es bezeichne ferner H_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, ein vorgegebenes System zueinander orthogonaler Einheitsvektoren.

Dann lassen sich zu jedem $\varepsilon > 0$ n zueinander orthogonale Einheitsvektoren H_ν^* bestimmen, deren Richtungen in bezug auf das gegebene System von Körpern und Mannigfaltigkeiten sämtlich im Sinne von V (1) nichtsingulär sind, und welche den Gleichungen

$$|H_\nu^* - H_\nu| < \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

genügen.

Beweis. Gemäß V (1) gibt es in beliebiger Nähe von H_1 nichtsinguläre Einheitsvektoren, d. h. Einheitsvektoren von nichtsingulärer Richtung. Man kann daher das starr gedachte Einheitsvektorensystem H_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, durch eine beliebig kleine Drehung in ein ebenfalls orthogonales Einheitsvektorensystem H_ν^1 überführen, in welchem H_1^1 nichtsingulär ist. Nun bilden die Endpunkte der nichtsingulären Einheitsvektoren auf der Einheitskugel eine offene Punktmenge. Bei genügend kleiner Drehung des Vektorensystems H_ν^1 bleibt daher der erste Vektor nichtsingulär. Man kann daher wiederum durch eine beliebig kleine Drehung das System H_ν^1 in ein System H_ν^2 überführen, in welchem H_1^2 nichtsingulär bleibt, während H_2^2 nichtsingulär wird. Durch eine weitere beliebig kleine Drehung kann man das System H_ν^2 in ein System H_ν^3 überführen, in welchem H_1^3 und H_2^3 nichtsingulär bleiben und H_3^3 nichtsingulär wird. Durch n -malige Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich der zu beweisende Satz.

§ 7.

Einige Sätze aus der Theorie der mehrfachen Integrale.

Zunächst sollen unter I, II, III einige allgemein bekannte Sätze aus der Theorie der mehrfachen Integrale ohne Beweis rekapituliert werden:

I. Es bezeichne ω eine beschränkte Punktmenge im m -dimensionalen Raum. Man bezeichne mit $\bar{J}(\omega)$ ihren äußeren und mit $\underline{J}(\omega)$ ihren inneren Inhalt, wobei, wie schon § 4 erwähnt, diesen Begriffen die Riemann-Peano-

Jordansche Definition zugrunde gelegt ist. Sind der äußere und innere Inhalt gleich, so spricht man von einem bestimmten Inhalt, der mit $J(\omega)$ bezeichnet werden möge.

Ist die Punktmenge ω_1 in der beschränkten Punktmenge ω_2 enthalten, $\omega_1 < \omega_2$, so ist

$$\bar{J}(\omega_1) \leq \bar{J}(\omega_2), \quad \underline{J}(\omega_1) \leq \underline{J}(\omega_2).$$

Bezeichnet $\omega_1 \dot{+} \omega_2 \dot{+} \dots \dot{+} \omega_l$ die Vereinigungsmenge der beschränkten Punktmengen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$, so gilt:

$$\bar{J}(\omega_1 \dot{+} \omega_2 \dot{+} \dots \dot{+} \omega_l) \leq \sum_1^l \bar{J}(\omega_v).$$

Haben unter den ω_v , $v = 1, 2, \dots, l$, je zwei nur Punkte gemein, die auf dem Rande beider liegen, so gilt auch

$$\underline{J}(\omega_1 \dot{+} \omega_2 \dot{+} \dots \dot{+} \omega_l) \geq \sum_1^l \underline{J}(\omega_v).$$

Hat endlich noch jede der Punktmengen ω_v einen bestimmten Inhalt, so folgt aus den beiden letzten Ungleichungen, daß auch $\omega_1 \dot{+} \omega_2 \dot{+} \dots \dot{+} \omega_l$ einen bestimmten Inhalt besitzt, und daß die Gleichung gilt

$$J(\omega_1 \dot{+} \omega_2 \dot{+} \dots \dot{+} \omega_l) = \sum_1^l J(\omega_v).$$

II (1). Endlich gilt der wichtige Satz:

Eine beschränkte Punktmenge hat dann und nur dann einen bestimmten Inhalt, wenn ihr Rand den äußeren Inhalt Null hat.

II (2). Es seien nun ω_1 und ω_2 zwei Punktmengen mit den Rändern ϱ_1 und ϱ_2 . Dann ist der Rand von $\omega_1 \dot{+} \omega_2$ in $\varrho_1 \dot{+} \varrho_2$ enthalten. Denn ist P ein Punkt, der nicht in $\varrho_1 \dot{+} \varrho_2$ enthalten ist, so muß P entweder für ω_1 und für ω_2 ein äußerer Punkt oder für eine der beiden Punktmengen ein innerer Punkt sein. Im ersten Fall ist P ein äußerer Punkt von $\omega_1 \dot{+} \omega_2$, im zweiten ein innerer. P liegt also in keinem Falle auf dem Rande von $\omega_1 \dot{+} \omega_2$, w. z. b. w.

Ebenso beweist man, daß der Rand des Durchschnitts von ω_1 und ω_2 in $\varrho_1 \dot{+} \varrho_2$ enthalten ist. Da die Komplementärpunktmenge von ω_1 ebenfalls den Rand ϱ_1 hat, so folgt, daß auch der Rand des Durchschnitts von ω_2 mit der Komplementärpunktmenge von ω_1 in $\varrho_1 \dot{+} \varrho_2$ enthalten ist. Gilt $\omega_1 < \omega_2$, so besagt der letzte Satz, daß auch der Rand von $\omega_2 - \omega_1$ in $\varrho_1 \dot{+} \varrho_2$ enthalten ist. In Verbindung mit dem Kriterium II (1) ergibt sich hieraus:

Sind ω_1 und ω_2 beschränkte Punktmengen von bestimmtem Inhalt, so haben auch ihr Durchschnitt, ihre Vereinigungsmenge und der Durchschnitt einer mit der Komplementärmenge der anderen einen bestimmten Inhalt.

Das Entsprechende gilt natürlich auch für endlich viele beschränkte Punktmengen von bestimmtem Inhalt.

III. Es bezeichne im m -dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_m$ ω eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge von bestimmtem Inhalt. Es bezeichne ferner φ eine in ω definierte stetige Funktion.

Definiert man jetzt Φ durch die Gleichung

$$(63) \quad \Phi = \int_{\omega} \varphi dx_1 dx_2 \dots dx_m,$$

so hat das Integral bekanntlich im Riemannschen Sinne einen bestimmten Wert.

Es bezeichne nun $\omega(\xi)$ den Schnitt von ω mit der Ebene $x_1 = \xi$. Wir machen nun noch die Voraussetzung, daß in dieser $(m-1)$ -dimensionalen Ebene die Punktmenge $\omega(\xi)$ ebenfalls einen bestimmten Inhalt habe, und zwar für jeden Wert von ξ .

Definiert man jetzt die Funktion $\Phi(\xi)$ durch die Gleichung

$$(64) \quad \Phi(\xi) = \int_{\omega(\xi)} \varphi dx_2 \dots dx_m,$$

so hat das Integral auf der rechten Seite ebenfalls im Riemannschen Sinne einen bestimmten Wert.

Wählt man α und β so, daß für alle Punkte von ω

$$\alpha \leq x_1 \leq \beta$$

ist, so gilt endlich, wie bekannt, die Gleichung

$$(65) \quad \Phi = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\xi) d\xi.$$

Dabei ist Φ durch (63) definiert, und das Integral auf der rechten Seite von (65) hat im Riemannschen Sinne einen bestimmten Wert.

IV. Im m -dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ mögen bezeichnen ω eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, s ihren Rand, $\omega(\xi)$ und $s(\xi)$ die Schnitte von ω und s mit der Ebene $x_1 = \xi$, φ eine in ω definierte stetige Funktion. Die Punktmenge ω habe einen bestimmten Inhalt, was gemäß II (1) gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$\bar{J}(s) = 0,$$

wobei das Symbol J den m -dimensionalen Inhalt im Raume $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ bedeuten soll.

Ferner machen wir noch die Voraussetzung, daß die Gleichung

$$(66) \quad \bar{J}_{m-1}(s(\xi)) = 0$$

gilt, wobei das Symbol $\bar{J}_{m-1}$ den auf der Ebene $x_1 = \xi$ gemessenen äußeren $(m-1)$ -dimensionalen Inhalt bedeutet.

Dann gelten die folgenden Sätze:

(A) Die Punktmenge $\omega(\xi)$ hat auf der Ebene $x_1 = \xi$ einen bestimmten $(m-1)$ -dimensionalen Inhalt $J_{m-1}(\omega(\xi))$.

(B) Definiert man wie in III

$$(67) \quad \Phi(\xi) = \int_{\omega(\xi)} \varphi dx_2 \dots dx_m,$$

$$(68) \quad \Phi = \int_{\omega} \varphi dx_1 dx_2 \dots dx_m,$$

so haben die beiden Integrale auf der rechten Seite im Riemannschen Sinne einen bestimmten Wert.

(C) Sind α und β so gewählt, daß für alle Punkte von ω

$$(69) \quad \alpha \leq x_1 \leq \beta$$

bleibt, so gilt die Gleichung

$$(70) \quad \Phi = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\xi) d\xi.$$

(D) $\Phi(\xi)$ stellt eine überall stetige Funktion von ξ dar.

Beweis. Gemäß III folgen die Aussagen (B) und (C) aus (A). Wir haben mithin nur (A) und (D) zu beweisen.

Wir beweisen zunächst (A):

Es bezeichne $\tilde{\omega}(\xi)$ die Gesamtheit der auf der Ebene $x_1 = \xi$ gelegenen inneren Punkte von ω . Dann ist natürlich jeder Punkt von $\tilde{\omega}(\xi)$ auch ein innerer Punkt von $\omega(\xi)$ in bezug auf die $(m-1)$ -dimensionale Ebene $x_1 = \xi$; aber das Umgekehrte braucht nicht der Fall zu sein.

$\tilde{\omega}(\xi)$ und $s(\xi)$ sind gemäß ihrer Definition punktfremd, und es gilt die Punktmengengleichung

$$(71) \quad \omega(\xi) = \tilde{\omega}(\xi) + s(\xi).$$

Da $\omega(\xi)$ eine abgeschlossene Punktmenge ist, so enthält sie ihren Rand. Da $\tilde{\omega}(\xi)$ auf der Ebene $x_1 = \xi$ eine offene Punktmenge bildet, so folgt aus (71), daß der Rand von $\omega(\xi)$ in $s(\xi)$ enthalten ist. Wegen der Voraussetzung (66) ist daher der äußere auf der $(m-1)$ -dimensionalen Ebene $x_1 = \xi$ gemessene Inhalt des Randes von $\omega(\xi)$ a fortiori gleich Null, und damit ist wegen II (1) die Aussage (A) bewiesen.

Jetzt wollen wir die Aussage (D) beweisen:

Man wähle γ'' und γ' so, daß für alle Punkte von ω die Ungleichungen

$$(72) \quad \gamma'' \leq x_v \leq \gamma', \quad v = 2, 3, \dots, m$$

gelten. Man bezeichne im $(m-1)$ -dimensionalen Raum $(x_2, x_3, \dots, x_m)$ mit W_{m-1} den durch die Ungleichungen (72) gegebenen Würfel. In dem durch diese Ungleichungen in Verbindung mit der Ungleichung (69) dargestellten m -dimensionalen Parallelotop definiere man wie üblich die Hilfsfunktion $\psi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ durch die Festsetzung, daß für die Punkte von ω

$$\psi = \varphi$$

ist, während für die übrigen Punkte

$$\psi = 0$$

gilt.

Man halte jetzt $x_1 = \xi$ fest und betrachte $\psi = \psi(\xi, x_2, \dots, x_m)$ als Funktion von $x_2 \dots x_m$. Diese Funktion ist in W_{m-1} definiert. Ihre Unstetigkeiten können nur auf $s(\xi)$ liegen und haben daher wegen (66) den äußeren Inhalt Null. Da die Funktion beschränkt ist, so ist ihre Integrabilität im Riemannschen Sinne gesichert. Man erhält für die zu untersuchende Funktion $\Phi(\xi)$ die Darstellung

$$(73) \quad \Phi(\xi) = \int_{W_{m-1}} \psi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m.$$

Es sei nun ein Wert $\xi = \xi^*$ vorgegeben. Man zerlege W_{m-1} in ein Netz miteinander kongruenter zu dem Achsensystem $(x_2 \dots x_m)$ paralleler Teilwürfel. Man bezeichne mit $q_s(\xi^*)$ die Gesamtheit derjenigen Teilwürfel, welche Punkte enthalten, denen auf der Ebene $x_1 = \xi^*$ Punkte von $s(\xi^*)$ entsprechen.

Die übrigen Teilwürfel sind dann, immer auf der Ebene $x_1 = \xi^*$ betrachtet, entweder punktfremd zu $\omega(\xi^*)$, oder sie sind in $\tilde{\omega}(\xi^*)$ enthalten. Die Gesamtheit der ersten Teilwürfel von W_{m-1} bezeichne man mit $q_a(\xi^*)$, die der letzteren mit $q_i(\xi^*)$.

Für ⁷⁾

$$(74) \quad (x_2 \dots x_m) < q_a(\xi^*)$$

ist also

$$(75) \quad (\xi^*, x_2 \dots x_m) \nless \omega.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $q_a(\xi^*)$ und ω gibt es daher ein $\eta > 0$, so daß für

$$(76) \quad |\xi - \xi^*| < \eta$$

(74) auch noch die Relation

$$(77) \quad (\xi, x_2 \dots x_m) \nless \omega$$

nach sich zieht.

⁷⁾ Im folgenden wird das Zeichen $<$ bzw. $\nless$ auch für das mengentheoretische Enthaltensein, bzw. Nichtenthaltensein benutzt; die Klammern auf den linken Seiten bezeichnen die Punkte mit den eingeklammerten Koordinaten.

Ebenso gilt für

$$(78) \quad (x_2 \dots x_m) < q_i(\xi^*),$$

$$(79) \quad (\xi^*, x_2 \dots x_m) < \tilde{\omega}(\xi^*) < \omega - s.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $q_i(\xi^*)$ und s gibt es daher ein $\eta' > 0$, so daß für

$$(80) \quad |\xi - \xi^*| < \eta'$$

(78) auch noch die Relation

$$(81) \quad (\xi, x_2 \dots x_m) < \omega - s < \omega$$

nach sich zieht.

Gelten also die beiden Ungleichungen

$$(82) \quad |\xi - \xi^*| < \eta \quad \text{und} \quad |\xi - \xi^*| < \eta',$$

so ist

$$(83) \quad \psi(\xi, x_2 \dots x_m) = 0 \quad \text{für} \quad (x_2 \dots x_m) < q_a(\xi^*),$$

$$(84) \quad \psi(\xi, x_2 \dots x_m) = \varphi(\xi, x_2 \dots x_m) \quad \text{für} \quad (x_2 \dots x_m) < q_i(\xi^*).$$

Nun ist gemäß (73)

$$(85) \quad \Phi(\xi) = \int_{q_a(\xi^*)} \psi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m + \int_{q_s(\xi^*)} \psi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m \\ + \int_{q_i(\xi^*)} \psi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m.$$

Also ist bei Festhaltung der Voraussetzung (82) gemäß (83) und (84)

$$(86) \quad \Phi(\xi) = \int_{q_s(\xi^*)} \psi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m + \int_{q_i(\xi^*)} \varphi(\xi, x_2 \dots x_m) dx_2 \dots dx_m,$$

$$(87) \quad \Phi(\xi) - \Phi(\xi^*) = \int_{q_s(\xi^*)} \{ \psi(\xi, x_2 \dots x_m) - \psi(\xi^*, x_2 \dots x_m) \} dx_2 \dots dx_m \\ + \int_{q_i(\xi^*)} \{ \varphi(\xi, x_2 \dots x_m) - \varphi(\xi^*, x_2 \dots x_m) \} dx_2 \dots dx_m.$$

Bezeichnet μ das Maximum von $|\varphi|$ in ω , so ist μ auch das Maximum von $|\psi|$ in seinem gesamten, durch die Ungleichungen (69) und (71) gegebenen Definitionsbereich. Die Gleichung (87) ergibt

$$(88) \quad |\Phi(\xi) - \Phi(\xi^*)| \leq 2\mu J_{m-1}(q_s(\xi^*)) \\ + \left| \int_{q_i(\xi^*)} \{ \varphi(\xi, x_2 \dots x_m) - \varphi(\xi^*, x_2 \dots x_m) \} dx_2 \dots dx_m \right|.$$

Im ersten Summanden auf der rechten Seite der obigen Ungleichung kann der Faktor $J_{m-1}(q_s(\xi^*))$ auf Grund der Voraussetzung (66) durch die Wahl der Würfelnetzzerlegung von W_{m-1} beliebig klein gemacht werden. Der

zweite Summand konvergiert bei nunmehr festgehaltener Netzerlegung, also bei festgehaltenem Integrationsgebiet, wegen der Stetigkeit von φ mit $|\xi - \xi^*|$ gegen Null. Also sichert die Ungleichung (88) die Stetigkeit von $\Phi(\xi)$ an der beliebig gewählten Stelle ξ^* , w. z. b. w.

§ 8.

Integrale über reguläre Mannigfaltigkeiten.

I. Es sei im n -dimensionalen Raum K ein regulärer Körper im Sinne von § 6 IV.

Dann hat K einen bestimmten Inhalt. Gemäß § 7 II (1) ist das gleichbedeutend mit der Aussage, daß der Rand von K den äußeren Inhalt Null hat.

Beweis. Gemäß § 6 IV (f) besteht der Rand von K aus endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Jede derselben läßt sich gemäß § 5 III (10) auf Grund des Borelschen Satzes durch endlich viele $(n-1)$ -dimensionale Grundgebilde bedecken. Ein solches hat aber gemäß § 4 V (A) den n -dimensionalen äußeren Inhalt Null. Also hat auch der Rand von K den äußeren Inhalt Null, w. z. b. w.

II. Es sei das rechtwinklige Koordinatensystem so gewählt, daß die Richtung der x_1 -Achse gemäß § 6 V (1) *nichtsingulär* ist.

Es bezeichne $Q(\xi)$ den Schnitt der Ebene $x_1 = \xi$ mit K und $s(\xi)$ den Schnitt der Ebene mit dem Rande von K . Dann gilt für den auf dieser Ebene gemessenen äußeren Inhalt von $s(\xi)$ die Gleichung

$$(89) \quad \bar{J}_{n-1}(s(\xi)) = 0,$$

und zwar für jeden Wert von ξ .

Beweis. Es genügt der Nachweis, daß wenn M_{n-1} eine der endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von K bezeichnet, der Schnitt der Ebene mit M_{n-1} den äußeren Inhalt Null hat.

Da die Ebene nichtsingulär ist, kann sie die Mannigfaltigkeit in höchstens endlich vielen Punkten berühren. Um jeden dieser Berührungspunkte als Mittelpunkt lege man eine $(n-1)$ -dimensionale, in der Ebene $x_1 = \xi$ liegende Kugel mit dem Radius $\varepsilon > 0$.

Es sei nun der Punkt P kein Berührungspunkt. Dann kann gemäß § 6 III (13) (A), wenn man dort $k = n-1$ setzt, eine gewisse δ' -Umgebung von P auf dem Schnitt der Ebene mit M_{n-1} von einem auf der Ebene gelegenen $(n-2)$ -dimensionalen Grundgebilde G'_{n-2} überdeckt werden. Das gilt, sowohl wenn P ein innerer Punkt als auch wenn P ein Randpunkt von M_{n-1} ist. Nach dem Borelschen Satze läßt sich jetzt der ganze Schnitt der Ebene mit M_{n-1} durch die oben um die Berührungspunkte konstruierten Kugeln vom Radius ε und eine Auswahl von endlich vielen der Grundgebilde

G'_{n-2} überdecken. Nach § 4 V (A) ist der auf der $(n-1)$ -dimensionalen Ebene gemessene äußere Inhalt jedes G'_{n-2} gleich Null.

Da endlich ε beliebig klein gewählt werden kann, so folgt, daß der äußere $(n-1)$ -dimensionale Inhalt des Schnittes der Ebene $x_1 = \xi$ mit M_{n-1} gleich Null ist, was allein noch zu beweisen war.

III. Da die eben bewiesene Gleichung (89) mit der Gleichung (66) übereinstimmt, so gelten für jeden regulären Körper K die Aussagen des Satzes § 7 IV. Setzt man die dort auftretende stetige Funktion φ zunächst gleich 1, so lautet der Satz:

Die Richtung der x_1 -Achse sei *nichtsingulär*. Dann hat der Querschnitt $Q(\xi)$ der Ebene $x_1 = \xi$ mit dem regulären Körper K für alle Werte von ξ einen bestimmten Inhalt $J_{n-1}(Q(\xi))$.

$J_{n-1}(Q(\xi))$ ist für alle Werte von ξ eine stetige Funktion von ξ .

Sind α und β so gewählt, daß für alle Punkte von K

$$(90) \quad \alpha \leq x_1 \leq \beta$$

ist, so gilt

$$(91) \quad J(K) = \int_{\alpha}^{\beta} J_{n-1}(Q(\xi)) d\xi.$$

Allgemeiner ergibt der Satz § 7 IV:

Es sei φ eine in K definierte stetige Funktion. Man definiere die Funktion $\Phi(\xi)$ durch die Gleichung

$$(92) \quad \Phi(\xi) = \int_{Q(\xi)} \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

Dann ist das Integral auf der rechten Seite für alle Werte von ξ im Riemannschen Sinne bestimmt; $\Phi(\xi)$ stellt für alle Werte von ξ eine stetige Funktion von ξ dar. Endlich gilt

$$(93) \quad \int_K \varphi dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\xi) d\xi.$$

IV (1). Dieser Abschnitt sowie der folgende Abschnitt V dienen der Herleitung der im Abschnitt VI (1) zusammengefaßten Sätze.

Es bezeichne M_k , $1 \leq k \leq n-1$ eine reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Raum. Das rechtwinklige Koordinatensystem $x_1 \dots x_n$ sei gemäß § 6 V (2) so gewählt, daß sämtliche Koordinatenachsen in bezug auf M_k *nichtsinguläre* Richtungen haben. Es gibt also unter den Ebenen $x_v = \text{const}$, $v = 1, 2, \dots, n$, nur endlich viele, welche M_k im Sinne von § 6 III (13) berühren, und jede dieser endlich vielen Ebenen hat nur endlich viele Berührungspunkte.

Im folgenden soll ein n -dimensionales, achsenparalleles Parallelotop, dessen $(n-1)$ -dimensionale Randparallelotope sämtlich auf Ebenen liegen,

welche M_k nicht berühren, kurz als ein *berührungsfremdes* Parallelotop bezeichnet werden.

Es sei nun P ein beliebiger innerer oder Randpunkt von M_k mit den Koordinaten $p_1, p_2, \dots, p_n$. Wie aus den § 6 III (13) unter (A) gemachten Ausführungen unmittelbar hervorgeht, gibt es dann ein den Punkt P nebst einer δ' -Umgebung von ihm auf M_k im Innern enthaltendes Grundgebilde G'_k , das gegeben wird durch die Gleichungen.

$$(94) \quad \begin{aligned} \lambda &= f_\lambda(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k}), \\ \lambda &= k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine gewisse Permutation der Indizes $1, 2, \dots, n$, und die Funktionen f_λ sind in einem Parallelotop erklärt, das gegeben werde durch die Ungleichungen

$$(95) \quad \begin{aligned} a''_{v_\varrho} &\leq x_{v_\varrho} \leq a'_{v_\varrho}, \quad a''_{v_\varrho} < p_{v_\varrho} < a'_{v_\varrho}, \\ \varrho &= 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Ist P ein innerer Punkt von M_k , so kann gemäß § 6 III (13) (B) angenommen werden, daß G'_k ganz auf M_k liegt.

Ist dagegen P ein Randpunkt von M_k , so kann, wie in § 6 III (13) (C) ausgeführt, auf Grund von § 5 III (8) angenommen werden, daß die im Innern von G'_k gelegenen inneren Punkte von M_k eine relativ offene Punktmenge zu G'_k bilden.

IV (2). Es sei nun Π ein n -dimensionales, achsenparalleles, berührungsfremdes Parallelotop, das den Punkt P nicht zu enthalten braucht, dessen sämtliche Punkte aber von P um weniger als δ' entfernt sind, wobei δ' die oben in IV (1) angegebene Bedeutung hat. Π werde ferner gegeben durch die Gleichungen

$$(96) \quad \begin{aligned} b''_{v_\varrho} &\leq x_{v_\varrho} \leq b'_{v_\varrho}, \quad a''_{v_\varrho} < b''_{v_\varrho} < b'_{v_\varrho} < a'_{v_\varrho}, \\ \varrho &= 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

$$(97) \quad \begin{aligned} b''_{v_\lambda} &\leq x_{v_\lambda} \leq b'_{v_\lambda}, & \lambda &= k+1, \dots, n, \end{aligned}$$

wobei die $a''_{v_\varrho}, a'_{v_\varrho}$ dieselbe Bedeutung wie in (95) haben.

Dann gilt der folgende Hilfssatz:

Enthält Π überhaupt Punkte von M_k , so genügen diese den Gleichungen (94). Die Funktionen f_λ sind dabei im k -dimensionalen Parallelotop (96) zweimal stetig differenzierbar definiert. In diesem k -dimensionalen Parallelotop entspricht vermöge der Gleichungen (94) dem Durchschnitt von M_k mit dem n -dimensionalen Parallelotop Π eine abgeschlossene Punktmenge Π_k des k -dimensionalen Raumes $(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k})$ von folgenden Eigenschaften:

(A) Die *Randpunkte* von Π_k liegen entweder auf den durch die Gleichungen

$$x_{v_\varrho} = b''_{v_\varrho}, \quad x_{v_\varrho} = b'_{v_\varrho}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, k,$$

gegebenen $(k-1)$ -dimensionalen Randebenen des k -dimensionalen Parallelotops (96); oder es entsprechen ihnen vermöge der Gleichungen (94) Schnittpunkte von M_k mit den durch die Gleichungen

$$(98) \quad x_{v_\lambda} = b''_{v_\lambda}, \quad x_{v_\lambda} = b'_{v_\lambda}, \quad \lambda = k+1, \dots, n,$$

gegebenen $(n-1)$ -dimensionalen Randebenen des n -dimensionalen Parallelotops Π ; oder endlich, es entsprechen ihnen vermöge der Gleichungen (94) Randpunkte von M_k .

Hierbei kann natürlich ein Randpunkt mehreren dieser drei Kategorien von Randpunkten gleichzeitig angehören.

(B) Π_k hat im k -dimensionalen Raum $(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k})$ einen bestimmten Inhalt.

Beweis. Es bedürfen nur die Behauptungen (A) und (B) eines Beweises: Wir beweisen jetzt (A).

Es sei zunächst P ein innerer Punkt von M_k . Dann besteht gemäß IV (1) G'_k nur aus Punkten von M_k . Also liegen a fortiori auch alle dem k -dimensionalen Parallelotop (96) vermöge der Gleichungen (94) entsprechenden Punkte auf M_k .

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung (A) — und zwar dergestalt, daß von den unter (A) aufgezählten drei Kategorien von Randpunkten der Punktmenge Π_k nur die beiden ersten Kategorien auftreten können.

Es liege nun P auf dem Rande von M_k . Dann können wir gemäß IV (1) annehmen, daß die im Innern von G'_k gelegenen inneren Punkte von M_k eine relativ-offene Punktmenge zu G'_k bilden. Dasselbe gilt wegen § 5 II (4) auch in bezug auf den dem k -dimensionalen Parallelotop (96) entsprechenden Teil von G'_k . Bei Berücksichtigung von § 5 II (3) folgt hieraus leicht, daß in diesem Falle nur noch solche Randpunkte von Π_k hinzukommen können, welche Randpunkten von M_k entsprechen.

Damit ist die Behauptung (A) vollständig bewiesen.

Um (B) zu beweisen, genügt es gemäß § 7 II (1) festzustellen, daß im k -dimensionalen Raum $(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k})$ der äußere Inhalt des Randes von Π_k gleich Null ist.

Das ergibt sich aber leicht aus (A).

Denn die Randpunkte der ersten der drei in (A) aufgewiesenen Arten liegen auf endlich vielen $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen und haben daher den äußeren Inhalt Null.

Den Randpunkten der zweiten Art entsprechen auf M_k Punkte des Schnittes mit den endlich vielen berührungsfremden Ebenen (98), also gemäß

§ 6 III (13) Punkte, welche auf endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen. Den Randpunkten dritter Art von Π_k entsprechen auf M_k Randpunkte von M_k , also ebenfalls Punkte, welche auf endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen. Jede reguläre $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich gemäß § 5 III (10) auf Grund des Borelschen Satzes durch endlich viele $(k - 1)$ -dimensionale Grundgebilde im n -dimensionalen Raum überdecken. Also kann die Gesamtheit derjenigen Punkte von M_k , welchen Randpunkte zweiter und dritter Art von Π_k entsprechen, von endlich vielen $(k - 1)$ -dimensionalen Grundgebilden überdeckt werden. Die sämtlichen n Koordinaten des laufenden Punktes eines solchen Grundgebildes sind definitionsgemäß zweimal stetig differenzierbare Funktionen von $k - 1$ Parametern, die ein rechtwinkliges $(k - 1)$ -dimensionales Parallelotop durchlaufen. Das gilt also insbesondere auch für die Koordinaten $x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k}$. Gemäß § 4 V (A) bilden also die Koordinaten $x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k}$ des laufenden Punktes eines jeden der endlich vielen Grundgebilde im k -dimensionalen Raum $(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k})$ eine Punktmenge vom äußeren Inhalt Null. Damit ist auch (B) vollständig bewiesen.

IV (3) Hilfssatz: Es gibt ein $\eta > 0$, so daß ein beliebiges n -dimensionales, achsenparalleles, berührungsfremdes, durch die Ungleichungen

$$b''_v \leq x_v \leq b'_v, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

gegebenes Parallelotop Π , dessen Kantenlängen sämtlich kleiner als η sind, folgende Eigenschaft hat:

Der Durchschnitt von M_k mit Π genügt, sofern er nicht leer ist, Gleichungen von der Form

$$x_{v_\lambda} = f_\lambda(x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_k}), \quad \lambda = k + 1, \dots, n.$$

Dabei bedeutet $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine gewisse Permutation der Indizes $1, 2, \dots, n$; die Funktionen f_λ sind in dem k -dimensionalen Parallelotop

$$(99) \quad b''_{v_\varrho} \leq x_{v_\varrho} \leq b'_{v_\varrho}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, k,$$

zweimal stetig differenzierbar definiert, und dem Durchschnitt von M_k mit Π entspricht in dem k -dimensionalen Parallelotop (99) eine abgeschlossene Punktmenge Π_k des k -dimensionalen Raumes $(x_{v_1}, \dots, x_{v_k})$, für welche die Sätze IV (2) (A) und (B) gelten. Π_k hat also insbesondere einen bestimmten Inhalt

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt.

Wäre der Hilfssatz nicht richtig, so ließe sich eine unendliche Folge von achsenparallelen, berührungsfremden Parallelotopen bestimmen, deren sämtliche Kantenlängen gegen Null konvergieren, und deren Durchschnitt mit

M_k nicht leer ist, während keines dieser Parallelotope, die im Hilfssatz formulierte Eigenschaft hat.

Die Mittelpunkte dieser Parallelotope würden eine beschränkte Punktfolge bilden. Also ließe sich eine unendliche Teilfolge von Parallelotopen Π^μ , $\mu = 1, 2, \dots$ ad inf., so auswählen, daß ihre Mittelpunkte gegen einen Punkt P konvergieren. Wegen der Abgeschlossenheit von M_k müßte dann P auf M_k liegen. Bestimmt man nun zu diesem Punkt P gemäß IV (1) ein Grundgebilde G'_k , so müßten die Parallelotope Π^μ von einem gewissen μ ab den Voraussetzungen des Hilfssatzes IV (2) genügen. Gemäß diesem Hilfssatz müßten sie dann auch die in dem zu beweisenden Hilfssatz IV (3) formulierte Eigenschaft besitzen — im Widerspruch zur Voraussetzung.

IV (4). Aus dem Hilfssatz IV (3) ergibt sich als unmittelbare Folgerung der Satz:

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von IV (3) bedeute Π ein n -dimensionales, achsenparalleles, berührungsfremdes Parallelotop, dessen Kantenlängen sämtlich $< \eta$ sind. Ist dann der Durchschnitt von Π und M_k nicht leer, so hat er einen bestimmten k -dimensionalen Flächeninhalt, der gegeben wird durch das Integral

$$(100) \quad \int_{\Pi_k} \Delta_k dx_{v_1} dx_{v_2} \dots dx_{v_k}.$$

Hier bedeutet Δ_k die nicht negative Wurzel aus der Summe der Quadrate der Unterdeterminanten k -ter Ordnung in der Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial x_{v_\sigma}}{\partial x_{v_\varrho}} \right\} \begin{matrix} \sigma = 1, 2, \dots, n, \\ \varrho = 1, 2, \dots, k, \end{matrix}$$

wobei die x_{v_σ} , $\sigma = k+1 \dots n$ durch Gleichungen von der Form (94) als Funktionen von $x_{v_1} \dots x_{v_k}$ dargestellt sind. Ferner ist der Integrationsbereich Π_k im Raume $x_{v_1} \dots x_{v_k}$ eine Punktmenge von bestimmtem Inhalt, und das Integral hat daher wegen der Stetigkeit von Δ_k im Riemannschen Sinn einen bestimmten Wert (§ 7 III).

IV (5). Es bezeichne nun W einen n -dimensionalen, achsenparallelen Würfel, der M_k ganz im Innern enthält.

Dann kann man durch endlich viele zu den Koordinatenachsen senkrechte $(n-1)$ -dimensionale Ebenen, deren keine M_k im Sinne von § 6 III (13) berührt, W in ein Netz von n -dimensionalen, achsenparallelen, berührungsfremden Parallelotopen zerlegen, deren Kantenlängen sämtlich $< \eta$ sind, wobei η die im Hilfssatz IV (3) angegebene Bedeutung hat.

Es durchlaufe Π^τ , $\tau = 1, 2, \dots, l$, diejenigen dieser Parallelotope, welche überhaupt Punkte von M_k enthalten.

Gemäß IV (3) gibt es dann für jedes dieser Parallelotope eine von diesem abhängende Permutation $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ der Indizes $1, 2, \dots, n$, so daß der Durchschnitt von M_k und Π^τ durch Gleichungen von der Form (94) gegeben wird, wobei der Punkt $(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_k})$ im k -dimensionalen Raum der Koordinaten $x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k}$ eine Punktmenge Π_k^τ von bestimmtem Inhalt durchläuft. Gemäß IV (4) ergibt sich der k -dimensionale Flächeninhalt des Durchschnitts von M_k und Π^τ durch das Π^τ entsprechende Integral (100)

$$(101) \quad \int_{\Pi_k^\tau} \Delta_k^\tau dx_{\nu_1} dx_{\nu_2} \dots dx_{\nu_k},$$

wobei nochmals betont sei, daß die Permutation $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ der Indizes $1, 2, \dots, n$ sich mit τ ändern kann.

Nun liegt voraussetzungsgemäß die Berandung jedes der Parallelotope Π^τ auf solchen $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen, welche M_k im Sinne von § 6 III (13) nicht berühren. Der Schnitt von M_k mit einer solchen Ebene besteht daher aus endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und läßt sich daher gemäß § 5 III (10) auf Grund des Borelschen Satzes durch endlich viele $(k - 1)$ -dimensionale Grundgebilde überdecken. Jedes dieser Grundgebilde hat aber gemäß § 4 V (B) den k -dimensionalen Flächeninhalt Null. Also ist auch der k -dimensionale Flächeninhalt des Durchschnitts von M_k mit der Gesamtheit der Berandungen aller Parallelotope Π^τ gleich Null.

Es kommt daher kein endlicher Teil des k -dimensionalen Flächeninhalts von M_k mehrfach in Anschlag, wenn man die k -dimensionalen Flächeninhalte der Durchschnitte von M_k mit allen Π^τ summiert. Bezeichnet daher $F_k(M_k)$ den k -dimensionalen Flächeninhalt von M_k , so hat $F_k(M_k)$ einen bestimmten Sinn, und es gilt die Gleichung

$$(102) \quad F_k(M_k) = \sum_1^l \int_{\Pi_k^\tau} \Delta_k^\tau dx_{\nu_1} dx_{\nu_2} \dots dx_{\nu_k}.$$

Ist ferner φ eine stetige Funktion auf M_k , so gilt

$$(103) \quad \int_{M_k} \varphi d\sigma_k = \sum_1^l \int_{\Pi_k^\tau} \varphi \Delta_k^\tau dx_{\nu_1} dx_{\nu_2} \dots dx_{\nu_k},$$

wobei $d\sigma_k$ das k -dimensionale Flächenelement bedeutet.

Wie in IV sei das rechtwinklige Koordinatensystem gemäß § 6 V (2) so gewählt, daß sämtliche Achsen in bezug auf M_k nichtsinguläre Richtungen haben.

V (1). Man bezeichne mit

$$M_k(x_1 \leq a), \quad M_k(a \leq x_1 \leq b), \quad a < b,$$

diejenigen Teile von M_k , für welche

$$x_1 \leq a \quad \text{bzw.} \quad a \leq x_1 \leq b$$

ist. Wird M_k von der Ebene $x_1 = a$ im Sinne von § 6 III (13) nicht berührt, so kann man diese Ebene bei der Bildung des Parallelotopnetzes nach den Vorschriften von IV (5) als Netzebene wählen. Dann liefert die Gleichung (102), wenn man über diejenigen Parallelotope summiert, welche unterhalb der Ebene $x_1 = a$ liegen, eine Darstellung für den Flächeninhalt von $M_k(x_1 \leq a)$, der mit $F_k(M_k(x_1 \leq a))$ bezeichnet werden möge. Wird M_k auch von der Ebene $x_1 = b$ im Sinne von § 6 III (13) nicht berührt, so wähle man auch diese als Netzebene. Dann liefert die Gleichung (102) bei Summation über diejenigen Parallelotope, welche zwischen den Ebenen $x_1 = a$ und $x_1 = b$ liegen, den Flächeninhalt $F_k(M_k(a \leq x_1 \leq b))$ und es ergibt sich die Gleichung

$$(104) \quad F_k(M_k(x_1 \leq b)) = F_k(M_k(x_1 \leq a)) + F_k(M_k(a \leq x_1 \leq b)).$$

V (2). Wir wollen nun folgendes beweisen:

Schließt man zunächst die höchstens endlich vielen Ausnahmewerte von ξ aus, für welche M_k von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird, so ist der nach dem Obigen wohldefinierte Flächeninhalt

$$F_k(M_k(x_1 \leq \xi))$$

als Funktion von ξ stetig.

Beweis. Man betrachte etwa die Stelle $\xi = \xi'$. Dann lassen sich α' und $\beta' > \alpha'$ so bestimmen, daß $\alpha' < \xi' < \beta'$ ist, und daß im Intervall $\alpha' \leq \xi \leq \beta'$ keiner der oben genannten endlich vielen Ausnahmewerte von ξ liegt.

Beschränkt man sich dann auf $M_k(\alpha' \leq x_1 \leq \beta')$, so kann man in den unter IV (1, 2, 3, 4, 5) gemachten Ausführungen bei der Indexpermutation $v_1, v_2, \dots, v_n$ gemäß § 6 III (13) (A) und (B) durchweg $v_1 = 1$ setzen.

Man konstruiere nun zwischen den Ebenen $x_1 = \alpha'$ und $x_1 = \beta'$ als äußersten Netzebenen ein achsenparalleles, berührungsfremdes Parallelotopnetz nach den Vorschriften IV (5). Dieses halte man *fest*. Die sämtlichen Kantenlängen der Parallelotope sind zunächst voraussetzungsgemäß kleiner als η , wobei η dieselbe Bedeutung hat, wie in IV (3), IV (4) und IV (5). M bezeichne eine Zahl, welche größer ist als das Maximum von Δ_k^τ für sämtliche Parallelotope.

Es sei nun $\alpha' < \xi_1 < \xi_2 < \beta'$ und $\xi_2 - \xi_1$ kleiner als die kleinste Kantenlänge im Parallelotopnetz. Gemäß (102) ist

$$(105) \quad F_k(M_k(\alpha' \leq x_1 \leq \beta')) = \sum_1^{\nu} \int_{\Delta_k^\tau} \Delta_k^\tau dx_1 dx_{v_2} \dots dx_{v_k},$$

wobei auf der rechten Seite über diejenigen l' Parallelotope summiert wird, welche Punkte von M_k enthalten. Der Integrationsbereich Π_k^τ hat dabei im Raum $(x_1, x_{v_2} \dots x_{v_k})$ einen bestimmten Inhalt und liegt in einem achsenparallelen Parallelotop, dessen Kantenlängen sämtlich kleiner als η sind. Hieraus folgt

$$(106) F_k(M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)) = \sum_1^{l'} \int_{\Pi_k^\tau(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \Delta_k^\tau dx_1 dx_{v_2} \dots dx_{v_k}.$$

Der Integrationsbereich $\Pi_k^\tau(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)$ kann leer sein, jedenfalls aber liegt er im Raum $(x_1, x_{v_2} \dots x_{v_k})$ in einem achsenparallelen Parallelotop, dessen den Achsen $x_{v_2} \dots x_{v_k}$ parallele Kanten kleiner als η sind, während die der x_1 -Achse parallele Kante höchstens gleich $\xi_2 - \xi_1$ ist. Mithin ist

$$J(\Pi_k^\tau(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)) < (\xi_2 - \xi_1) \eta^{k-1}.$$

Also ist wegen (106)

$$F_k(M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)) \leq l' M \eta^{k-1} (\xi_2 - \xi_1).$$

Diese Gleichung sichert wegen (104) die Stetigkeit von

$$F_k(M_k(x_1 \leq \xi))$$

an allen Stellen von ξ im Innern des Intervalls (α', β') , also auch an der Stelle ξ' , w. z. b. w.

V (3). Es sei jetzt ξ'' einer der endlich vielen Ausnahmewerte von ξ , für welchen M_k von der Ebene $x_1 = \xi''$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird.

Wir wollen beweisen, daß $F_k(M_k(x_1 \leq \xi))$ auch an der Stelle $\xi = \xi''$ wohldefiniert und als Funktion von ξ stetig ist.

Beweis. Die zu beweisende Behauptung ist wegen (104) offenbar, wenn es gelingt, das Folgende festzustellen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ lassen sich ξ'_1 und ξ'_2 so bestimmen, daß beide keine Ausnahmewerte von ξ sind, daß ferner

$$(107) \quad \xi'_1 < \xi'' < \xi'_2$$

ist, und daß endlich

$$(108) \quad F_k(M_k(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) < \varepsilon$$

wird.

Zu diesem Zweck wählen wir α' und β' so, daß

$$\alpha' < \xi'' < \beta'$$

ist, und daß im Intervall

$$x' \leq \xi \leq \beta'$$

ξ'' den einzigen Ausnahmewert von ξ darstellt. M_k werde von der Ebene $x_1 = \xi''$ in den endlich vielen Punkten P^σ , $\sigma = 1, 2, \dots, \gamma$, berührt. Zu jedem P^σ konstruiere man ein n -dimensionales, achsenparalleles, berührungsfremdes Parallelotop T^σ , das P^σ im Innern enthält, dessen Kantenlängen sämtlich kleiner als die in IV (3) definierte Größe η und ferner so klein sind, daß je zwei T^σ keinen Punkt gemein haben, und daß endlich alle Parallelotope T^σ zwischen den Ebenen $x_1 = \alpha'$ und $x_1 = \beta'$ liegen.

Dann gibt es gemäß Hilfssatz IV (3) zu jedem σ eine von diesem abhängige Permutation $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ der Indizes $1, 2, \dots, n$, so daß der Durchschnitt $D(M_k, T^\sigma)$ von M_k mit dem Parallelotop T^σ durch Gleichungen von der Form (94) gegeben wird, wobei der Punkt $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_k}$ im k -dimensionalen Raum $(x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k})$ eine Punktmenge T_k^σ von bestimmtem Inhalt durchläuft. Gemäß (102) ergibt sich also die Gleichung

$$(109) \quad F_k(D(M_k, T^\sigma)) = \int_{T_k^\sigma} \Delta_k^\sigma dx_{\nu_1} \dots dx_{\nu_k}.$$

Es bezeichne nun T'^σ ein n -dimensionales, achsenparalleles, berührungsfremdes Teilparallelotop von T^σ , das entsteht, indem man die k zu den Achsen $x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k}$ senkrechten Randebenenpaare zusammenrückt, während die $n - k$ zu den übrigen Achsen senkrechten Randebenen festgehalten werden, und zwar dergestalt, daß der Punkt P^σ noch im Innern von T'^σ bleibt, daß aber die zu den Achsen $x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k}$ parallelen Kanten sämtlich kleiner als eine Größe $\varepsilon' > 0$ werden. Es bezeichne ferner M' eine Zahl, die größer als das Maximum von Δ_k^σ für sämtliche T^σ ist. Dann ist

$$(110) \quad \sum_1^\gamma F_k(D(M_k, T'^\sigma)) = \sum_1^\gamma \int_{T_k'^\sigma} \Delta_k^\sigma dx_{\nu_1} \dots dx_{\nu_k} \leq \gamma M' \varepsilon'^k.$$

Man wähle nun zuerst ε' so klein, daß

$$(111) \quad \gamma M' \varepsilon'^k < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird.

Jetzt halte man die T'^σ fest und bezeichne mit M_k'' die abgeschlossene Punktmenge derjenigen Punkte von M_k , welche nicht im Innern eines der Parallelotope T'^σ liegen, und dementsprechend mit $M_k''(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)$, $\alpha' < \xi'_1 < \xi'' < \xi'_2 < \beta'$, denjenigen Teil von M_k'' , für welchen $\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2$ ist.

Nun beweist man ganz wie in V (2), daß

$$F_k(M_k''(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2))$$

mit $\xi'_2 - \xi'_1$ gegen Null konvergiert. Man kann also $\xi'_2 - \xi'_1$ so klein wählen, daß

$$(112) \quad F_k(M_k''(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Nun ist

$$F_k(M_k(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) - F_k(M''_k(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) \leq \sum_1^{\gamma} F_k(D(M_k, T''^0)).$$

Also ist wegen (110), (111)

$$F_k(M_k(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) - F_k(M''_k(\xi'_1 \leq x_1 \leq \xi'_2)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hieraus ergibt sich wegen (112) die zu beweisende Ungleichung (108).

VI. Es sei M_k , $1 \leq k \leq n-1$, eine reguläre k -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Raum. Das rechtwinklige Koordinatensystem $x_1, x_2, \dots, x_n$ sei gemäß § 6 V (2) so gewählt, daß sämtliche Achsen in bezug auf M_k *nichtsinguläre* Richtungen haben.

Es bezeichne $M_k(x_1 \leq \xi)$ denjenigen Teil von M_k , für welchen $x_1 \leq \xi$ ist. Das Symbol F_k bedeute den k -dimensionalen Flächeninhalt.

Dann lassen sich die Ergebnisse von V (2) und V (3) in folgendem Satz zusammenfassen:

VI (1). *Der Flächeninhalt*

$$(113) \quad F_k(M_k(x_1 \leq \xi))$$

ist für alle Werte von ξ wohlbestimmt und als Funktion von ξ stetig.

Hieraus folgt leicht:

Es bezeichne φ eine auf M_k stetige Funktion. Dann ist auch das Integral

$$(114) \quad \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k$$

für alle Werte von ξ im Riemannschen Sinne bestimmt und als Funktion von ξ stetig. Dabei bedeutet $d\sigma_k$ das k -dimensionale Flächenelement.

VI (2). Wie wir in VII und VIII beweisen werden, gelten noch folgende Sätze:

Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ , für welche M_k von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird, sind der Flächeninhalt (113) und das Integral (114) als Funktionen von ξ einmal stetig differenzierbar und es bestehen die Gleichungen

$$(115) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \{F_k(M_k(x_1 \leq \xi))\} &= \int_{M_k(x_1 = \xi)} \frac{1}{\cos \varphi'(x_1, t)} d\sigma_{k-1}, \\ (116) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k \right\} &= \int_{M_k(x_1 = \xi)} \varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi'(x_1, t)} d\sigma_{k-1}, \end{aligned} \right\} k \geq 2;$$

$$(117) \quad \frac{d}{d\xi} \{F_1(M_1(x_1 \leq \xi))\} = \sum^u \frac{1}{\cos \varphi'_u(x_1, t)}$$

$$(118) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_1(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_1 \right\} &= \sum^u \varphi_u \frac{1}{\cos \varphi'_u(x_1, t)} \end{aligned} \right\} k = 1.$$

Hierbei bedeutet $M_k(x_1 = \xi)$ den Schnitt von M_k mit der Ebene $x_1 = \xi$. $\Psi(x_1, t)$ bedeutet den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel, welchen die Richtung der x_1 -Achse mit ihrer senkrechten Projektion auf die k -dimensionale Tangentialebene von M_k bildet. Da voraussetzungsgemäß M_k von der Ebene $x_1 = \xi$ nicht berührt wird, so ist dieser Winkel durchweg $< \frac{\pi}{2}$ und gemäß § 6 II (11, 12) und III (11, 12) für alle Punkte von M_k stetig. Da endlich der Integrationsbereich $M_k(x_1 = \xi)$ der Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (115, 116) gemäß § 6 III (13) aus endlich vielen regulären $(k-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht, welche nur Randpunkte miteinander gemein haben, so sind gemäß den Schlussergebnissen von IV (5) des laufenden Paragraphen diese Integrale im Riemannschen Sinne bestimmt. In den Gleichungen (117), (118) bedeuten φ_μ und $\Psi_\mu(x_1, t)$ die Werte von φ und $\Psi(x_1, t)$ in den Schnittpunkten von M_1 mit der Ebene $x_1 = \xi$, welche, da M_1 voraussetzungsgemäß von dieser Ebene nicht berührt wird, gemäß § 6 II (13) nur in endlicher Zahl vorhanden sein können.

VI (3). Bevor wir im Abschnitt VII an den Beweis der Sätze VI (2) herantreten, ziehen wir unter VI (3) und VI (4) aus ihnen noch einige Folgerungen:

An den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ , für welche M_k von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 II (13) und III (13) berührt wird, brauchen die Differentialquotienten der Funktionen (113), (114) überhaupt nicht zu existieren. Da aber gemäß VI (1) die Funktionen selber auch an diesen Ausnahmestellen stetig bleiben, so gilt folgendes:

Es sei für alle Punkte von M_k

$$(119) \quad \alpha \leq x_1 \leq \beta.$$

Es sei ferner ξ' eine beliebige Stelle dieses Intervalls, also

$$\alpha \leq \xi' \leq \beta.$$

Dann ist

$$(120) \quad F_k(M_k(x_1 \leq \xi')) = \int_{\alpha}^{\xi'} \frac{d}{d\xi} \{F_k(M_k(x_1 \leq \xi))\} d\xi,$$

$$(121) \quad \int_{M_k(x_1 \leq \xi')} \varphi d\sigma_k = \int_{\alpha}^{\xi'} \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k \right\} d\xi,$$

wobei die Integranden auf den rechten Seiten durch die Gleichungen (115), (116), (117), (118) sich darstellen lassen und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ stetig sind. Bezeichnet endlich $\text{Max} |\varphi|$ das

Maximum von $|\varphi|$ auf M_k , so folgt, wenn ξ keiner der endlich vielen Ausnahmewerte ist, aus den Gleichungen (115), (116), (117), (118)

$$(122) \quad \left| \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k \right\} \right| \leq \text{Max} |\varphi| \cdot \frac{d}{d\xi} \{F_k(M_k(x_1 \leq \xi))\}.$$

Mithin ist gemäß (120), (121)

$$(123) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k \right\} \right| d\xi \leq \text{Max} |\varphi| \cdot F_k(M_k).$$

Der Differentialquotient

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{M_k(x_1 \leq \xi)} \varphi d\sigma_k \right\}$$

ist also auch *absolut* integrierbar.

VI (4). Es sei $k \geq 2$. Es bezeichne Φ eine auf M_k stetige Funktion. Dann folgt aus VI (2) für $\varphi = \Phi \cos \Psi(x_1, t)$:

Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ ist das Integral

$$\int_{M_k(x_1 = \xi)} \Phi d\sigma_{k-1}$$

als Funktion von ξ stetig. Für $\Phi \equiv 1$ erhält man:

Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ ist

$$F_{k-1}(M_k(x_1 = \xi))$$

als Funktion von ξ stetig.

VII. Wir haben jetzt die Sätze VI (2) zu beweisen. Das ist erreicht, wenn die Gültigkeit der Gleichungen (115), (116), (117), (118) und die Stetigkeit ihrer rechten Seiten als Funktionen von ξ festgestellt wird, und zwar genügt diese Feststellung für die Gleichungen (116) und (118), da aus diesen die Gleichungen (115) und (117) durch die Spezialisierung $\varphi \equiv 1$ sich ergeben. In diesem Abschnitt soll das für den trivialen Fall der Gleichung (118) durchgeführt werden.

Es sei ξ^* ein Wert von ξ , für welchen M_1 von der Ebene $x_1 = \xi^*$ im Sinne von § 6 II (13) nicht berührt werde. Dann liegen auf dieser Ebene nur endlich viele Punkte von M_1 und keiner dieser Punkte ist ein Randpunkt (Endpunkt) von M_1 . Man bezeichne diese Schnittpunkte, die also sämtlich *innere* Punkte von M_1 sind, mit P^μ , $\mu = 1, 2, \dots, \gamma$. Gemäß § 6 III (13) (A) und (B) gibt es zu jedem P^μ ein diesen Punkt nebst einer $\delta^{(\mu)}$ -Umgebung von ihm auf M_1 im Innern enthaltendes Grundgebilde G^μ , das ganz auf M_1 liegt, und gegeben wird durch die Gleichungen

$$(124) \quad \begin{aligned} x_1 &= f_1^\mu(x_1), & \lambda &= 2, 3, \dots, n, \\ a^{(\mu)} &\leq x_1 \leq b^{(\mu)}, & a^{(\mu)} &< \xi^* < b^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Man kann dabei die Intervallängen $b^{(\mu)} - a^{(\mu)}$ so klein wählen, daß je zwei der Grundgebilde keinen Punkt gemein haben. Bezeichnet M_1'' die abgeschlossene Punktmenge derjenigen Punkte von M_1 , welche nicht im Innern einer der um die Punkte P^μ als Mittelpunkte mit den Radien $\delta^{(\mu)}$ konstruierter Kugeln liegen, so hat M_1'' von der Ebene $x_1 = \xi^*$ eine Minimalentfernung $\delta^* > 0$. Man wähle jetzt ein $h > 0$ so klein, daß die Ungleichungen

$$h < \delta^*, \quad h < b^{(\mu)} - \xi^*, \quad h < \xi^* - a^{(\mu)}, \quad \mu = 1, 2, \dots, \gamma,$$

statthaben. Dann besteht der zwischen den Ebenen $x_1 = \xi^* - h$, $x_1 = \xi^* + h$ liegende Teil von M_1 nur aus den γ durch die Gleichungen (124) für $\xi^* - h \leq x_1 \leq \xi^* + h$ gegebenen, miteinander punktfremden Kurvenstücken. Hieraus folgt unmittelbar für $\xi^* - h < \xi < \xi^* + h$ die Gültigkeit der Gleichung (118) und die Stetigkeit ihrer rechten Seite als Funktion von ξ , w. z. b. w.

VIII. Jetzt gehen wir zum Beweise der Gleichung (116) über. Es sei also $k \geq 2$.

Da der Koordinatenanfangspunkt beliebig gewählt werden kann, genügt es, die Gleichung in der Umgebung der Stelle $\xi = 0$ zu beweisen. Man wähle, wie früher, α' und β' so, daß

$$(125) \quad \alpha' < 0 < \beta'$$

ist, und daß im Intervall

$$(126) \quad \alpha' \leq \xi \leq \beta'$$

keiner der endlich vielen Ausnahmewerte liegt, für welchen M_k von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird. Für die Werte von ξ im Intervall (126) besteht also der Schnitt $M_k(x_1 = \xi)$ aus endlich vielen regulären $(k-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemein haben können, die für keine von beiden im Innern oder im Innern einer ihrer $(k-2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen.

Insbesondere gilt das auch für $M_k(x_1 = 0)$. Gemäß § 6 V (2) kann man also in der $(n-1)$ -dimensionalen Ebene

$$x_1 = 0$$

die Koordinatenachsen $x_2, x_3, \dots, x_n$ in ein ebenfalls rechtwinkliges Achsen-system $x'_2, x'_3, \dots, x'_n$ dergestalt transformieren, daß die Richtungen $x'_2, x'_3, \dots, x'_n$ im $(n-1)$ -dimensionalen, auf der Ebene $x_1 = 0$ ausgebreiteten Raum in bezug auf die endlich vielen regulären $(k-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen $M_k(x_1 = 0)$ besteht, oder kurz gesagt, in bezug auf $M_k(x_1 = 0)$, nichtsingulär werden. Da die dazu erforderliche Drehung gemäß § 6 V (2) beliebig klein gewählt werden kann und da im n -dimensionalen Raum die in bezug auf M_k nichtsingulären Richtungspunkte gemäß § 6 V (1) auf der

Einheitskugel eine offene Punktmenge bilden, so darf angenommen werden, daß die Achsenrichtungen $x'_2, x'_3, \dots, x'_n$ im $(n-1)$ -dimensionalen Raum in bezug auf M_k *nichtsingulär bleiben*.

Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:

Es sei $c_v, 2 \leq v \leq n$, keiner der endlich vielen Ausnahmewerte, für welchen die $(n-1)$ -dimensionale Ebene

$$x'_v = c_v$$

M_k im Sinne von § 6 III (13) berührt; ferner sei c_v auch keiner der endlich vielen Ausnahmewerte, für welche die $(n-2)$ -dimensionale Ebene

$$x_1 = 0, \quad x'_v = c_v$$

im $(n-1)$ -dimensionalen, auf der Ebene $x_1 = 0$ ausgebreiteten Raum eine der endlich vielen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen $M_k(x_1 = 0)$ besteht, oder kurz gesagt, $M_k(x_1 = 0)$ im Sinne von § 6 III (13) berührt.

Dann läßt sich eine Schranke $\vartheta > 0$ so bestimmen, daß für $|\xi| < \vartheta$ im $(n-1)$ -dimensionalen, auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten Raum $M_k(x_1 = \xi)$ von der $(n-2)$ -dimensionalen Ebene $x_1 = \xi, x'_v = c_v$ im Sinne von § 6 III (13) ebenfalls nicht berührt wird.

Wir führen den Beweis dieser Behauptung indirekt:

Träfe die Behauptung nicht zu, so ließe sich auf M_k eine unendliche Folge von Punkten P^μ mit der Koordinate

$$x_1 = \xi^{(\mu)}, \quad \alpha' < \xi^{(\mu)} < \beta', \quad |\xi^{(\mu+1)}| < |\xi^{(\mu)}|, \quad \xi^{(\mu)} \rightarrow 0$$

bestimmen, in welchen $M_k(x_1 = \xi^{(\mu)})$ von der $(n-2)$ -dimensionalen Ebene $x_1 = \xi^{(\mu)}, x'_v = c_v$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird.

Man kann als durch Auswahl erreicht annehmen, daß die Folge P^μ gegen einen Punkt P^0 konvergiert, der dann auf $M_k(x_1 = 0)$ liegt.

Gemäß der Definition der Berührung im Sinne von § 6 III (13) liegt in jedem der Punkte P^μ die Richtung der x'_v -Achse senkrecht zum Schnitt der Ebene $x_1 = \xi^{(\mu)}$ mit der Mannigfaltigkeit M_k oder mit einer ihrer endlich vielen Randmannigfaltigkeiten von geringerer Dimensionenzahl.

Man kann als durch Auswahl erreicht annehmen, daß es sich dabei immer um ein und dieselbe q -dimensionale Mannigfaltigkeit R_q handelt, wobei für $q = k$ R_k die Mannigfaltigkeit M_k selbst bedeuten soll.

Nun ist R_q eine reguläre q -dimensionale Mannigfaltigkeit, und da die unendlich vielen verschiedenen Punkte P^μ alle auf R_q liegen, so ist gemäß § 6 I $q > 0$. Mithin gibt es gemäß § 6 II (11, 12) und III (11, 12) eine mit dem laufenden Punkt von R_q sich stetig ändernde wohldefinierte q -dimensionale Tangentialebene von R_q . Wegen der Abgeschlossenheit von R_q muß ferner auch P^0 auf R_q liegen. Bezeichnen t_q^μ und t_q^0 die Tangentialebenen in den Punkten P^μ und P^0 , so gilt zunächst

$$t_q^\mu \rightarrow t_q^0.$$

Da die $(n-1)$ -dimensionale Ebene $x_1 = \xi^{(u)}$ voraussetzungsgemäß R_q nicht berührt, so schneidet sie t_q^u in einer $(q-1)$ -dimensionalen Ebene, die mit t_{q-1}^u bezeichnet werden möge. Ebenso schneidet die Ebene $x_1 = 0$ t_q^0 in einer $(q-1)$ -dimensionalen Ebene, welche mit t_{q-1}^0 bezeichnet werde. Dann gilt

$$t_{q-1}^u \rightarrow t_{q-1}^0.$$

Da nun voraussetzungsgemäß in jedem Punkte P^u die Richtung der x'_v -Achse senkrecht zu t_{q-1}^u stehen müßte, so wäre die Richtung der x'_v -Achse auch senkrecht zu t_{q-1}^0 — in direktem Widerspruch zu den dem Hilfssatz zugrunde gelegten Annahmen, w. z. b. w.

Dieses vorausgeschickt, können wir jetzt, wie in V (2) gezeigt, zwischen den Ebenen $x_1 = \alpha'$ und $x_1 = \beta'$ als äußersten Netzebenen ein dem Achsen-system $(x_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)$ paralleles, berührungsfremdes Parallelotopnetz nach den Vorschriften von IV (5) konstruieren, und zwar dergestalt, daß für jedes der Parallelotope in der entsprechenden Permutation $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ $\nu_1 = 1$ gesetzt werden kann. Wir können dabei annehmen, daß die Ebene $x_1 = 0$ keine Netzebene ist. Da ferner die Richtungen der Achsen $x'_2, x'_3, \dots, x'_n$ in dem $(n-1)$ -dimensionalen auf der Ebene $x_1 = 0$ ausgebreiteten Raum in bezug auf $M_k(x_1 = 0)$ nichtsingulär sind, so kann noch erreicht werden, daß keine der Netzebenen

$$(127) \quad \begin{aligned} x'_\nu &= c'_\nu, & \nu &= 2, 3, \dots, n, \\ \text{mit der Ebene} & & x_1 &= 0 \end{aligned}$$

einen Schnitt bildet, welcher eine der endlich vielen regulären $(k-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen $M_k(x_1 = 0)$ besteht, oder kurz gesagt, $M_k(x_1 = 0)$, im Sinne von § 6 III (13) berührt. Es gilt mithin für jede dieser Ebenen der eben bewiesene Hilfssatz. Es gibt daher ein $\vartheta' > 0$, so daß für $|\xi| \leq \vartheta'$ in der $(n-1)$ -dimensionalen Ebene

$$x_1 = \xi$$

$M_k(x_1 = \xi)$ vom Schnitt keiner der Netzebenen $x'_\nu = c'_\nu$ mit der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird. Man kann ferner noch annehmen, daß ϑ' kleiner ist als die Entfernung der Ebene $x_1 = 0$ von der nächsten zu ihr parallelen Netzebene.

Man füge nun zu dem Netze noch die beiden Ebenen $x_1 = \pm \vartheta'$ als neue Netzebenen hinzu und betrachte das Parallelotopnetz zwischen diesen beiden Ebenen. Π^r durchlaufe alle diejenigen Parallelotope des Netzes, deren Durchschnitt mit M_k nicht leer ist. Nach den getroffenen Festsetzungen bilden für jedes dieser Parallelotope die beiden Ebenen $x_1 = \pm \vartheta'$ Begrenzungsflächen. Π^r werde gegeben durch die Ungleichungen

$$(128) \quad -\vartheta' \leq x_1 \leq +\vartheta'$$

$$(129) \quad c''_\nu \leq x'_\nu \leq c'_\nu, \quad \nu = 2, 3, \dots, n.$$

Gemäß IV (5), IV (3) und IV (2) genügt dann der Durchschnitt von M_k und Π^τ Gleichungen von der Form

$$(130) \quad x'_{v_\lambda} = f_\lambda(x_1, x'_{v_2} \dots x'_{v_k}), \quad \lambda = k+1, \dots, n.$$

Dabei bedeutet $v_2, v_3, \dots, v_n$ eine von τ abhängige Permutation der $n-1$ Indizes $2, 3, \dots, n$; die Funktionen f_λ sind im k -dimensionalen Parallelotop

$$(131) \quad -\vartheta' \leq x_1 \leq +\vartheta',$$

$$(132) \quad c''_{v_\varrho} \leq x'_{v_\varrho} \leq c'_{v_\varrho}, \quad \varrho = 2, 3, \dots, k,$$

zweimal stetig differenzierbar definiert; endlich entspricht dem Durchschnitt von M_k und Π^τ im k -dimensionalen Raum $(x_1, x'_{v_2} \dots x'_{v_k})$ eine im Parallelotop (131), (132) liegende, abgeschlossene Punktmenge Π_k^τ , welche den Eigenschaften IV (2) (A) und (B) genügt, also insbesondere gemäß (B) einen bestimmten k -dimensionalen Inhalt hat.

Man erhält zunächst entsprechend (101) und (105) die Gleichung

$$(133) \quad \int_{M_k(-\vartheta' \leq x_1 \leq +\vartheta')} \varphi d\sigma_k = \sum_{\Pi_k^\tau} \int \varphi \Delta_k^\tau dx_1 dx'_{v_2} \dots dx'_{v_k}.$$

Dabei bedeutet wie früher Δ_k^τ die nichtnegative Wurzel aus der Summe der Quadrate der Unterdeterminanten k -ter Ordnung der Funktionalmatrix, welche vermöge der Gleichungen (130) aus den Ableitungen der n Variablen $x_1, x'_{v_2} \dots x'_{v_k} \dots x'_{v_n}$, nach den k Variablen $x_1, x'_{v_2} \dots x'_{v_k}$ gebildet wird.

Man bezeichne nun im k -dimensionalen Raum $(x_1, x'_{v_2} \dots x'_{v_k})$ mit s^τ den Rand von Π_k^τ und mit $s^\tau(\xi)$ den Schnitt von s^τ mit der $(k-1)$ -dimensionalen Ebene $x_1 = \xi$. Dann ist gemäß IV (2) (B)

$$(134) \quad \bar{J}_k(s^\tau) = 0.$$

Es gilt aber, wie wir jetzt zeigen wollen, für

$$(135) \quad -\vartheta' < \xi < +\vartheta'$$

auch die Gleichung

$$(136) \quad \bar{J}_{k-1}(s^\tau(\xi)) = 0.$$

Es genügt, diese Gleichung für den Schnitt der Ebene $x_1 = \xi$ mit jeder der drei Kategorien von Randpunkten zu beweisen, aus welchen s^τ gemäß IV (2) (A) besteht.

Die im k -dimensionalen Raum $(x_1, x_{v_2} \dots x_{v_k})$ auf der $(k-1)$ -dimensionalen Ebene $x_1 = \xi$ gelegenen Punkte der ersten Kategorie liegen auf dem Schnitt dieser Ebene mit den $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen

$$(137) \quad x'_{v_\varrho} = c''_{v_\varrho}, \quad x'_{v_\varrho} = c'_{v_\varrho}, \quad \varrho = 2, \dots, k,$$

also auf endlich vielen $(k - 2)$ -dimensionalen Ebenen. Ihre Gesamtheit hat mithin den $(k - 1)$ -dimensionalen äußeren Inhalt Null.

Den auf der Ebene $x_1 = \xi$ gelegenen Punkten der zweiten Kategorie von s entsprechen im n -dimensionalen Raum vermöge der Gleichungen (130) Schnittpunkte von $M_k(x_1 = \xi)$ mit einer der $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen

$$(138) \quad x'_{r_\lambda} = c''_{r_\lambda}, \quad x'_{r'_\lambda} = c'_{r'_\lambda}, \quad \lambda = k + 1, \dots, n,$$

oder, wenn man sich auf den $(n - 1)$ -dimensionalen, auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten Raum beschränkt, Punkte des Schnittes einer der jetzt $(n - 2)$ -dimensionalen Ebenen (138) mit $M_k(x_1 = \xi)$.

Nun ist aber ϑ' gerade so gewählt, daß für $|\xi| < \vartheta'$ keine der endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen $M_k(x_1 = \xi)$ gemäß § 6 III (13) besteht, im $(n - 1)$ -dimensionalen auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten Raume von einer der Ebenen (138) im Sinne von § 6 III (13) berührt wird. Gemäß nochmaliger Anwendung des Satzes § 6 III (13) besteht also der Schnitt jeder der genannten endlich vielen regulären $(k - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit jeder der Ebenen (138) wiederum aus endlich vielen regulären $(k - 2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Also entsprechen den auf der Ebene $x_1 = \xi$ gelegenen Punkten der zweiten Kategorie von s vermöge der Gleichungen (130) auf M_k Punkte, welche auf endlich vielen, auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten regulären $(k - 2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen.

Dasselbe gilt aber auch für die auf der Ebene $x_1 = \xi$ gelegenen Punkte der dritten Kategorie von s . Denn diesen entsprechen vermöge der Gleichungen (130) auf M_k Punkte des Schnittes der Ebene $x_1 = \xi$ mit dem Rande von M_k . Dieser Schnitt besteht aber gemäß dem Satze § 6 III (13) ebenfalls aus endlich vielen regulären $(k - 2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Jede reguläre $(k - 2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich gemäß § 5 III (10) auf Grund des Borelschen Satzes von endlich vielen $(k - 2)$ -dimensionalen Grundgebilden überdecken.

Also kann die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge der Gleichungen (130) den Punkten der zweiten oder dritten Kategorie von s entsprechen, welche auf der Ebene $x_1 = \xi$ liegen, von endlich vielen, auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten $(k - 2)$ -dimensionalen Grundgebilden überdeckt werden. Die sämtlichen Koordinaten $x'_{r_2} \dots x'_{r_k} x'_{r_{k+1}} \dots x'_{r_n}$ des laufenden Punktes eines solchen Grundgebildes sind definitionsgemäß zweimal stetig differenzierbare Funktionen von $k - 2$ Parametern, die ein rechtwinkliges $(k - 2)$ -dimensionales Parallelotop durchlaufen. Das gilt insbesondere auch für die Koordinaten $x'_{r_2}, x'_{r_3}, \dots, x'_{r_k}$, welche die entsprechenden Punkte von s auf der Ebene $x_1 = \xi$ charakterisieren. Gemäß § 4 V (A) ist daher auch der $(k - 1)$ -dimensionale äußere Inhalt der Gesamt-

heit der Punkte der zweiten und dritten Kategorie von s , welche auf der Ebene $x_1 = \xi$ liegen, gleich Null.

Damit ist die Gleichung (136) bewiesen.

Die Gleichungen (134) und (136) stimmen nun mit den Voraussetzungen des Satzes § 7 IV überein.

Es gelten daher entsprechend § 7 IV (A, B, C, D) die folgenden Sätze:

Man bezeichne mit $\Pi_k^\tau(\xi)$ den Schnitt der Ebene $x_1 = \xi$ mit der Punktmenge Π_k^τ und für

$$(139) \quad -\vartheta' < \xi_1 < \xi_2 < +\vartheta'$$

mit $\Pi_k^\tau(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)$ denjenigen Teil von Π_k^τ , für welchen $\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2$ ist.

Dann hat $\Pi_k^\tau(\xi)$ einen bestimmten $(k-1)$ -dimensionalen Inhalt.

Definiert man ferner die Funktion $\Phi^\tau(\xi)$ durch die Gleichung

$$(140) \quad \Phi^\tau(\xi) = \int_{\Pi_k^\tau(\xi)} \varphi \Delta_k^\tau dx'_{v_2} \dots dx'_{v_k},$$

so ist das Integral auf der rechten Seite im Riemannschen Sinne bestimmt und die Funktion $\Phi^\tau(\xi)$ ist für $|\xi| < \vartheta'$ stetig.

Endlich gilt

$$(141) \quad \int_{\Pi_k^\tau(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \varphi \Delta_k^\tau dx_1 dx'_{v_2} \dots dx'_{v_k} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi^\tau(\xi) d\xi.$$

Nun gilt, wie in IX bewiesen werden soll, die folgende Identität:

Bezeichnet Δ_{k-1}^τ die nicht negative Wurzel aus der Summe der Quadrate der Unterdeterminanten $(k-1)$ -ter Ordnung der Funktionalmatrix, welche vermöge der Gleichungen (130) gebildet wird aus den Ableitungen der Variablen $x'_{v_2} \dots x'_{v_k} x'_{i_{k+1}} \dots x'_{v_n}$ nach den $k-1$ Variablen $x'_{v_2} \dots x'_{v_k}$, so ist

$$(142) \quad \frac{\Delta_{k-1}^\tau}{\Delta_k^\tau} = \cos \Psi(x_1, t).$$

Durch Einführung der Identität (142) in (140) erhält man

$$(143) \quad \Phi^\tau(\xi) = \int_{D(\Pi^\tau, M_k(x_1 = \xi))} \varphi \frac{1}{\cos \Psi(x_1, t)} d\sigma_{k-1}.$$

Hierbei bedeutet $D(\Pi^\tau, M_k(x_1 = \xi))$ den Durchschnitt von Π^τ mit $M_k(x_1 = \xi)$, und $d\sigma_{k-1}$ das $(k-1)$ -dimensionale Flächenelement. Durch Summation ergibt sich

$$(144) \quad \int_{M_k(x_1 = \xi)} \varphi \frac{1}{\cos \Psi(x_1, t)} d\sigma_{k-1} = \sum \Phi^\tau(\xi).$$

Die Summation ist gestattet; denn derjenige Teil von $M_k(x_1 = \xi)$, welcher auf der Berandung der Π^r liegt und daher in der Summe auf der rechten Seite vermöge (143) als Integrationsgebiet mehrfach in Anschlag kommen kann, läßt sich, wie beim Beweise der Gleichung (136) ausgeführt, von endlich vielen $(k-2)$ -dimensionalen Grundgebilden überdecken und hat daher gemäß § 4 V (13) den $(k-1)$ -dimensionalen Flächeninhalt Null.

Da jeder der Summanden auf der rechten Seite von (144) als Funktion von ξ stetig ist, so gilt das auch für das Integral auf der linken Seite.

Nun gilt entsprechend der Gleichung (133)

$$(145) \quad \int_{M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k = \sum_{\Pi^r(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \int \varphi \Delta_k^r dx_1 dx'_{i_2} \dots dx'_{i_k}.$$

Wegen (141) folgt hieraus

$$(146) \quad \int_{M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi^r(\xi) d\xi.$$

Da der Integrand auf der rechten Seite, wie eben gezeigt, stetig ist, so folgt hieraus

$$(147) \quad \frac{d}{d\xi_2} \int_{M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k = \sum_{\xi_1} \Phi^r(\xi_2).$$

Da wegen (104)

$$(148) \quad \int_{M_k(x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k = \int_{M_k(x_1 \leq \xi_1)} \varphi d\sigma_k + \int_{M_k(\xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k$$

ist, so folgt aus (147) und (144)

$$\frac{d}{d\xi_2} \int_{M_k(x_1 \leq \xi_2)} \varphi d\sigma_k = \int_{M_k(x_1 = \xi_2)} \varphi \frac{1}{\cos \Psi(x_1, l)} d\sigma_{k-1}.$$

Damit ist die Gültigkeit der Gleichung (116) und die Stetigkeit ihrer beiden Seiten als Funktion von ξ bewiesen.

IX. Wir gehen jetzt zum Beweise der Identität (142) über.

Es mögen $V_1, V_2, \dots, V_k$ die k linear unabhängigen Vektoren im n -dimensionalen Raum bezeichnen, welche auf Grund der Gleichungen (130) durch die Ableitungen der n Variablen

$$x_1, x'_{v_2}, \dots, x'_{v_n},$$

nach den k Variablen

$$x_1, x'_{v_2}, \dots, x'_{v_k}$$

gebildet werden.

Dann gelten, wie evident, die Gleichungen

$$(149) \quad (\Delta_k^r)^2 = \|(V_p, V_q)\| \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, n, \\ q = 1, 2, \dots, n, \end{array}$$

$$(150) \quad (\Delta_{k-1}^r)^2 = \|(V_p, V_q)\| \quad \begin{array}{l} p = 2, \dots, n, \\ q = 2, \dots, n, \end{array}$$

wobei die rechten Seiten die aus den inneren Produkten (V_p, V_q) gebildeten Determinanten bedeuten.

Bezeichnet nun E_1 den Einheitsvektor der x_1 -Achse, so ist

$$(151) \quad (E_1, V_1) = 1,$$

$$(152) \quad (E_1, V_q) = 0, \quad q = 2, \dots, n.$$

Bezeichnet H die Projektion von E_1 auf die von den Vektoren $V_1 \dots V_k$ aufgespannte k -dimensionale Ebene, so gilt

$$(153) \quad H = \sum_1^k c_q V_q,$$

$$(154) \quad E_1 = H + L,$$

$$(155) \quad (L, V_q) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, k.$$

Aus (153), (155) folgt

$$(L, H) = 0,$$

und daher wegen (154)

$$(156) \quad (E_1, H) = (H, H) = |H|^2.$$

Nun ist definitionsgemäß

$$\cos \Psi(x_1, t) = \frac{(E_1, H)}{|E_1| \cdot |H|};$$

also ist wegen (156)

$$\cos \Psi(x_1, t) = |H|,$$

$$\cos^2 \Psi(x_1, t) = (E_1, H).$$

Führt man auf der rechten Seite dieser Gleichung (153) ein, so ergeben (151),

(152)

$$(157) \quad \cos^2 \Psi(x_1, t) = c_1.$$

Die innere Multiplikation der Gleichung (154) mit V_1 ergibt wegen (155),

(153), (151)

$$(158) \quad \sum_1^k c_q (V_1, V_q) c_q = 1.$$

Ebenso ergibt die innere Multiplikation von (154) mit V_p , $p = 2, \dots, k$,

wegen (155), (153), (152)

$$(159) \quad \sum_1^k c_q (V_p, V_q) c_q = 0, \quad p = 2, \dots, k.$$

Die Auflösung der Gleichungen (158), (159) ergibt wegen (149), (150)

$$(160) \quad c_1 = \frac{(\Delta_{k-1}^r)^2}{(\Delta_k^r)^2}.$$

Da $\cos \Psi(x_1, t)$ definitionsgemäß positiv ist, so folgt aus (160) und (157) die zu beweisende Identität (142).

§ 9.

Beweis des Greenschen Lemmas im n -dimensionalen Raum und einige Anwendungen.

Da der Beweis des sogenannten Greenschen Lemmas im n -dimensionalen Raum anschaulich zwar einleuchtend ist, in der Durchführung aber nicht einfach erscheint, so sei hier ein Beweis angegeben unter den Voraussetzungen, mit welchen das Lemma in der Folge Anwendung findet.

I. Es sei K ein regulärer Körper im n -dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1, y_2, \dots, y_n$. Es bezeichne φ eine in K definierte, nebst ihren ersten Ableitungen stetige Funktion. Dann besteht das Greensche Lemma in der Identität

$$(161) \quad \int_R \varphi \cos(y_\mu, N) d\sigma_{n-1} = \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial y_\mu} dy_1 \dots dy_n.$$

Hierbei bedeutet R den Rand von K und N die Richtung der äußeren Normalen.

Diese ist gemäß § 6 II (11, 12) und III (11, 12) auf jeder der endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten R_{n-1}^λ , aus welchen R voraussetzungsgemäß besteht, in jedem Punkte bestimmt und stetig.

Beweis. Nach dem Verfahren des Induktionsschlusses machen wir die Voraussetzung, daß die zu beweisende Identität (161) für den Raum von $n-1$ Dimensionen gültig ist.

Nun führen wir auf Grund von § 6 V (2) ein rechtwinkliges Koordinatensystem $x_1, x_2, \dots, x_n$ ein, dessen Achsenrichtungen in bezug auf K nicht-singulär sind. Dann ist

$$\cos(y_\mu, N) = \sum_1^n \cos(y_\mu, x_\nu) \cos(x_\nu, N).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_\mu} = \sum_1^n \cos(y_\mu, x_\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}.$$

Hieraus folgt leicht, daß die Identität (161) bewiesen ist, wenn für alle Indizes ν die entsprechende Gleichung

$$(162) \quad \int_R \varphi \cos(x_\nu, N) d\sigma_{n-1} = \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} dx_1 \dots dx_n$$

gilt.

Wir können die Bezeichnung so gewählt denken, daß in der zu beweisenden Gleichung (162) $\nu \neq 1$ ist.

Da je zwei R_{n-1}^λ voraussetzungsgemäß nur Punkte gemein haben können, welche auf beiden wiederum Randpunkte sind, also auf endlich vielen regulären $(n-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen, so ist

$$(163) \quad \int_R \varphi \cos(x_\nu, N) d\sigma_{n-1} = \sum_{R_{n-1}^\lambda} \int \varphi \cos(x_\nu, N) d\sigma_{n-1}.$$

Es seien ferner α und β so gewählt, daß für alle Punkte von K

$$\alpha \leq x_1 \leq \beta$$

ist. Endlich bezeichne $Q(\xi)$ den Querschnitt des Körpers K mit der Ebene $x_1 = \xi$.

Dann ist gemäß (92), (93)

$$(164) \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} dx_1 \dots dx_n = \int_\alpha^\beta d\xi \int_{Q(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} dx_2 \dots dx_n.$$

Es sei nun $n \geq 3$. Dann ist gemäß (116), (121)

$$(165) \quad \int_{R_{n-1}^\lambda} \varphi \cos(x_\nu, N) d\sigma_{n-1} = \int_\alpha^\beta d\xi \int_{R_{n-1}^\lambda(x_1=\xi)} \varphi \cos(x_\nu, N) \frac{1}{\cos \Psi(x_1, t)} d\sigma_{n-2}.$$

Dabei ist der Faktor von $d\xi$ unter dem Integral auf der rechten Seite an den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ , für welche der Rand R von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird, als nicht definiert anzusehen, während er an den übrigen Stellen als Funktion von ξ stetig und gemäß § 8 VI (3) im ganzen Gebiet absolut integrierbar ist.

Es sei ξ keiner dieser Ausnahmewerte. Bezeichnet dann N' die senkrechte Projektion von N auf die Ebene $x_1 = \xi$, so ist

$$(166) \quad \cos(NN') > 0.$$

Man bezeichne nun mit $E_1, E_2, \dots, E_n$ die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen $x_1, x_2, \dots, x_n$, mit N, N' die Einheitsvektoren in der Richtung von N und N' und mit T den Einheitsvektor in der Richtung der Projektion von E_1 auf die Ebene $x_1 = \xi$. Dann ist zunächst

$$(167) \quad (E_1, T) = \cos \Psi(x_1, t) > 0,$$

$$(168) \quad (N, N') = \cos (N, N') > 0,$$

$$(169) \quad N = (N, N') \cdot N' + (N, E_1) \cdot E_1,$$

$$(170) \quad E_1 = (E_1, T) \cdot T + (E_1, N) \cdot N.$$

Bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichungen das Quadrat der Länge der Vektoren, so ergibt sich

$$1 = (N, N')^2 + (E_1, N)^2,$$

$$1 = (E_1, T)^2 + (E_1, N)^2.$$

Also ist wegen (167), (168)

$$(171) \quad (N, N') = \cos (N, N') = \cos \Psi (x_1, t).$$

Multipliziert man (169) mit E_r , $r \neq 1$, so ergibt sich

$$(E_r, N) = (N, N') \cdot (E_r, N').$$

Also ist wegen (171)

$$(172) \quad \cos (x_r, N) = \cos \Psi (x_1, t) \cdot \cos (x_r, N').$$

Die Einführung dieser trivialen Identität in (165) ergibt

$$(173) \quad \int_{R_{n-1}^\lambda} \varphi \cos (x_r, N) d\sigma_{n-1} = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \int_{R_{n-1}^\lambda(x_1=\xi)} \varphi \cos (x_r, N') d\sigma_{n-2},$$

wobei in dem Integral auf der rechten Seite der Faktor von $d\xi$ an den oben genannten endlich vielen Ausnahmestellen von ξ als nicht definiert zu betrachten ist.

Nun können je zwei verschiedene R_{n-1}^λ nur Punkte gemein haben, die auf ihren regulären $(n-2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen. Der Schnitt einer jeder derselben mit der Ebene $x_1 = \xi$ besteht gemäß § 6 III (13) aus endlich vielen $(n-3)$ -dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten. Also können je zwei verschiedene $R_{n-1}^\lambda (x_1 = \xi)$ nur Punkte gemein haben, die auf endlich vielen regulären $(n-3)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen. Daher ist

$$(174) \quad \int_{R(x_1=\xi)} \varphi \cos (x_r, N') d\sigma_{n-2} = \sum^\lambda \int_{R_{n-1}^\lambda(x_1=\xi)} \varphi \cos (x_r, N') d\sigma_{n-2}.$$

Summiert man in (173) über λ , so ergibt sich wegen (163) und (174)

$$(175) \quad \int_R \varphi \cos (x_r, N) d\sigma_{n-1} = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \int_{R(x_1=\xi)} \varphi \cos (x_r, N') d\sigma_{n-2},$$

wobei in dem Integral auf der rechten Seite der Faktor von $d\xi$ an den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ als nicht definiert zu betrachten ist. Nun gilt

$$(176) \quad \int_{R(x_1=\xi)} \varphi \cos(x_v, N') d\sigma_{n-2} = \int_{Q(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_v} dx_2 \dots dx_n.$$

Denn in dem auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten $(n-1)$ -dimensionalen Raum besteht gemäß § 6 IV (13) $Q(\xi)$ aus endlich vielen regulären Körpern, von denen je zwei nur Randpunkte gemein haben können, die für beide Randpunkte höherer Ordnung sind, d. h. auf den endlich vielen regulären $(n-3)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen.

Ferner besteht ebenfalls gemäß § 6 IV (13) $R(x_1 = \xi)$ aus der Gesamtheit der Ränder dieser regulären $(n-1)$ -dimensionalen Körper, in welche $Q(\xi)$ zerfällt, während N' die äußere Normalenrichtung durchläuft. Für jeden dieser Körper kann aber die Gleichung (176) auf Grund der Voraussetzung des Induktionsschlusses als gültig angesehen werden.

Führt man (176) auf der rechten Seite von (175) ein, so ergibt (164) die allein noch zu beweisende Gleichung (162).

II. Wir haben also die Greensche Identität (161) nur noch für $n=2$ zu beweisen, d. h. für den Fall, daß K eine reguläre 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in der gewöhnlichen Ebene ist.

Wie in I gezeigt, genügt es, die Gleichung

$$(177) \quad \int_R \varphi \cos(x_2, N) d\sigma_1 = \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2$$

zu beweisen, wobei (x_1, x_2) rechtwinklige Koordinaten sind, deren Achsen in bezug auf K nichtsinguläre Richtungen haben. Man erhält entsprechend der Gleichung (163)

$$(178) \quad \int_K \varphi \cos(x_2, N) d\sigma_1 = \sum_{R_1^\lambda} \int \varphi \cos(x_2, N) d\sigma_1.$$

Statt der Gleichung (165) ergibt sich wegen (118), (121)

$$(179) \quad \int_{R_1^\lambda} \varphi \cos(x_2, N) d\sigma_1 = \int_\alpha^\beta d\xi \left(\sum^\mu \varphi_\mu \cos(x_2, N)_\mu \cdot \frac{1}{\cos \psi_\mu(x_1, t)} \right),$$

wobei der Index μ die Werte der betreffenden Funktionen an den endlich vielen Schnittpunkten der Geraden $x_1 = \xi$ mit R_1^λ markiert. Dabei ist der Faktor von $d\xi$ an den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ , für welche R von der Geraden $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 II (13) berührt wird, d. h. also für welche die Gerade eine der Mannigfaltigkeiten R_1^λ im üblichen Sinne berührt oder

durch einen ihrer Endpunkte geht, als nicht definiert zu betrachten. An den übrigen Stellen ist er als Funktion von ξ stetig und gemäß § 8 VI (3) im ganzen Gebiet absolut integrierbar.

Nun ist

$$\cos(x_2, N)_\mu = \pm \cos \Psi_\mu(x_1, t),$$

wobei das positive Vorzeichen gilt, wenn an der betreffenden Stelle die Richtung der wachsenden x_2 aus K hinaustritt, das negative, wenn sie hineintritt. Durch Summation der Gleichung (179) über λ ergibt sich demgemäß bei Berücksichtigung von (178)

$$\int_R \varphi \cos(x_2, N) d\sigma_1 = \int_\alpha^\beta d\xi \int_{Q(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2.$$

Wegen (164) folgt hieraus die Gleichung (177), die allein noch zu beweisen war.

III. Es sei K ein regulärer Körper im n -dimensionalen Raum. Es sei $n \geq 3$. Die rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ seien so gewählt, daß ihre Richtungen in bezug auf K nichtsingulär sind. Der Rand von K werde mit R bezeichnet. Es gibt dann nur endlich viele Werte von ξ , für welche K von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 IV (13) berührt wird, oder, was definitionsmäßig dasselbe ist, eine der endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus denen R zusammengesetzt ist, von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 III (13) berührt wird. Diese Werte sollen im folgenden kurz als die *Ausnahmestellen* von ξ bezeichnet werden.

Es sei nun ξ' keine der Ausnahmestellen. Gemäß § 6 IV (14) besteht dann $K(x_1 \leq \xi')$ aus endlich vielen regulären Körpern. Die endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten dieser endlich vielen Körper erfüllen den Querschnitt $Q(\xi')$ und die Punktmenge $R(x_1 \leq \xi')$, d. h. denjenigen Teil des Randes R , für welchen $x_1 \leq \xi'$ ist. Dabei können je zwei verschiedene dieser regulären $(n-1)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten nur Punkte gemein haben, die für beide wiederum auf dem Rande liegen, die also auf endlich vielen regulären $(n-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten gelegen sind.

Indem man auf jeden dieser Körper das Greensche Lemma anwendet und dann das Resultat über alle Körper summiert, ergibt sich für eine beliebige nebst ihren ersten Ableitungen in K stetig definierte Funktion χ

$$\int_{R(x_1 \leq \xi')} \chi \cos(x_1, N) d\sigma_{n-1} + \int_{Q(\xi')} \chi dx_2 \dots dx_n = \int_{K(x_1 \leq \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Also ist wegen (92) und (93)

$$(180) \quad \int_{Q(\xi')} \chi dx_2 \dots dx_n = - \int_{R(x_1 \leq \xi')} \chi \cos(x_1, N) d\sigma_{n-1} + \int_\alpha^{\xi'} d\xi \int_{Q(\xi)} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_2 \dots dx_n.$$

wobei α so gewählt ist, daß für alle Punkte von K

$$x_1 \geq \alpha$$

Dabei stellt der Faktor von $d\xi$ im zweiten Integrale auf der rechten Seite gemäß § 8 III eine stetige Funktion von ξ dar.

Jetzt wende man auf jede der endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen R definitionsmäßig besteht, die Gleichung (116) an, indem man für φ die Funktion $\chi \cos(x_1, N)$ einsetzt. Durch Summation ergibt sich dann

$$\frac{d}{d\xi'} \int_{R(x_1 \leq \xi')} \chi \cos(x_1, N) d\sigma_{n-1} = \int_{R(x_1 = \xi')} \chi \cos(x_1, N) \frac{1}{\cos \Psi(x_1, t)} d\sigma_{n-2}.$$

Nun ist offenbar

$$(181) \quad \cos \Psi(x_1, t) = \sin(x_1, N) > 0.$$

Bei Einführung dieser beiden letzten Gleichungen ergibt die Differentiation von (180) nach ξ'

$$(182) \quad \frac{d}{d\xi'} \int_{Q(\xi')} \chi dx_2 \dots dx_n = - \int_{R(x_1 = \xi')} \chi \cotg(x_1, N) d\sigma_{n-2} + \int_{Q(\xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_2 \dots dx_n.$$

Dabei sind die Integrale auf der rechten Seite beide als Funktionen von ξ' stetig.

Das Integral

$$(183) \quad \int_{Q(\xi)} \chi dx_2 \dots dx_n$$

ist also als Funktion von ξ , abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen stetig differenzierbar. Aber auch an diesen Ausnahmestellen bleibt das Integral selbst gemäß § 8 III stetig.

IV. Setzt man im Integral (183) $\chi \equiv 1$ und definiert die Funktion $J(\xi)$ durch die Gleichung

$$(184) \quad J(\xi) = J_{n-1}(Q(\xi)),$$

wobei das Symbol J_{n-1} den $(n-1)$ -dimensionalen Inhalt bedeutet, so ergibt sich:

$J(\xi)$ ist für alle Werte von ξ stetig und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen auch stetig differenzierbar. Abgesehen von diesen Ausnahmestellen gilt dann auch die Darstellung

$$(185) \quad \frac{d}{d\xi} J(\xi) = - \int_{R(x_1 = \xi)} \cotg(x_1, N) d\sigma_{n-2}.$$

Bezeichnet α^* das Minimum und β^* das Maximum von x_1 in K , so ist wegen der für alle Werte von ξ gültigen Stetigkeit von $J(\xi)$

$$(186) \quad J(\alpha^*) = J(\beta^*) = 0.$$

Da nun gemäß der Definitionseigenschaft § 6 IV (d) jeder Randpunkt von K Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so ist α^* die untere Grenze von x_1 für alle inneren Punkte von K und β^* die obere Grenze. Ist daher

$$\alpha^* < \xi < \beta^*,$$

so gibt es einen inneren Punkt P'' , für welchen $x_1 < \xi$ ist, und einen inneren Punkt P' , für welchen $x_1 > \xi$ ist. Gemäß der Definitionseigenschaft § 6 IV (e) lassen sich nun P'' und P' durch einen ganz im Innern von K verlaufenden Weg verbinden. Also muß es auf der Ebene $x_1 = \xi$ innere Punkte von K geben. Diese sind a fortiori auch innere Punkte des Querschnittes $Q(\xi)$. Daher verschwindet im Intervall

$$\alpha^* \leq \xi \leq \beta^*$$

$J(\xi)$ nur an den Endpunkten α^* und β^* , welche übrigens offenbar auch zu den sogenannten Ausnahmestellen von ξ gehören.

V. Setzt man im Integral (183) $\chi = x_\nu$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, so ergibt sich aus dem Abschnitt III:

Das Integral

$$(187) \quad \int_{Q(\xi)} x_\nu dx_2 \dots dx_n$$

ist als Funktion von ξ überall stetig und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ stetig differenzierbar.

Es sei nun

$$\alpha^* < \xi < \beta^*.$$

Man bezeichne die Koordinaten des Schwerpunktes von $Q(\xi)$ mit

$$\eta_\nu(\xi), \quad \nu = 2, 3, \dots, n.$$

Dann gilt

$$(188) \quad \eta_\nu(\xi) = \frac{1}{J(\xi)} \int_{Q(\xi)} x_\nu dx_2 \dots dx_n,$$

wobei der Nenner, wie in IV gezeigt, nicht verschwindet. Die oben unter IV und V gemachten Ausführungen ergeben also:

Die Koordinaten $\eta_\nu(\xi)$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, des Schwerpunktes von $Q(\xi)$ sind für $\alpha^* < \xi < \beta^*$ als Funktionen von ξ überall stetig und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten stetig differenzierbar.

VI. Man wende die Sätze § 8 VI (1) und (2) auf die endlich vielen regulären $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten an, aus welchen R zusammengesetzt ist. Durch Summation ergibt sich dann: Der Flächeninhalt

$$(189) \quad F_{n-1}(R(x_1 \leq \xi))$$

ist als Funktion von ξ überall stetig und abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen auch stetig differenzierbar. Bei Berücksichtigung der Gleichung

$$(190) \quad \cos \Psi(x_1, t) = \sin(x_1, N) > 0$$

liefert die Gleichung (115) für den Differentialquotienten, abgesehen von den Ausnahmestellen, die Darstellung

$$(191) \quad \frac{d}{d\xi} \{F_{n-1}(R(x_1 \leq \xi))\} = \int_{R(x_1 = \xi)} \frac{1}{\sin(x_1, N)} d\sigma_{n-2}.$$

Nun ist

$$(192) \quad \frac{1}{\sin(x_1, N)^2} = 1 + \cotg(x_1, N)^2.$$

Also folgt aus der § 4 I hergeleiteten Ungleichung von Schwarz bei Einführung von (185)

$$(193) \quad \frac{d}{d\xi} \{F_{n-1}(R(x_1 \leq \xi))\} \geq \sqrt{\left(\int_{R(x_1 = \xi)} d\sigma_{n-2}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi} J(\xi)\right)^2},$$

$$(193) \quad \frac{d}{d\xi} \{F_{n-1}(R(x_1 \leq \xi))\} \geq \sqrt{\{F_{n-2}(R(x_1 = \xi))\}^2 + \left(\frac{d}{d\xi} J(\xi)\right)^2}^{\text{8)}).$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn für $x_1 = \xi$ $\cotg(x_1, N)$ konstant bleibt. Diese Bedingung ist, da gemäß (190) $\sin(x_1, N)$ positiv ist, gleichbedeutend mit der Bedingung, daß für $x_1 = \xi$ $\cos(x_1, N)$ konstant bleibt.

Wendet man endlich den Satz § 8 VI (4) auf die einzelnen regulären $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten an, aus welchen R zusammengesetzt ist, so ergibt sich durch Summation, daß, abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen von ξ auch

$$F_{n-2}(R(x_1 = \xi))$$

als Funktion von ξ stetig ist. Von dieser Einsicht wird übrigens in der Folge kein Gebrauch gemacht.

§ 10.

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft für die Kugel im n -dimensionalen Raum.

Es sei $n \geq 3$ und K ein regulärer Körper im n -dimensionalen Raum im Sinne von § 6 IV, V sein Volumen, O seine Oberfläche und $|O|$ deren Flächen-

⁸⁾ H. A. Schwarz, l. c., S. 331 (1b).

inhalt. Es bedeute wie in § 3 E_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel. Dann gilt:

$$(194) \quad V \leq \frac{1}{\frac{n}{n-1} \frac{1}{E_n^{n-1}}} \cdot |O|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Kugel.

Beweis. (I). Wir nehmen den Satz für $n-1$ Dimensionen als bewiesen an. Dann gilt im $(n-1)$ -dimensionalen Raum zunächst folgende Erweiterung:

Es seien K_μ mit den Volumina V_μ und den Oberflächeninhalten $|O_\mu|$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) m reguläre $(n-1)$ -dimensionale Körper im $(n-1)$ -dimensionalen Raum, von denen je zwei nur Punkte gemein haben können, die für keinen von beiden innere Punkte oder Randpunkte sind, die im Innern einer seiner regulären $(n-2)$ -dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen. Bezeichnet V das Volumen der Vereinigungsmenge dieser Körper und O die Oberfläche der Vereinigungsmenge, so ist zunächst wegen der gemachten Voraussetzungen

$$V = \sum_1^m V_\mu, \quad |O| = \sum_1^m |O_\mu|.$$

Es gilt aber auch die isoperimetrische Ungleichung

$$(195) \quad V \leq \alpha_{n-1} \cdot |O|^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad \alpha_{n-1} = \frac{1}{\frac{n-1}{(n-1)^{\frac{n-1}{n-2}}} \cdot E_{n-1}^{\frac{1}{n-2}}},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann besteht, wenn es sich um einen einzigen Körper handelt und dieser eine Kugel ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} V &= \sum_1^m V_\mu \leq \alpha_{n-1} \sum_1^m |O_\mu|^{\frac{n-1}{n-2}} \\ &= \alpha_{n-1} \sum_1^m |O_\mu| |O_\mu|^{\frac{1}{n-2}} \leq \alpha_{n-1} |O|^{\frac{1}{n-2}} \sum_1^m |O_\mu| = \alpha_{n-1} |O|^{\frac{n-1}{n-2}}. \end{aligned}$$

II. Es sei wie in I $n \geq 3$. Man behalte die Bezeichnungsweise von § 9 III, IV, V, VI bei, nur möge der Rand R des regulären Körpers K mit O bezeichnet werden. Es sei ξ keine der endlich vielen Ausnahmestellen, für welche K von der Ebene $x_1 = \xi$ im Sinne von § 6 IV (13) berührt wird.

Dann besteht gemäß § 6 IV (13) der Querschnitt $Q(\xi)$ aus endlich vielen regulären $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche in dem auf der Ebene $x_1 = \xi$ ausgebreiteten $(n-1)$ -dimensionalen Raum die Voraussetzungen der Ungleichung (195) erfüllen.

Also gilt

$$(196) \quad J(\xi) \leq \alpha_{n-1} \{F_{n-2}(O(x_1 = \xi))\}^{\frac{n-1}{n-2}}$$

wobei α_{n-1} wie in (195) definiert ist. Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $Q(\xi)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel ist.

Definiert man

$$|O(x_1 \leq \xi)| = F_{n-1}(O(x_1 \leq \xi)),$$

so ergibt sich gemäß (193), (196)

$$(197) \quad \frac{d}{d\xi} |O(x_1 \leq \xi)| \geq \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} J(\xi)\right)^{2 \cdot \frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{d}{d\xi} J(\xi)\right)^2}.$$

Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen sind die Ausdrücke auf beiden Seiten gemäß § 9 IV und § 9 VI als Funktionen von ξ stetig, während die Funktionen

$$J(\xi), \quad |O(x_1 \leq \xi)|$$

überall, also insbesondere auch an den Ausnahmestellen, stetig bleiben.

Definiert man daher $|\bar{O}|$ durch die Gleichung

$$(198) \quad |\bar{O}| = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} d\xi \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} J(\xi)\right)^{2 \cdot \frac{n-2}{n-1}} + \left(\frac{d}{d\xi} J(\xi)\right)^2},$$

so gilt

$$(199) \quad |O| \geq |\bar{O}|.$$

Dabei ist der Integrand auf der rechten Seite von (198) an den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ als nicht definiert zu betrachten, während er, wie eben hervorgehoben, sonst überall stetig bleibt. Ferner gilt in (199) das Gleichheitszeichen wegen (193), (196) dann und nur dann, wenn, immer abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ ,

erstens: $\cos(x_1, N)$ auf der Ebene $x_1 = \xi$ konstant bleibt;

zweitens: $Q(\xi)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel ist.

III. Wir wollen nun beweisen, daß die am Schluß von II angegebenen, für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (199) notwendigen und hinreichenden Bedingungen nur erfüllt sind, wenn K ein Rotationskörper um eine zur x_1 -Achse parallele Rotationsachse ist, dessen Oberfläche einer Gleichung von der Form

$$(200) \quad \sum_2^n (x_v - c_v)^2 = r(x_1)^2$$

genügt. Dabei bedeuten die c_v Konstanten und die Funktion $r(x_1)$ wird definiert durch die Gleichung

$$(201) \quad E_{n-1} r(\xi)^{n-1} = J(\xi).$$

⁹⁾ H. A. Schwarz, l. c., S. 335 (IIb).

Beweis. Aus der Gleichung (201) folgt zunächst, daß $r(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig ist.

Nun ist, wie § 9 IV gezeigt, $J(\xi)$ abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen stetig differenzierbar und verschwindet im Intervall $\alpha^* \leq \xi \leq \beta^*$ nur an den Stellen $\xi = \alpha^*$ und $\xi = \beta^*$, welche auch zu den Ausnahmestellen gehören. Daher ist $r(\xi)$, abgesehen von den Ausnahmestellen, auch stetig differenzierbar und verschwindet im Intervall $\alpha^* \leq \xi \leq \beta^*$ nur an den Endpunkten α^* und β^* .

Es seien ferner

$$x_\nu = \eta_\nu(\xi), \quad \nu = 2, 3, \dots, n,$$

die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel $Q(\xi)$. Da der Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der Kugel zusammenfällt, so sind gemäß § 9 V auch die Funktionen $\eta_\nu(\xi)$ für $\alpha^* < x_1 < \beta^*$ abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen stetig differenzierbar und einschließlich dieser Stellen stetig. Abgesehen von den Ausnahmestellen von ξ ist der $(n-1)$ -dimensionale Inhalt der Kugel $Q(\xi)$ definitionsgemäß gleich $J(\xi)$ und ihr Radius wegen (201) gleich $r(\xi)$.

Schreibt man statt ξ wieder x_1 , so ist also, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von x_1 , die Gleichung der Oberfläche O

$$(202) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_2^n (x_\nu - \eta_\nu(x_1))^2 - r(x_1)^2 = 0.$$

Nun ist

$$\cos^2(x_1, N) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \sum_2^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)^2},$$

$$(203) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 = \frac{\cos^2(x_1, N)}{1 - \cos^2(x_1, N)} \sum_2^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)^2.$$

Durch Differentiation von (202) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \sum_2^n (x_\nu - \eta_\nu(x_1)) \eta'_\nu(x_1) - 2 r(x_1) r'(x_1),$$

$$\sum_2^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)^2 = 4 \cdot r(x_1)^2.$$

Aus der Einführung dieser beiden Formeln in (203) folgt

$$(204) \quad \sum_2^n \eta'_\nu(x_1) (x_\nu - \eta_\nu(x_1)) - r(x_1) r'(x_1) \pm \cotg(x_1, N) r(x_1) = 0.$$

Voraussetzungsgemäß ist $\cotg(x_1, N)$ bei festem x_1 konstant. Wenn daher nicht sämtliche Ableitungen $\eta'_\nu(x_1)$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, verschwinden, so stellt die letzte Gleichung (204) bei festgehaltenem x_1 , $\alpha^* < x_1 < \beta^*$, im Raume

$(x_2, x_3, \dots, x_n)$ zwei parallele $(n - 2)$ -dimensionale Ebenen dar. Auf diesen müßte die ganze Oberfläche der $(n - 1)$ -dimensionalen Kugel (202) liegen, deren Radius $r(x_1)$, wie oben gezeigt, nicht verschwindet. Das ist unmöglich. Also verschwinden, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, sämtliche Ableitungen $\eta'_\nu(x_1)$, $\nu = 2, 3, \dots, n$. Da aber die Funktionen $\eta_\nu(x_1)$ an den Stellen α^* und β^* zwar nicht definiert, aber im Gebiet $\alpha^* < x_1 < \beta^*$ einschließlich der Ausnahmestellen stetig sind, so sind sie in diesem Gebiet Konstanten. Bezeichnet man diese mit c_ν , $\nu = 2, 3, \dots, n$, und die endlich vielen Ausnahmewerte von x_1 mit α_p , $p = 1, 2, \dots$, so genügen also abgesehen von den auf den Ebenen $x_1 = \alpha_p$, $p = 1, 2, \dots$ gelegenen Punkten, die Punkte von O der Gleichung

$$(205) \quad \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - c_\nu)^2 = r(x_1)^2.$$

Liegt nun ein Punkt Q im Innern des durch (205) dargestellten Rotationskörpers auf einer der Ausnahmeebenen $x_1 = \alpha_p$, so ist er Häufungspunkt von inneren Punkten des Rotationskörpers (205), die auf keiner der Ausnahmeebenen liegen und daher dem gegebenen Körper K angehören. Also gehören alle inneren und mithin auch alle Randpunkte des Rotationskörpers (205) K an. Liegt aber ein Punkt Q im Äußern des Rotationskörpers auf einer der Ausnahmeebenen, so kann er nicht Häufungspunkt von inneren Punkten von K sein. Gemäß der Definitionseigenschaft § 6 IV (d) muß aber jeder Punkt eines regulären Körpers Häufungspunkt von inneren Punkten sein. Also gehört der Punkt Q nicht zu K . Damit ist festgestellt, daß der Körper K mit dem durch die Gleichung (205) gegebenen Rotationskörper identisch ist, w. z. b. w.

IV (1). Man ordne nun dem Körper K einen Rotationskörper $\bar{K}_\varepsilon$ mit dem Volumen $\bar{V}_\varepsilon$, der Oberfläche $\bar{O}_\varepsilon$ und deren Flächeninhalt $|\bar{O}_\varepsilon|$ in folgender Weise zu¹⁰⁾:

Es sei

$$0 < \varepsilon < \frac{\beta^* - \alpha^*}{2}.$$

Die Rotationsachse sei die x_1 -Achse. In der Meridianebene (x_1, r) sei längs der Meridiankurve C für

$$(206) \quad \begin{aligned} \alpha^* + \varepsilon &\leq x_1 \leq \beta^* - \varepsilon, \\ r &= r(x_1), \end{aligned}$$

wobei die Funktion $r(x_1)$, wie in III, durch die Gleichung (201) definiert ist.

¹⁰⁾ Der durch (205) gegebene Rotationskörper könnte wegen des Verschwindens von $J(\xi)$ an den Stellen α^* und β^* eine Meridiankurve von unendlicher Länge besitzen. Aus diesem Grunde empfiehlt sich hier der Umweg über die approximierenden Rotationskörper $\bar{K}_\varepsilon$.

Von den Punkten

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha^* + \varepsilon, & r &= r(\alpha^* + \varepsilon), \\x_1 &= \beta^* - \varepsilon, & r &= r(\beta^* - \varepsilon)\end{aligned}$$

aus münde die Meridiankurve C auf zwei der r -Achse parallelen Geradenstücken in die Punkte der Rotationsachse

$$x_1 = \alpha^* + \varepsilon, \quad x_1 = \beta^* - \varepsilon$$

ein.

Nun ist wegen (198), (199)

$$(207) \quad \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \left| \frac{d}{d\xi} J(\xi) \right| < |\bar{O}| \leq |O|.$$

Ferner ist wegen (201)

$$(208) \quad \frac{d}{d\xi} r(\xi) = \frac{1}{(n-1)} E_{n-1}^{\frac{-1}{n-1}} J(\xi)^{\frac{1}{n-1}-1} \frac{d}{d\xi} J(\xi).$$

Bezeichnet μ_ε das Minimum von $J(\xi)$ im Intervall (206), so ist, wie in III gezeigt,

$$\mu_\varepsilon > 0.$$

Gemäß (208) ist daher

$$(209) \quad \left| \frac{d}{d\xi} r(\xi) \right| \leq \frac{1}{(n-1) E_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \mu_\varepsilon^{1-\frac{1}{n-1}}} \cdot \left| \frac{d}{d\xi} J(\xi) \right|.$$

Also ist wegen (207) auch das Integral

$$(210) \quad \int_{\alpha^* + \varepsilon}^{\beta^* - \varepsilon} \left| \frac{d}{d\xi} r(\xi) \right| d\xi$$

endlich.

Die Meridiankurve C des Rotationskörpers $\bar{K}_\varepsilon$ hat mithin auch eine endliche Länge. Der Körper $\bar{K}_\varepsilon$ erfüllt damit in Berücksichtigung der schon unter III über die Funktion $r(\xi)$ gemachten Feststellungen die Voraussetzungen der § 3 in Betracht gezogenen Rotationskörper. Es gilt also für $\bar{K}_\varepsilon$ die isoperimetrische Ungleichung (34)

$$(211) \quad \bar{V}_\varepsilon \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}} \cdot \frac{1}{E_n^{\frac{1}{n-1}}} \cdot |\bar{O}_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Nun ist

$$\bar{V}_\varepsilon = \int_{\alpha^* + \varepsilon}^{\beta^* - \varepsilon} J(\xi) d\xi.$$

Da wegen (91)

$$V = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} J(\xi) d\xi$$

ist, so folgt

$$(212) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{V}_\varepsilon = V.$$

Für den Oberflächeninhalt $|\bar{O}_\varepsilon|$ erhält man gemäß § 3 IV (7'')

$$(213) \quad |\bar{O}_\varepsilon| = E_{n-1} (r(\alpha^* + \varepsilon))^{n-1} + E_{n-1} (r(\beta^* - \varepsilon))^{n-1} \\ + (n-1) E_{n-1} \int_{\alpha^* + \varepsilon}^{\beta^* - \varepsilon} r(\xi)^{n-2} \sqrt{1 + \left(\frac{dr(\xi)}{d\xi}\right)^2} d\xi.$$

Nun ist wegen (201)

$$(214) \quad (n-1) E_{n-1} r(\xi)^{n-2} \sqrt{1 + \left(\frac{dr(\xi)}{d\xi}\right)^2} \\ = \sqrt{\{(n-1) E_{n-1} r(\xi)^{n-2}\}^2 + \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2} \\ = \sqrt{\left\{\frac{1}{\alpha_{n-1}} J(\xi)\right\}^2 \cdot \frac{n-2}{n-1} + \left\{\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right\}^2},$$

wobei α_{n-1} wie in (195) definiert ist. Aus (213), (214), (198) folgt wegen $r(\alpha^*) = r(\beta^*) = 0$

$$(215) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\bar{O}_\varepsilon| = |\bar{O}|.$$

Die Gleichungen (211), (212), (215) ergeben

$$(216) \quad V \leq \frac{1}{n^{\frac{n-1}{n-1}}} \cdot \frac{1}{E_n^{\frac{n-1}{n-1}}} \cdot |\bar{O}|^{\frac{n}{n-1}}.$$

Wegen (199) folgt hieraus a fortiori die zu beweisende isoperimetrische Ungleichung (194).

IV (2). Man kann der isoperimetrischen Ungleichung noch folgende Verschärfung geben:

Ist ϱ das Maximum der durch (201) definierten stetigen Funktion $r(\xi)$, so ist wegen (206) bei genügend kleinem ε ϱ auch das Maximum des Radius der $(n-1)$ -dimensionalen Breitenkugel des Rotationskörpers $\bar{K}_\varepsilon$. Es ist daher gemäß (33)

$$\bar{V}_\varepsilon \leq \frac{1}{n-1} (|\bar{O}_\varepsilon| \cdot \varrho - E_n \varrho^n).$$

Wegen (212), (215) folgt hieraus

$$V \leq \frac{1}{n-1} (|\bar{O}| \cdot \varrho - E_n \varrho^n).$$

Also gilt wegen (199) die, wie § 3 I gezeigt, verschärfte isoperimetrische Ungleichung

$$(217) \quad V \leq \frac{1}{n-1} \cdot (|O| \cdot \varrho - E_n \varrho^n).$$

V. Jetzt soll noch bewiesen werden, daß in der isoperimetrischen Ungleichung (194) das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt.

Beweis. Das Gleichheitszeichen in (194) fordert wegen (216) auch das Gleichheitszeichen in (199) und dieses fordert, wie in III bewiesen, daß K ein Rotationskörper um eine der x_1 -Achse parallele Rotationsachse ist, dessen Oberfläche einer Gleichung von der Form

$$(218) \quad \sum_2^n (x_r - c_r)^2 = r(x_1)^2$$

genügt.

Auf Grund von § 3 II ließe sich hieraus die zu beweisende Behauptung folgern. Man kann jedoch den Beweis § 3 II für den vorliegenden Zweck entbehren und schließt einfacher folgendermaßen:

Die Vertauschung von x_1 mit x_2 ergibt, daß das Gleichheitszeichen in (194) ebenso auch fordert, daß der Körper K ein Rotationskörper um eine der x_2 -Achse parallele Rotationsachse ist, dessen Oberfläche einer der Gleichung (218) entsprechenden Gleichung genügt. Die beiden Rotationsachsen schneiden sich im Schwerpunkt von K . Denkt man sich diesen zum Koordinatenanfangspunkt gewählt, so werden die x_1 -Achse und die x_2 -Achse zu Rotationsachsen des Körpers. Die Gleichung seiner Oberfläche läßt sich dann entsprechend (218) in folgenden beiden Gestalten darstellen.

$$(219) \quad \sum_1^n x_i^2 = x_1^2 + r_1(x_1)^2,$$

$$(220) \quad \sum_1^n x_i^2 = x_2^2 + r_2(x_2)^2.$$

Bezeichnen α^* und β^* wie früher das Minimum und das Maximum von x_1 in K , so gilt, wie unter III gezeigt,

$$r_1(\alpha^*) = r_1(\beta^*) = 0.$$

Die beiden Extremalwerte $x_1 = \alpha^*$ und $x_1 = \beta^*$ werden daher auf den Schnittpunkten der x_1 -Achse mit O angenommen und liegen also auf dem Schnitt der Ebene $x_2 = 0$ mit O . Da dieser Schnitt durch die Oberfläche einer $(n-1)$ -dimensionalen Kugel gebildet wird, so nimmt die Koordinate x_1 auf dem Schnitte auch alle Werte zwischen α^* und β^* an. Also werden alle Werte, welche x_1 überhaupt auf O annimmt, auch auf dem Schnitt der Ebene

$x_2 = 0$ mit O angenommen. Für diesen Schnitt gilt nun gemäß (219), (220) die Gleichung

$$x_1^2 + r_1(x_1)^2 = r_2(0)^2.$$

Also ergibt (219) für alle Punkte von O die Gleichung

$$\sum_1^n x_i^2 = r_2(0)^2,$$

d. h. K ist eine Kugel, w. z. b. w.

§ 11.

Verschärfung der isoperimetrischen Abschätzung im n -dimensionalen Raum.

I. Hilfssatz. Es bezeichne ω eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge im n -dimensionalen Raum und Q ihren Querschnitt mit einer beliebigen $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene E . Es bezeichne $\tilde{Q}$ die Gesamtheit der auf Q gelegenen inneren Punkte von ω . Jeder Punkt von $\tilde{Q}$ ist dann auch ein innerer Punkt von Q in bezug auf E , aber das Umgekehrte braucht nicht der Fall zu sein. Es möge ebenso die unendliche Folge der Ebenen E^m mit ω die Querschnitte Q^m bilden, und $\tilde{Q}^m$ die Gesamtheit der auf Q^m gelegenen inneren Punkte von ω bezeichnen. Es gelte endlich die Konvergenz

$$(221) \quad E^m \rightarrow E.$$

Dann ist

$$(222) \quad \liminf \underline{J}(\tilde{Q}^m) \geq \underline{J}(\tilde{Q}),$$

$$(223) \quad \limsup \bar{J}(Q^m) \leq \bar{J}(Q).$$

Dabei bedeuten die Symbole $\underline{J}$ und $\bar{J}$ den inneren und äußeren $(n - 1)$ -dimensionalen Inhalt. Mit anderen Worten:

$\bar{J}(Q)$ ist als Funktion von E nach oben halbstetig und $\underline{J}(\tilde{Q})$ nach unten. Jedoch soll im folgenden von dieser Deutung der Ungleichungen (222), (223) kein weiterer Gebrauch gemacht werden.

Beweis der Ungleichung (222). Man zerlege die Ebene E in ein Netz paralleler kongruenter $(n - 1)$ -dimensionaler Würfel und bezeichne mit Q' diejenige Punktmenge, welche aus allen den Würfeln zusammengesetzt ist, die ganz in $\tilde{Q}$ enthalten sind. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann das Würfelnetz so dicht gewählt werden, daß

$$(224) \quad J(Q') > \underline{J}(\tilde{Q}) - \varepsilon$$

wird. Es sei nun h die Minimalentfernung zwischen Q' und dem Rande von ω . Dann ist $h > 0$. Man kann nun wegen (221) m so groß wählen, daß die Entfernung jedes zu Q' gehörenden Punktes P von demjenigen Punkte von E^m , dessen senkrechte Projektion auf E der Punkt P ist, kleiner als h bleibt. Die Gesamtheit dieser auf E^m gelegenen Punkte, die mit Q'^m bezeichnet werden möge, besteht daher nur aus inneren Punkten von ω . Es ist also

$$(225) \quad Q'^m < \tilde{Q}^m,$$

$$(226) \quad J(Q'^m) = \underline{J}(Q'^m) \leq \underline{J}(\tilde{Q}^m).$$

Ferner ist, wenn N und N^m die Normalenrichtungen von E und E^m bezeichnen,

$$(227) \quad J(Q') = J(Q'^m) \cdot |\cos(N, N^m)|.$$

Aus (226), (227), (224) folgt

$$(228) \quad \begin{aligned} \underline{J}(\tilde{Q}^m) &\geq J(Q'^m) \geq J(Q') > \underline{J}(\tilde{Q}) - \varepsilon, \\ \underline{J}(\tilde{Q}^m) &> \underline{J}(\tilde{Q}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ bei genügend großem m erfüllt ist, so ist der zu führende Beweis für die Ungleichung (222) erbracht.

Beweis der Ungleichung (223). Man zerlege die Ebene E in ein Netz paralleler, kongruenter $(n-1)$ -dimensionaler Würfel und bezeichne mit Q'' diejenige Punktmenge, welche aus allen den Würfeln zusammengesetzt ist, welche im Innern oder auf dem Rande Punkte von Q enthalten. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann das Würfelnetz so dicht gewählt werden, daß

$$(229) \quad J(Q'') < \bar{J}(Q) + \varepsilon$$

wird.

Es sei h die Minimalentfernung zwischen ω und der Gesamtheit der nicht zu Q'' gehörenden $(n-1)$ -dimensionalen Netzwürfel auf E . Dann ist $h > 0$. Man kann wegen (221) m so groß wählen, daß die Entfernung jedes auf dem Querschnitt Q^m liegenden Punktes von seiner senkrechten Projektion auf E kleiner als h bleibt. Dann muß diese Projektion auf Q'' liegen. Bezeichnet also Q''^m diejenige Punktmenge auf E^m , deren senkrechte Projektion auf E Q'' erfüllt, so ist

$$(230) \quad Q^m < Q''^m,$$

$$(231) \quad \bar{J}(Q^m) \leq \bar{J}(Q''^m) = J(Q''^m).$$

Ferner ist

$$(232) \quad J(Q'') = J(Q''^m) \cdot |\cos(N, N^m)|.$$

Aus (231), (232), (229) ergibt sich

$$\bar{J}(Q^m) \leq J(Q''^m) = \frac{1}{|\cos(N, N^m)|} \cdot J(Q'') < \frac{1}{|\cos(N, N^m)|} (\bar{J}(Q) + \varepsilon).$$

Da die letzte Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ bei genügend großem m erfüllt ist, so ergibt sich wegen

$$|\cos(N, N^m)| \rightarrow 1$$

die zu beweisende Ungleichung (223).

II. Hilfssatz. Es bezeichne η eine Richtung im n -dimensionalen Raum, die etwa durch eine durch den Koordinatenanfangspunkt gehende, nicht mit einem Durchlaufungssinn versehene Gerade η repräsentiert sei. Unter der Gesamtheit der zu η senkrechten $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen gibt es dann mindestens eine, für welche der äußere Inhalt ihres Querschnitts mit der beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge ω zum Maximum wird.

Beweis. Es sei M die obere Grenze der äußeren Inhalte der zu η senkrechten Querschnitte. Dann gibt es senkrecht zu η eine Folge von Ebenen E^m mit den Querschnitten Q^m , so daß

$$(233) \quad \bar{J}(Q^m) \rightarrow M$$

gilt.

Man kann durch Auswahl als erreicht annehmen, daß die Ebenen E^m gegen eine zu η senkrechte Ebene E konvergieren,

$$(234) \quad E^m \rightarrow E.$$

Der Querschnitt von E werde mit Q bezeichnet.

Dann folgt aus (234), (223), (233)

$$M \leq \bar{J}(Q)$$

und damit wegen der Definition von M

$$(235) \quad \bar{J}(Q) = M.$$

w. z. b. w.

Man bezeichne einen solchen Querschnitt als einen zur Richtung η senkrechten *Maximalquerschnitt*.

III. Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von I und II bezeichne man ferner mit s den Rand von ω und mit $D(Q, s)$ den Durchschnitt von Q und s . Dann gilt zunächst die Punktmengengleichung

$$(236) \quad Q = \tilde{Q} + D(Q, s),$$

wobei die beiden Summanden auf der rechten Seite punktfremd sind. Hieraus folgt

$$(237) \quad \bar{J}(Q) \leq \bar{J}(\tilde{Q}) + \bar{J}(D(Q, s)).$$

Da $\tilde{Q}$ eine offene Punktmenge ist und Q eine abgeschlossene, so ergibt (236), daß sowohl der Rand von $\tilde{Q}$ als auch der Rand von Q in $D(Q, s)$ enthalten sind.

Ist also

$$(238) \quad \bar{J}(D(Q, s)) = 0,$$

so haben sowohl $\tilde{Q}$ als auch Q Ränder vom äußeren Inhalt Null und mithin gemäß § 7 II (1) beide einen bestimmten Inhalt, d. h. es ist

$$\underline{J}(\tilde{Q}) = \bar{J}(\tilde{Q}) = J(\tilde{Q}),$$

$$\underline{J}(Q) = \bar{J}(Q) = J(Q).$$

Die Einführung von (238) in (237) ergibt endlich bei Berücksichtigung von (236)

$$(239) \quad \underline{J}(\tilde{Q}) = J(\tilde{Q}) = J(Q) = \bar{J}(Q).$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Gleichung (238) auch eine *notwendige* Bedingung für die Gültigkeit der Gleichungen (239) darstellt. Denn wegen der Punktfremdheit der beiden Summanden auf der rechten Seite sichert die Gleichung (236) auch die Ungleichung

$$\bar{J}(Q) \geq \underline{J}(\tilde{Q}) + \bar{J}(D(Q, s)).$$

Auf die Ausführung des sich fast unmittelbar anbietenden Beweises dieser allgemein bekannten Ungleichung kann hier um so mehr verzichtet werden, als von der Schlußbemerkung in der Folge kein Gebrauch gemacht wird.

IV. Der Verschärfungssatz. Es sei K ein regulärer Körper im n -dimensionalen Raum, V sein Volumen, O seine Oberfläche, $|O|$ deren Flächeninhalt. Als Vergleichskugel bezeichne man die n -dimensionale Kugel mit demselben Oberflächeninhalt $|O|$. Der Radius P der Vergleichskugel wird dann gegeben durch die Gleichung

$$(240) \quad nE_n P^{n-1} = |O|.$$

Senkrecht zu jeder Richtung hat der Maximalquerschnitt der Vergleichskugel den Inhalt

$$(241) \quad E_{n-1} P^{n-1}.$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von I und II bezeichne man jetzt einen beliebigen Querschnitt Q' von K als *exzessiv*, wenn $\underline{J}(\tilde{Q}')$ größer ist als der Inhalt des Maximalquerschnitts der Vergleichskugel. Ferner bezeichne man entsprechend II einen zu einer Richtung η senkrechten Maximalquerschnitt Q' als *defekt*, wenn $\bar{J}(Q')$ kleiner ist als der Inhalt des Maximalquerschnitts der Vergleichskugel. Man definiere nun P' im ersten Fall durch die Gleichung

$$(242) \quad E_{n-1} P'^{n-1} = \underline{J}(\tilde{Q}'),$$

und im zweiten Fall durch die Gleichung

$$(243) \quad E_{n-1} P'^{n-1} = \bar{J}(Q').$$

Dann ist also im ersten Fall

$$(244) \quad P' > P,$$

im zweiten Fall

$$(245) \quad P' < P.$$

Nun nimmt, wie schon § 3 I ausgeführt, die Funktion

$$(246) \quad \frac{1}{n-1} (|O| t - E_n t^n), \quad t \geq 0,$$

für $t = P$ ihr Maximum an, und zwar wird das Maximum gleich $E_n P^n$, also gleich dem Volumen der Vergleichskugel.

Also ist sowohl für den Fall eines exzessiven Querschnitts als auch für den Fall eines defekten, zu einer Richtung senkrechten Maximalquerschnitts

$$(247) \quad \frac{1}{n-1} (|O| \cdot P' - E_n P'^n) < V_0,$$

wobei V_0 das Volumen der Vergleichskugel bedeutet und mithin durch die Gleichung

$$(248) \quad V_0 = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_n^{n-1}}} \cdot |O|^{\frac{n}{n-1}}$$

gegeben wird.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Verschärfung der isoperimetrischen Abschätzung, welche das Ziel dieses Paragraphen ist, in folgender Weise formulieren:

Sowohl für den Fall eines exzessiven Querschnitts als auch für den Fall eines defekten Maximalquerschnitts gilt für das Volumen V des Körpers K die Abschätzung

$$(249) \quad V \leq \frac{1}{n-1} (|O| \cdot P' - E_n P'^n),$$

wobei P' im ersteren Fall durch die Gleichung (242) gegeben wird, im letzteren durch die Gleichung (243).

Aus (247), (248) geht hervor, daß diese Abschätzung schärfer ist als die durch den isoperimetrischen Hauptsatz (194) gegebene.

Ehe wir zum Beweise übergehen, seien noch folgende Bemerkungen vorausgeschickt.

Hat der in Betracht gezogene exzessive Querschnitt oder defekte Maximalquerschnitt Q' die Eigenschaft, daß die auf ihm liegenden Punkte von O

den äußeren Inhalt Null haben, so kann wegen III (239) P' in beiden Fällen durch die Gleichung

$$(250) \quad E_{n-1} P'^{n-1} = J(Q')$$

bestimmt werden.

V. Beweis der Ungleichung (249). Es sei ein Querschnitt Q' gegeben. Man wähle das rechtwinklige Koordinatensystem $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ so, daß die Richtung der x_1 -Achse senkrecht zu Q' liegt. Dabei kann natürlich nicht mehr gefordert werden, daß die Richtungen der Koordinatenachsen in bezug auf K nichtsingulär sind. Man kann aber auf Grund von § 6 V (2) eine unendliche Folge von rechtwinkligen Koordinatensystemen $(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ bestimmen, deren Koordinatenanfangspunkte mit dem des Koordinatensystems $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zusammenfallen, deren Achsenrichtungen in bezug auf K sämtlich nichtsingulär sind, und deren positive Richtung der x_{m1} -Achse gegen die positive Richtung der x_1 -Achse konvergiert.

Man bezeichne nun mit $Q_m(\xi)$ den Querschnitt der Ebene, welche im Koordinatensystem $(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ durch die Gleichung $x_{m1} = \xi$ dargestellt wird, und mit $Q(\xi)$ den Querschnitt der Ebene, welche im Koordinatensystem $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ durch die Gleichung $x_1 = \xi$ dargestellt wird. Der gegebene Querschnitt Q' liege beim Koordinatensystem $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ auf der Ebene $x_1 = \xi'$, so daß also

$$(251) \quad Q' = Q(\xi')$$

wird.

Man definiere nun, wie § 10 (201), $r_m(\xi)$ durch die Gleichung

$$(252) \quad E_{n-1} r_m(\xi)^{n-1} = J(Q_m(\xi)).$$

Dann ist, wie dort ausgeführt, $r_m(\xi)$ eine überall stetige Funktion von ξ . Man bezeichne mit ϱ_m das Maximum von $r_m(\xi)$ und mit ξ_m eine Stelle, an welcher dasselbe erreicht wird,

$$(253) \quad r_m(\xi_m) = \varrho_m.$$

Man kann durch Auswahl als erreicht annehmen, daß die drei beschränkten Zahlenfolgen

$$r_m(\xi'), \quad \xi_m, \quad \varrho_m$$

konvergieren. Es gelte also

$$(254) \quad r_m(\xi') \rightarrow r', \quad \xi_m \rightarrow \xi'', \quad \varrho_m \rightarrow \varrho''.$$

Dann ist zunächst

$$(255) \quad r' \leq \varrho''.$$

Ferner ist gemäß (217)

$$V \leq \frac{1}{n-1} (|O| \varrho_m - E_n \varrho_m^n),$$

und daher wegen (254)

$$(256) \quad V \leq \frac{1}{n-1} (|O| \varrho'' - E_n \varrho''^n).$$

Nun konvergiert die Ebene des Querschnitts $Q_m(\xi')$ gegen die Ebene des Querschnitts Q' . Daher ist gemäß (222)

$$(257) \quad \liminf J(\tilde{Q}_m(\xi')) \geq J(\tilde{Q}').$$

Da entsprechend § 8 I (89) der äußere Inhalt des Durchschnitts von $Q_m(\xi)$ mit O für alle Werte von ξ verschwindet, so gilt die Gleichung (239). Es ist also

$$(258) \quad \bar{J}(Q_m(\xi)) = J(\tilde{Q}_m(\xi)) = J(Q_m(\xi)),$$

und für $\xi = \xi'$ wegen (252)

$$J(\tilde{Q}_m(\xi')) = E_{n-1} r_m(\xi')^{n-1}.$$

Aus (257) und (254) folgt mithin

$$E_{n-1} r'^{n-1} \geq J(\tilde{Q}'),$$

und wegen (255) a fortiori

$$(259) \quad E_{n-1} \varrho''^{n-1} \geq J(\tilde{Q}').$$

Andererseits konvergiert die Ebene des Querschnitts $Q_m(\xi_m)$ wegen (254) gegen die Ebene des Querschnitts $Q(\xi'')$. Daher ist gemäß (223)

$$(260) \quad \limsup \bar{J}(Q_m(\xi_m)) \leq \bar{J}(Q(\xi'')).$$

Nun ist gemäß (258), (252), (253)

$$\bar{J}(Q_m(\xi_m)) = J(Q_m(\xi_m)) = E_{n-1} r_m(\xi_m)^{n-1} = E_{n-1} \varrho_m^{n-1}.$$

Bei Einführung dieser Gleichung ergibt (260)

$$\limsup E_{n-1} \varrho_m^{n-1} \leq \bar{J}(Q(\xi'')).$$

Also gilt wegen (254)

$$(261) \quad E_{n-1} \varrho''^{n-1} \leq \bar{J}(Q(\xi'')).$$

Ist nun Q' ein Maximalquerschnitt, so gilt

$$(262) \quad \bar{J}(Q(\xi'')) \leq \bar{J}(Q').$$

Wird daher P' durch die Gleichung

$$E_{n-1} P'^{n-1} = \bar{J}(Q')$$

definiert, so ist wegen (261), (262)

$$\varrho'' \leq P'.$$

Ist endlich Q' ein *defekter* Maximalquerschnitt, so gilt gemäß (245)

$$(263) \quad \varrho'' \leq P' < P.$$

Es sei nun Q' ein *exzessiver* Querschnitt. Definiert man P' durch die Gleichung

$$(264) \quad E_{n-1} P'^{n-1} = \underline{J}(\tilde{Q}'),$$

so ist zunächst definitionsmäßig

$$P' > P.$$

Ferner folgt aus (259), (264)

$$q'' \geq P.$$

Also gilt, wenn Q' ein exzessiver Querschnitt ist,

$$(265) \quad q'' \geq P' > P.$$

Die Funktion

$$\frac{1}{n-1} (|O| \cdot t - E_n t^n)$$

nimmt nun mit wachsendem t für $0 \leq t < P$ zu, während sie für $t \geq P$ abnimmt.

Die zu beweisende Ungleichung (249) folgt daher aus (256) a fortiori, und zwar, wenn Q' ein defekter Maximalquerschnitt ist, wegen (263), und wenn Q' ein exzessiver Querschnitt ist, wegen (265), w. z. b. w.

VI. Im Falle eines defekten Maximalquerschnitts ist bei vorgeschriebenem $|O|$ und P' die durch (249) gegebene Schranke eine genaue. Denn es gibt, wie § 3 II gezeigt, dann einen Rotationskörper, dessen Oberfläche den Flächeninhalt $|O|$ hat, und für welchen P' das Maximum der Radien der $(n-1)$ -dimensionalen Breitenkugeln ist, während in der Ungleichung (249) das Gleichheitszeichen gilt.

Um nun auch im Falle eines exzessiven Querschnitts die genaue Schranke zu finden, verfähre man folgendermaßen:

Man definiere die Funktion

$$G(|O|, q)$$

durch die Gleichungen

$$(266) \quad G(|O|, q) = \frac{1}{n-1} (|O| \cdot q - E_n q^n) \quad \text{für } q \leq P,$$

$$(267) \quad G(|O|, q) = \Gamma(|O|, q) \quad \text{für } q > P.$$

Hierbei ist die Funktion $\Gamma(|O|, q)$ für $q \geq P$ durch die Gleichung § 3 III (18') erklärt und wegen § 3 III (25'), (26') eine stetige Funktion ihrer beiden Argumente. Endlich nimmt sie gemäß § III (33') für $q = P$ den Wert $E_n P^n$ an, also denselben Wert, welchen die rechte Seite von (266) für $q = P$ erreicht. Also ist die Funktion $G(|O|, q)$ eine stetige Funktion ihrer beiden Argumente, insbesondere auch längs der „Naht“ $q = P$.

Nun gilt sowohl für den Fall eines exzessiven Querschnitts als auch für den Fall eines defekten Maximalquerschnitts für das Volumen V des Körpers K mit dem Oberflächeninhalt $|O|$ die Abschätzung

$$(268) \quad V \leq G(|O|, P'),$$

wobei P' im ersteren Fall durch die Gleichung (242) gegeben wird, im letzteren durch die Gleichung (243).

Beweis. Es gilt gemäß § 3 I (33) und § 3 III (34') unter den dort angegebenen Voraussetzungen für Rotationskörper die Ungleichung

$$(269) \quad V \leq G(|O|, \varrho),$$

wobei V das Volumen, $|O|$ den Oberflächeninhalt und ϱ das Maximum der Radien der $(n - 1)$ -dimensionalen Breitenkugeln bezeichnen.

Benutzt man nun in § 10 IV (2) an Stelle der zur Herleitung der Ungleichung (217) herangezogenen Ungleichung (33) die Ungleichung (269), so ergibt sich an Stelle von (217) unter der dort zugrunde liegenden Voraussetzung, daß die Achsenrichtungen des rechtwinkligen Koordinatensystems $(x_1 \dots x_n)$ in bezug auf den regulären Körper K nichtsingulär sind, die Ungleichung

$$(270) \quad V \leq G(|O|, \varrho),$$

wobei V das Volumen, $|O|$ den Oberflächeninhalt von K bedeuten, und ϱ das Maximum der durch die Gleichung (201) definierten stetigen Funktion $r(\xi)$ bezeichnet.

An dem im Abschnitt V des vorliegenden Paragraphen 11 entwickelten Beweise ändere man nun weiter nichts, als daß man an Stelle der zur Herleitung der Ungleichung (256) herangezogenen Ungleichung (217) die Ungleichung (270) einführt. Dann ergibt sich an Stelle der Ungleichung (256) die Ungleichung

$$(271) \quad V \leq G(|O|, \varrho'').$$

Nun nimmt die Funktion

$$G(|O|, \varrho)$$

bei festem $|O|$ mit wachsendem ϱ für $0 \leq \varrho < P$ zu, während sie für $\varrho \geq P$ gemäß § 3 III (25') abnimmt.

Die zu beweisende Ungleichung (268) folgt daher aus (271) a fortiori, und zwar, wenn Q' ein defekter Maximalquerschnitt ist, wegen (263), und wenn Q' ein exzessiver Querschnitt ist, wegen (265), w. z. b. w.

Daß die Ungleichung (268) bei vorgegebenem $|O|$ und P' für den Fall eines defekten Maximalquerschnitts die genaue Schranke liefert, ist schon am Eingang dieses Abschnitts hervorgehoben worden.

Aber auch für den Fall eines exzessiven Querschnitts, d. h. $P' > P$, stellt die Ungleichung (268) die genaue Schranke dar. Denn es gibt dann, wie § 3 III gezeigt, einen Rotationskörper, und zwar in der dort gewählten Bezeichnungsweise den Rotationskörper $K''_{a^*, P'}$, der den vorgegebenen Oberflächeninhalt $|O|$ und als exzessiven Querschnitt eine $(n-1)$ -dimensionale Breitenkugel mit dem vorgegebenen Radius P' besitzt, während in der Ungleichung (268) das Gleichheitszeichen statthat.

Daß endlich die durch die Ungleichung (268) dargestellte Schranke für $P' > P$ in der Tat kleiner ist, als die durch die Ungleichung (249) gegebene, folgt unmittelbar aus (267) und § 3 III (23').

Zum Schluß sei noch auf folgende Formulierung der isoperimetrischen Ungleichungen hingewiesen:

Führt man als Gegenstück zu dem Radius P der Kugel gleicher Oberfläche den durch die Gleichung $E_n P^{*n} = V$ definierten Radius P^* der Kugel gleichen Volumens ein, so erhalten die isoperimetrischen Ungleichungen (194) und (249) die einfache Gestalt

$$(272) \quad P^* \leq P,$$

$$(273) \quad P^{*n} \leq \frac{n P^{n-1} P' - P'^n}{n-1}.$$

Da die rechte Seite (273) mit P' für $0 < P' < P$ wächst, für $P' \geq P$ abnimmt und für $P' = P$ ihr Maximum P^n annimmt, so stellt (273) eine Verschärfung der mit der gewöhnlichen isoperimetrischen Ungleichung (194) gleichbedeutenden Ungleichung (272) dar.

Wie oben gezeigt, ist die Schranke (273) für $P' \leq P$ eine genaue, während sie für $P' > P$ durch (268) verkleinert werden kann. Die explizite Berechnung dieser Schranke erfordert die Auflösung einer an Hand von § 3 III leicht aufzustellenden Gleichung, welche bei geradem n transzendent, bei ungeradem n algebraisch vom Grade $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Für $n=3$ erhält man als genaue Schranke:

$$(274) \quad P^{*6} \leq (2P^2 - P'^2) \left(\frac{P^2 + P'^2}{2} \right)^{11}.$$

In der Tat wird dieser Ausdruck vom Quadrat der rechten Seite (273) um $\frac{1}{2}(P'^2 - P^2)^3$ übertroffen.

¹¹⁾ Daß $P'^2 < 2P^2$ sein muß, folgt daraus, daß die Oberfläche eines Körpers mehr als doppelt so groß sein muß wie jeder Querschnitt.

An infinite Integral involving Bessel functions, parabolic cylinder functions, and the confluent hypergeometric functions.

By

N. A. Shastri in Nagpur (India).

The object of this note is to evaluate an infinite integral involving Bessel functions, Parabolic cylinder functions, and Whittaker's confluent hypergeometric functions by methods of operational calculus. The notation used for operational relations is as given by H. Jeffreys¹⁾.

The integral due to Whittaker²⁾

$$D_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{4}x^2}}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty e^{-tx - \frac{1}{2}t^2} t^{-n-1} dt, \quad R(n) < 0, \quad x > 0$$

can be transformed into

$$\Gamma(2m+1) p e^{\frac{1}{4}p^2} D_{-2m-1}(p) = p \int_0^\infty e^{-px - \frac{1}{2}x^2} x^{2m} dx \quad R(m) > -\frac{1}{2}.$$

Hence*)

$$(1) \quad \Gamma(2m+1) p e^{\frac{1}{4}p^2} D_{-2m-1}(p) = e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2m} \quad R(m) > -\frac{1}{2}.$$

But³⁾

$$f(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} h(s) ds$$

if

$$f(p) = h(x).$$

*) $f(p) = h(x)$ means that $f(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x) dx$ when $Rp > a$.

¹⁾ H. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, Cambridge 1927.

²⁾ E. T. Whittaker, Proc. Lond. Math. Soc. (1) 35 (1903), S. 422.

³⁾ P. Humbert, Le Calcul Symbolique. Paris 1934, S. 28.

Hence

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sqrt{p} e^{\frac{1}{2}p} D_{-2m-1}(\sqrt{p}) &= \frac{1}{\Gamma(2m+1)\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-s^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4x}\right)} s^{2m} ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2m} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\Gamma(2m+1)} \cdot \frac{x^m}{(2x+1)^{m+\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \frac{x^m}{(2x+1)^{m+\frac{1}{2}}} \quad R(m) > -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

using the duplication formula of the gamma functions

$$\Gamma(2m+1) = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) \Gamma(m+1).$$

The operational relation can be further transformed into

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt{p} e^{\frac{p}{2a}} D_{-2m-1}\left(\sqrt{\frac{2p}{a}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \frac{x^m}{2^{m+\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{a}\right)^{m+\frac{1}{2}}} \\
 R(m) &> -\frac{1}{2}, \quad a > 0.
 \end{aligned}$$

Again⁴⁾

$$(4) \quad p^{-n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{p}} = x^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} J_{n+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) \quad R(n) > -\frac{3}{2}.$$

We assume in the present paper $R(n) > -1$.

We now apply to (3) & (4) the form of Parseval's theorem⁵⁾ as used in operational calculus, we get

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty x^{\frac{2n-1}{4}} e^{\frac{x}{2a}} D_{-2m-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{a}}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m+1) 2^{m+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{m-n-\frac{3}{2}} \left(x + \frac{1}{a}\right)^{-m-\frac{1}{2}} dx.
 \end{aligned}$$

This result can be further transformed after a slight simplification into

$$\begin{aligned}
 (5) \quad &\int_0^\infty \xi^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi}{2a}} D_{-2m-1}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\xi\right) J_{n+\frac{1}{2}}(2\xi) d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)} \frac{e^{\frac{a}{2}} a^{\frac{1}{2}(m+n+\frac{1}{2})}}{2^{m+\frac{3}{2}}} W_{-\frac{1}{2}(n+m+\frac{1}{2}), \frac{1}{2}(n-m+\frac{1}{2})}(a) \\
 &R(m) > -\frac{1}{2} \quad R(n) > -1
 \end{aligned}$$

⁴⁾ B. Van der Pol, Phil. Mag. 8 (1929), S. 895; A. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 403.

⁵⁾ S. Goldstein, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 34 (1932), S. 103—125, insbesondere S. 105f.

using the relation ⁶⁾

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} \cdot \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t} dt, \quad R(k - \frac{1}{2} - m) \leq 0.$$

The following particular cases of (5) may be noted.

(i) Put $m = 0$, $n = 0$ and $a = b^2$ in (5) we have

$$(6) \quad \int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{b^2}} D_{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{b}} \xi \right) J_{\frac{1}{2}}(2\xi) d\xi = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} b^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{2}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(b^2) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} b e^{b^2} \text{Eref}(b)$$

using the result ⁶⁾

$$W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(x^2) = 2 \sqrt{x} e^{\frac{1}{2}x^2} \text{Eref}(x).$$

The equation (6) can be transformed into

$$(7) \quad \int_0^\infty e^{\frac{\xi^2}{b^2}} \sin 2\xi D_{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{b}} \xi \right) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} b e^{b^2} \text{Eref}(b)$$

by using the relation

$$(8) \quad J_{\frac{1}{2}}(2\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \sin 2\xi.$$

(ii) Put $n = 0$ and $m = \frac{1}{2} - n'$ in (5) we have

$$(9) \quad \int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{a}} D_{2n'-2} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \xi \right) J_{\frac{1}{2}}(2\xi) d\xi = \frac{e^{\frac{a}{2}} a^{\frac{1}{2}(1-n')}}{2^{2-n'} \Gamma(\frac{3}{2} - n')} W_{\frac{1}{2}(n'-1), \frac{n'}{2}}(a) \\ = \frac{e^a a^{1-n'}}{2^{2-n'} \Gamma(\frac{3}{2} - n')} \{ \Gamma(n') - \gamma(n', a) \} \\ R(n') < 1$$

using the relation ⁶⁾

$$W_{\frac{1}{2}(n'-1), \frac{n'}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}(1-n')} e^{\frac{1}{2}x} \{ \Gamma(n') - \gamma(n', x) \}.$$

Relation (9) can be written with the help of (8) as

$$(10) \quad \int_0^\infty e^{\frac{\xi^2}{a}} \sin 2\xi D_{2n'-2} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \xi \right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2-n'}} \frac{e^a a^{1-n'}}{\Gamma(\frac{3}{2} - n')} \{ \Gamma(n') - \gamma(n', x) \} \\ R(n') < 1.$$

⁶⁾ E. T. Whittaker u. G. N. Watson, Modern Analysis Chapt. XVI, S. 340.

(iii) Put $m = -\frac{n'}{2}$, $n = -1 - \frac{n'}{2}$ and $a = \frac{z^2}{2}$ in (5) $R(n') < 0$, we get

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \int_0^\infty \xi^{-\frac{n'+1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{2}} D_{n'-1} \left(\frac{2\xi}{z} \right) J_{-\frac{n'+1}{2}}(2\xi) d\xi \\
 &= \frac{\Gamma\left(-\frac{n'}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{n'}{2}\right)} \cdot \frac{e^{\frac{z^2}{4}} z^{-(n'+\frac{1}{2})}}{2^{\frac{5}{4}-n'}} \cdot W_{\frac{n'}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right) \\
 &= -\frac{2^{\frac{n'-1}{2}} z^{-n'}}{n'} e^{\frac{z^2}{4}} D_{n'}(z), \quad R(n') < 0
 \end{aligned}$$

using the relation ⁶⁾

$$W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) = 2^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} D_n(z).$$

If we replace n' by $-2n$, z by a , and ξ by $\frac{ax}{2}$ we can transform (11) into

$$(12) \quad \int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} J_{n-\frac{1}{2}}(ax) D_{-2n-1}(x) dx = \frac{a^{n-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}a^2}}{2n} D_{-2n}(a) \quad R(n) > 0$$

a result due to Varma ⁷⁾.

(iv) Put $m = -n' - \frac{m'}{2} - \frac{1}{2}$ and $n = -1 - n' + \frac{m'}{2}$ in (5) so that $R(n') < 0$ and $R(n') < R\left(\frac{m'}{2}\right) < R(-n')$ we have

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \int_0^\infty \xi^{\frac{m'-2n'-1}{2}} e^{\frac{\xi^2}{2a}} D_{2n'+m'}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\xi\right) J_{\frac{m'-2n'-1}{2}}(2\xi) d\xi \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{m'}{2}-n'\right) 2^{\frac{n'+\frac{m'}{2}-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n'-\frac{m'}{2}\right)} \cdot e^{\frac{a}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}(2n'+1)} W_{\frac{1}{2}(2n'+1), \frac{m'}{2}}(a) \\
 &= \frac{\pi 2^{\frac{m'}{2}+n'-1}}{\sin\left(\frac{m'}{2}-n'\right) \pi \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{m'}{2}-n'\right)} (-a)^{\frac{1}{2}m'-n'} e^a \omega_{n', m'}(a) \\
 &R(n') < 0; \quad R(n') < R\left(\frac{m'}{2}\right) < R(-n')
 \end{aligned}$$

using the result ⁸⁾

$$W_{n'+\frac{1}{2}, \frac{m'}{2}}(a) = \Gamma(n'+1-\frac{1}{2}m') (-)^{\frac{1}{2}m'-n'} a^{\frac{1}{2}(m'+1)} e^{\frac{1}{2}a} \omega_{n', m'}(a),$$

where $\omega_{n', m'}$ is the Pearson-Cunningham function.

⁷⁾ R. S. Varma, Proc. Camb. Phil. Soc. 33 (1937), S. 210—211.

(v) Put $m = -m'$ and $n = m' - \frac{1}{2}$ in (5) so that $-\frac{1}{2} < R(m') < \frac{1}{2}$ we get

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \int_0^{\infty} \xi^{m'} e^{\frac{\xi^2}{2a}} D_{2m'-1} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \xi \right) J_{m'}(2\xi) d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(m' + \frac{1}{2})}{\Gamma(1 - m')} \frac{1}{2^{\frac{3}{2} - m'}} e^{\frac{a}{2}} W_{0, m'}(a) \\
 &= \frac{\sqrt{\pi a}}{2^{\frac{5}{2} - m'}} \frac{\Gamma(m' + \frac{1}{2})}{\Gamma(1 - m')} e^{\frac{1}{2} \{a + (m' + 1)\pi i\}} H_{m'}^{(1)} \left[\frac{a}{2} e^{\frac{\pi}{2} i} \right]
 \end{aligned}$$

using the relation ⁸⁾

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i \left(\frac{\nu \pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} W_{0, \nu}(-2iz).$$

⁸⁾ C. S. Meijer, Nieuw Arch. f. Wiskunde 18 (1934), S. 39 (17).

(Eingegangen am 13. Oktober 1937.)

Berichtigungen.

Zu Band 42, S. 1—30.

S. 7, Zeile 7 von oben soll es $2u + x - 2$ heißen statt $2u + x - 1$.

S. 25, Zeile 7 von oben soll lauten: für $h \geq 2$ genauer.

S. 25, Zeile 20 von oben ist das Zeichen $>$ durch $\geq$ zu ersetzen, ebenso in den Zeilen 22 und 24 und in Formel (70) das erste Zeichen, in Formel (71) das letzte Zeichen.

S. 26, Zeile 16 von oben ist *Basis* durch *Minimalbasis* zu ersetzen.

Hans Rohrbach.

Zu Band 42, S. 301—312.

Ich verdanke den Herren Doebelin und Fréchet den freundlichen Hinweis, daß die S. 303/4 gegebene neue Fassung meiner notwendigen und hinreichenden Bedingung aus Bd. 40, S. 521 ff. auf einem bedauerlichen Versehen beruht (im Anschluß an die Gleichung (27)): in der vorliegenden Form ist das Kriterium nur *hinreichend*. In Wirklichkeit muß der Gültigkeitsbereich für (5), und also auch für (12), eingeschränkt werden in einer naheliegenden Weise, die sich auch unmittelbar aus dem Beweisgang ergibt. Ich gehe nicht darauf ein, da es inzwischen Herrn Doebelin gelungen ist, das Kriterium noch zweckmäßiger zu formulieren.

Für den Fall gleicher Komponenten bleibt das Kriterium ungeändert, und ebenso ist das Hauptresultat der Arbeit, nämlich die Beantwortung der von Herrn P. Lévy gestellten Frage, vom ersten Teil unabhängig.

Willy Feller.

Zu Band 44, S. 319—320.

Herr Davenport hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der von mir gegebene Beweis nicht in Ordnung ist, da bei der Anwendung der nur für $m \geq 2$ gültigen Ungleichung $B(m-1) \geq \beta^* m$ der Fall $m = 1$ nicht ausgeschlossen werden kann.

Hans-Heinz Ostmann.

